

F6n – CLORE UN JARDIN

Auteurs : Tom Reardon et Jean-Pierre Bouvier

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : optimisation, recueil de données, représentation graphique, maximum, dérivée.

Fichiers associés : F6nElev_CloreJardin_CAS.tns, F6nProf_CloreJardin_CAS.tns

1. Objectifs

Résoudre un problème d'optimisation en utilisant plusieurs registres : géométrie, recueil de données, graphique, calcul algébrique et analyse.

Utiliser les fonctionnalités de TI-Nspire pour passer d'un registre à l'autre.

2. Énoncé

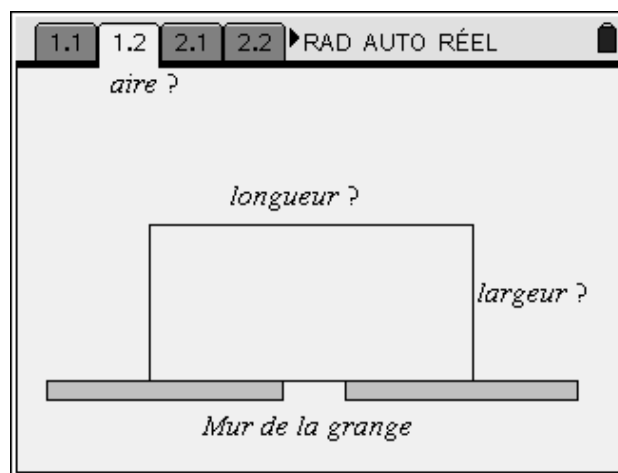
On souhaite entourer un jardin rectangulaire d'une clôture grillagée.

Le jardin est limité d'un côté par le mur d'une grange muni d'une porte (cf. figure, ci-contre).

On utilisera la totalité du grillage disponible, soit 25 m, pour limiter les **trois** autres côtés du jardin.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le jardin, répondant aux conditions ci-dessus, de plus grande aire possible.

Pour permettre une bonne lecture des résultats affichés, choisir dans  8 : Réglages du classeur l'affichage Flottant 3.



3. Commentaires

Ce problème, classique, est ici traité de trois façons différentes, proposées au choix du professeur.

Dans la première méthode, l'élève, invité à construire des jardins possibles, fait un relevé de données. Ce relevé permet alors de tracer un nuage de points. L'élève procède ensuite à une recherche de la courbe contenant les points du nuage, puis du maximum de la fonction à partir de la courbe. Pour obtenir l'expression de la fonction, il résout un système de trois équations à trois inconnues.

Dans la deuxième méthode, l'élève détermine l'expression de l'aire du jardin en fonction de la longueur x d'un des côtés perpendiculaires au mur. Il demande alors le tracé de la représentation graphique de la fonction. Il procède, de même que précédemment, pour déterminer une valeur approchée du maximum.

Dans la troisième méthode, l'élève utilise les outils de la classe de Première (dérivation) pour déterminer le maximum de la fonction.

D'autres méthodes de résolution sont proposées, pour la classe de Seconde, dans l'activité F3n_CloreJardin. Pour la classe de seconde, il est possible de changer la longueur totale du grillage (par exemple, 26 m) pour obtenir directement la valeur exacte du maximum et compléter l'étude en opérant les vérifications nécessaires : dans le cas de 26 m, $g(x) = 2x(13 - x)$. On vérifie alors que $g(x) = 84,5 - 2(x - 6,5)^2$ et on valide que le maximum est bien atteint en 6,5 (pour une aire de 84,5).

En Première, après avoir étudié la dérivation, on peut proposer aux élèves les trois méthodes ci-dessus.

Dans les fichiers F6nElev_CloreJardin_CAS.tns et F6nProf_CloreJardin_CAS.tns, certains écrans comportent des « Questions-Réponses » à utiliser surtout lorsque les élèves possèdent tous la version nomade de TI-Nspire. Ces écrans peuvent être remplacés par un questionnaire simple (choix de page : **Éditeur mathématique**) où l'élève est invité à répondre oralement ou sur son cahier.

