

**EP 069 - 2009 : Intersection de tangentes**

Auteur du corrigé : François TEXIER

TI-Nspire™ CAS

**Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.7**Fichier associé** : EP069\_2009\_Tangentes\_CAS.tns**1. Le sujet****Sujet 069 de l'épreuve pratique 2009 – Intersection de tangentes****Énoncé**On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  et  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de  $g$ .Pour tout réel  $a$ , on note :

- A le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$  et  $T_A$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point A,
- B le point de  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $a$  et  $T_B$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point B,
- M ( $x_M$  ;  $y_M$ ) le point d'intersection des tangentes  $T_A$  et  $T_B$ .

On souhaite étudier le lieu géométrique  $\mathcal{E}$  du point M lorsque  $a$  varie dans  $\mathbb{R}$ .**Partie A**

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
  - a) Construire les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ainsi que les tangentes  $T_A$  et  $T_B$ .
  - b) Construire le point M.
  - c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de  $a$ , dire quelle relation semble exister entre les réels  $a$  et  $x_M$ .
2. Tracer le lieu  $\mathcal{L}$  du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative  $\mathcal{E}$  d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

**Partie B**

3. Démontrer que  $\mathcal{L}$  fait effectivement partie de  $\mathcal{E}$ . Que dire de plus ?

**Production demandée**

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.
- Réponse à la question 3.

**Compétences évaluées**

- Tracer la courbe représentative d'une fonction et sa tangente en un point donné.
- Utiliser l'aspect dynamique pour faire des conjectures.
- Mettre en place un protocole pour reconnaître le lieu géométrique d'un point.
- Déterminer une équation d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction.
- Résoudre un système linéaire.

## 2. Corrigé

## Partie A

1) Ouvrir une page **Calculs**.

Définir les fonctions  $f$  et  $g$ .

Terminé

$$f(x) := \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2}$$

Terminé

$$g(x) := \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

2/99

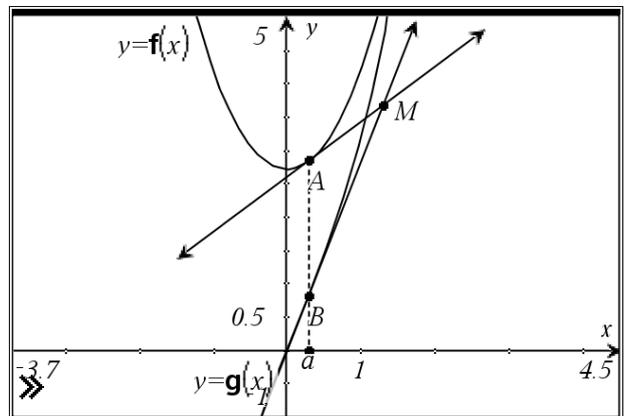
a) Ouvrir ensuite une page **Graphiques & géométrie**.

Définir les fonctions  $f_1(x) = f(x)$  et  $f_2(x) = g(x)$ .

Placer un point d'abscisse  $a$  sur l'axe des abscisses, tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par ce point.

Déterminer les points A et B comme intersection de cette perpendiculaire avec les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , puis demander le tracé des tangentes en ces deux points.

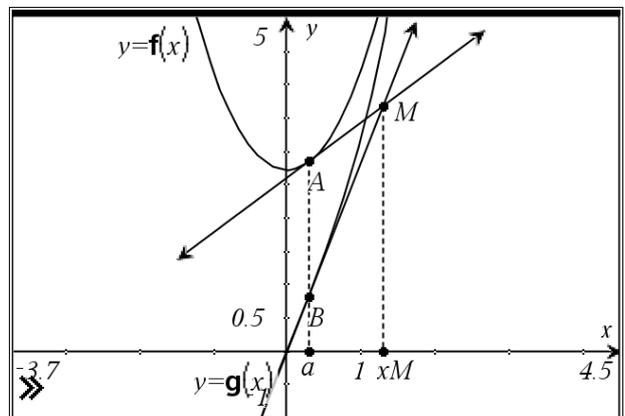
b) Définir le point M d'intersection des deux tangentes.



c) Projeter le point M sur l'axe des abscisses et appeler  $x_M$  le point obtenu.

Mesurer la distance entre  $a$  et  $x_M$  et la nommer  $ax_M$ .

En déplaçant le point  $a$ , on constate que la longueur  $ax_M$  reste constante et égale à 1 unité.

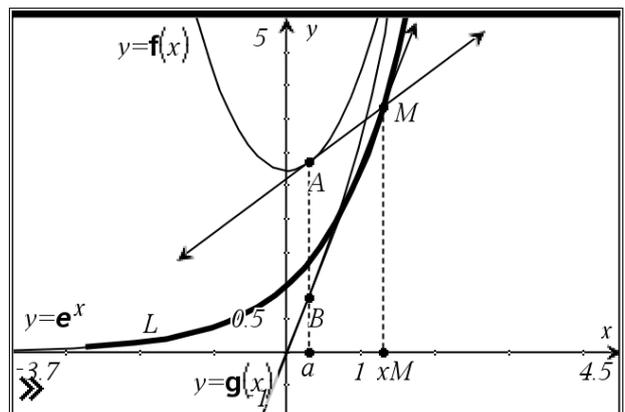


2) Demander le tracé du lieu  $\mathcal{L}$  du point M quand  $a$  décrit l'axe des réels.

Il semble que le point M soit sur la courbe  $\mathcal{E}$  de la fonction exponentielle.

On peut vérifier cette conjecture en traçant la courbe de la fonction exponentielle.

On constate que cette dernière courbe est superposée au lieu  $\mathcal{L}$  du point M.



## Partie B

3) Revenir à la page **Calculs**.

Nommer «  $ta$  » et «  $tb$  » les équations des tangentes à  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse  $a$  comme ci-contre.

$$ta:=y=\text{tangentLine}(f(x),x,a)$$

$$y=\frac{(e^{2\cdot a-1})\cdot e^{1-a}\cdot x}{2}-\frac{((a-1)\cdot e^{2\cdot a-a-1})\cdot e^{1-}}{2}$$


---


$$tb:=y=\text{tangentLine}(g(x),x,a)$$

$$y=\frac{(e^{2\cdot a+1})\cdot e^{1-a}\cdot x}{2}-\frac{((a-1)\cdot e^{2\cdot a+a+1})\cdot e^{1-}}{2}$$

4/99

Déterminer, en résolvant le système «  $ta$  et  $tb$  », les coordonnées du point M.

Ces coordonnées sont  $x_M = a + 1$  et  $y_M = e^{a+1}$ ,  
soit  $y_M = e^{x_M}$ , ce qui permet de vérifier deux éléments :  
la longueur  $ax_M = x_M - a = 1$  est constante et égale à 1 ;  
le lieu  $\mathcal{L}$  fait effectivement partie de la courbe  $\mathcal{E}$ .

$$y=\frac{(e^{2\cdot a-1})\cdot e^{1-a}\cdot x}{2}-\frac{((a-1)\cdot e^{2\cdot a-a-1})\cdot e^{1-}}{2}$$


---


$$tb:=y=\text{tangentLine}(g(x),x,a)$$

$$y=\frac{(e^{2\cdot a+1})\cdot e^{1-a}\cdot x}{2}-\frac{((a-1)\cdot e^{2\cdot a+a+1})\cdot e^{1-}}{2}$$


---


$$\text{solve}(ta \text{ and } tb, \{x,y\}) \quad x=a+1 \text{ and } y=e^{a+1}$$

5/99