EP 001-2007 : Terme d'une suite récurrente

Auteur du corrigé : Alain Soléan

TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP001_2007_TermeSuiteRécurrente.tns

1. Le sujet

Sujet 001 de l'épreuve pratique 2007– Expression du terme de rang *n* d'une suite récurrente

Enoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + 2n - 11.$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1}. Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

a) A l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

b) Démontrer cette formule.

Production demandée

- Le nuage de points attendu dans la question **1** et la particularité de ce nuage.
- La stratégie de démonstration retenue à la question **2** ainsi que les étapes de cette démonstration.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Elaborer un processus itératif sur tableur ou calculatrice.
  - Représenter graphiquement les termes d'une suite.
- **Compétences mathématiques**
  - Déterminer une fonction polynôme à partir d'informations obtenues sur la courbe représentative.
  - Mettre en place une démonstration par récurrence.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la cellule **A1** placer 0, puis dans la cellule **A2** inscrire la formule **= A1 + 1** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **A3** à **A21** , coller la formule (la colonne **A** contiendra donc les valeurs de n).

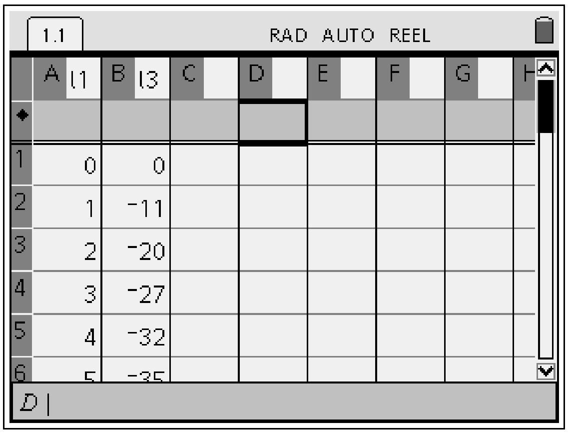
Dans la cellule **B1** placer 0, puis dans la cellule **B2** inscrire la formule **= B1 + 2*A1 – 11** .

Copier cette cellule, sélectionner les cellules **B3** à **B21,** coller la formule (la colonne **B** contiendra donc les valeurs de u_n) (voir page 2).

Pointer sur la « tête » de colonne **A** ; cliquer sur l'item **Var** du menu choisir ; **stocker la variable** ; nous l'avons nommée **ℓ1**.

Faire de même sur la colonne **B** ; nous l'avons nommée **ℓ3**.

L'écran ci-contre est obtenu à partir de la calculatrice.

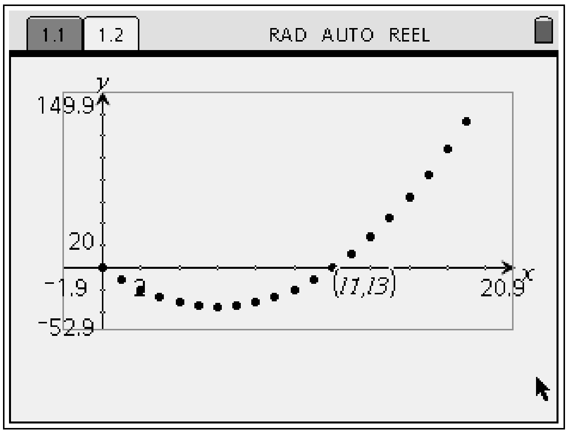


Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Définir dans **Edition de graphique**, **Nuage de points** et lier x à **ℓ1**, y à **ℓ3**.

Choisir dans le menu **Fenêtre**, **Zoom – Données**, puis demander le tracé.

L'écran ci-contre est obtenu à partir de la calculatrice.



2) La forme de la courbe suggère une écriture $u_n = \alpha\, n^2 + \beta\, n + \gamma$. De plus, d'après les résultats du tableur $u_0 = 0$ et $u_{12} = 0$ donc l'écriture conjecturée peut se mettre sous la forme $u_n = \alpha\, n\, (n - 12)$. Enfin, toujours d'après le tableur $u_1 = -11$ donc $\alpha = 1$.

On obtient donc $u_n = n\,(n - 12)$.

La démonstration par récurrence se fait sans problème puisque $u_{n+1} = u_n + 2n - 11 = n^2 - 10n - 11$

et $(n + 1)\,(n + 1 - 12) = n^2 - 10n - 11$ et que $u_0 = 0 \times (0 - 12) = 0$.

3. Pour aller plus loin

Les suites de la forme $u_{n+1} = u_n + a\, n + b$ sont des suites dites « à différences secondes constantes » . L'obtention d'une formule donnant u_n en fonction de n peut se faire en considérant une suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison a et $v_0 = u_1 - u_0$ et on a : $\sum_{k=0}^{k=n-1} v_k = u_n - u_0$.

Dans le cas présent, la raison étant $a = 2$ et le premier terme $v_0 = -11$, on retrouve bien :

$$u_n - u_0 = n\left(\frac{v_0 + v_{n-1}}{2}\right) = n\left(\frac{-11 + 2(n-1) - 11}{2}\right) = n\,(n - 12).$$