4. Conduite de l'activité

1) Première méthode

L'élève formule plusieurs propositions de jardins possibles et recueille, dans **Tableur & listes**, les données expérimentales (écran 1). Il doit représenter les points obtenus dans un graphique (largeur en abscisse, aire en ordonnée) (**Graphiques & géométrie**, écran 2).

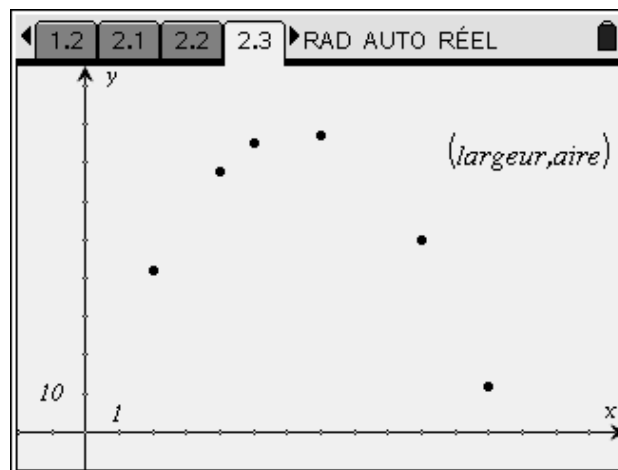
1.1 1.2 2.1 2.2 RAD AUTO RÉEL

Dans la colonne A de la table ci-contre, entrer les valeurs de la largeur de chacun des rectangles, puis dans la colonne B, les aires correspondantes.

	A largeur	B aire	C
1	2	42	
2	4	68	
3	5	75	
4	7	77	
5	10	50	

A1 =2

écran 1



écran 2

Si l'élève a bien réparti ses « essais », en particulier, s'il n'a pas eu la volonté d'adosser systématiquement au mur le côté le plus grand du rectangle, il peut alors reconnaître un nuage de points de forme parabolique.

La pratique de quelques paraboles permet au professeur d'envisager obtenir une expression de la fonction du type : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si cela n'a pas été vu avant, on admettra que connaître les images de trois réels suffit à déterminer cette expression. Ceci sera validé par les travaux qui suivront.

On choisit trois points du nuage, par exemple, les points de coordonnées (2 ; 42), (4 ; 68) et (10 ; 50).

On résout le système de trois équations à trois inconnues a , b et c ainsi obtenu (écran 3) en utilisant la fonction solve.

Pour vérifier l'expression ainsi déterminée, on dispose de deux méthodes. L'une consiste à créer, dans la page **Calculs** l'image par f de la liste des valeurs de la colonne « largeur » du tableur (écran 3). Pour l'autre, on crée une troisième colonne dans le tableur avec les valeurs de $f(x)$ pour x figurant dans la colonne A et on vérifie que les valeurs des colonnes B et C du tableur sont identiques. (écran 4).

2.3 2.4 2.5 2.6 RAD AUTO RÉEL

Define $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Terminé

solve $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 42 \\ f(4) = 68 \\ f(10) = 50 \end{array} \right\}, \{a, b, c\}$

$a = -2$ and $b = 25$ and $c = 0$

Define $f(x) = -2 \cdot x^2 + 25 \cdot x$ Terminé

$f(\text{largeur})$ {42, 68, 75, 77, 50, 12}

1/4

écran 3

2.2 2.3 2.4 2.5 RAD AUTO RÉEL

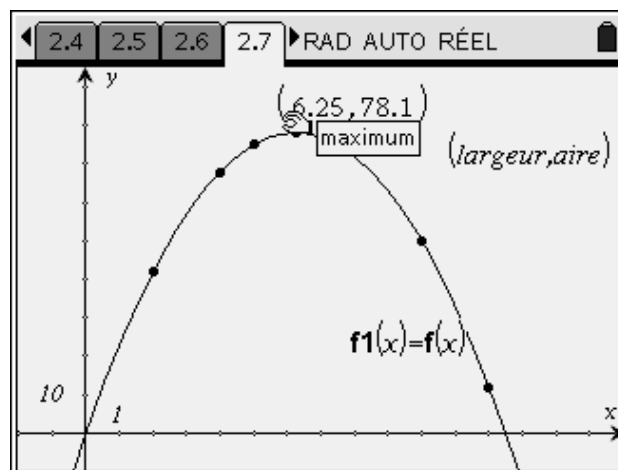
Dans la colonne A de la table ci-contre, entrer les valeurs de la largeur de chacun des rectangles, puis dans la colonne B, les aires correspondantes.

