TALLER : DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR.

Viviana Barile M.

Este taller debe ser realizado en clases con la ayuda del profesor. Tiempo estimado 30 minutos.

P1.- Una función $f(x)$, que es derivable hasta el orden $n + 1$, se puede aproximar a un polinomio $P_n(x)$ en torno a un punto x_0. Tal polinomio se expresa como:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x - x_0)^n}{n!}$$

En otras palabras:

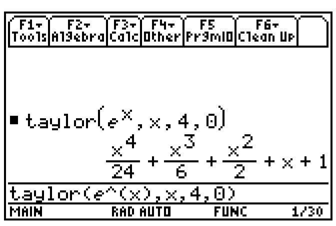
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x - x_0)^k}{k!}$$, donde $f^{(k)}(x_0)$ es la derivada k-ésima de f en x_0.

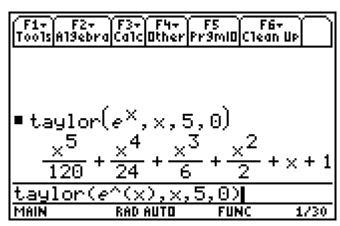
Este polinomio se denomina ***Desarrollo de Taylor***. Si el desarrollo de Taylor se realiza en torno al punto $x_0 = 0$, entonces se conoce como ***Desarrollo de Mac Laurin***.

a) Respecto a la definición anterior, encuentre usando la TI – 89 el polinomio de Mac Laurin de grado 3, 4 y 5, para la función $f(x) = e^x$.

b) Utilizando la parte a), encuentre una expresión general para obtener el Desarrollo en Serie de la función $f(x)$.

c) Grafique $f(x) = e^x$ y la aproximación polinomial encontrada



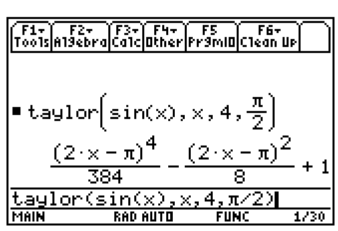


P2.- Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ .Encuentre el desarrollo en serie de la función $f(x)$ de grado 4 en torno a:

a) $x_0 = 0$.

b) $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Usando la TI – 89, el polinomio de grado 4 en torno al punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ es:



P3.- Sea f una función derivable hasta el orden $n + 1$ y $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en torno a x_0. Se define el ***Resto de Lagrange*** como:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$, en que ξ está entre x_0 y x.

Encuentre el Resto de Lagrange de la función $f(x) = \ln(x+1)$ en torno al punto $x_0 = 0$.

P4.- Utilizando el P3., calcule el valor de $\ln(1.2)$ con 6 decimales exactos; es decir, $|R_n(x)| \le 10^{-6} = 0.000001$.

P5.- Usando expansión de Taylor con un polinomio de grado 4 en torno al punto $x_0 = 0$, estime el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Compare dicho resultado con el valor exacto; es decir, calculando directamente la integral con la TI – 89.