	A largeur	B aire	C
1	2	42	42
2	4	68	68
3	5	75	75
4	7	77	77
5	10	50	50

C1 =f(a1)

écran 4

L'élève demande ensuite de tracer la courbe correspondante (écran 5) et peut obtenir des valeurs approchées des coordonnées du sommet de la parabole.

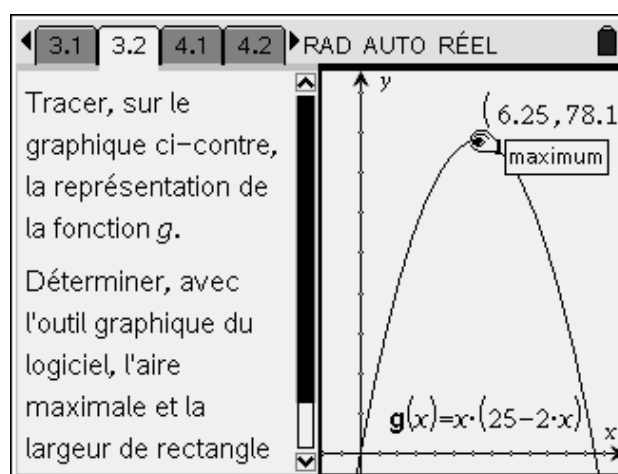


écran 3

2) Deuxième méthode

L'élève détermine l'expression de l'aire du jardin en fonction de la longueur x d'un des côtés perpendiculaires au mur.

Il demande alors le tracé de la courbe représentant la fonction $g : x \mapsto x(25 - 2x)$ et peut là encore obtenir des valeurs approchées des coordonnées du sommet de la parabole.

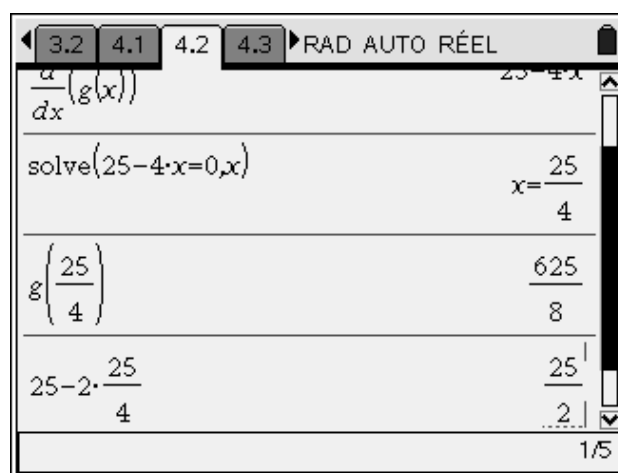


écran 4

3) Troisième méthode

La fonction g (aire en fonction de x) étant déterminée, l'élève utilise les outils de la classe de Première (dérivation) pour déterminer le maximum de la fonction.

Il obtient, par cette méthode, les valeurs exactes, soit 6,25 m et 78,125 m², la longueur du terrain étant de 12,5 m.



écran 5

Il est enfin demandé à l'élève de comparer les trois méthodes et leurs solutions.

Le travail effectué dans les deux premières méthodes est ici assez pertinent. Toutefois, on n'est pas sûr, dans ces cas, que le maximum soit atteint exactement en 6,25. Par une recherche graphique, la valeur obtenue pour le maximum est une valeur approchée, qui, plus est, dépend de la précision choisie.

On pourra signaler la solution qui consiste à chercher le rectangle de périmètre donné qui a la plus grande aire. Il suffit de considérer la figure formée par le rectangle et son symétrique par rapport au mur. On obtient alors le carré de périmètre 50 m, ce qui confirme les résultats précédents.