

ESD 2009 – 0702 : Probabilités

Auteur du corrigé : Gilbert Julia

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7 de TI-Nspire CAS.

Fichier associé : esd2009_0702.tns

1. Le sujet

1. L'exercice proposé au candidat

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 €.

Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- La probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à 0,25.
- Si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 et si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25.

1. On note A l'événement « le premier client achète le produit » et B l'événement « le second client achète le produit ». Calculer la probabilité de l'événement B .

2. Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ?

3. Le commercial perçoit 15 % sur le total de sa vente.

3.1. Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.

3.2. Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

4. Quel doit être le pourcentage minimum de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 € ?

2. Le travail demandé au candidat

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- Sa réponse à la question 3.
- Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Le candidat présentera au jury :

- Le contenu de ses fiches.
- Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé porte sur les notions d'une part de probabilités conditionnelles (questions 1 et 2) et d'autre part de variables aléatoires (questions 3 et 4).

Dans son ensemble, cet exercice peut servir à une évaluation des connaissances acquises en probabilités dans une classe de terminale. L'enseignant peut aussi exploiter cet exercice pour viser deux objectifs :

- Apprendre à ses élèves à déceler une situation de référence (expérience aléatoire à deux niveaux de hasard) sous l'habillage fort « caricatural » des deux premières questions que propose l'énoncé.
- Donner du sens à la notion d'espérance mathématique (question 4)

Méthodes et savoirs mis en jeu dans l'exercice

- Savoir appliquer explicitement ou non la formule des probabilités totales (question 1)
- Savoir calculer la probabilité d'une différence symétrique de deux événements (question 2 ; la probabilité demandée est celle de l'événement $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$).
- Savoir déterminer la loi de probabilité et l'espérance mathématique d'une variable aléatoire (question 3). Les élèves doivent interpréter l'énoncé pour obtenir correctement les valeurs prises par cette variable aléatoire (la notion de « gain » mériterait d'être clarifiée : s'agit-il du montant des ventes ? Du montant de la commission, en cohérence avec la question 4 ?).
- Savoir exploiter la notion d'espérance mathématique (question 4).

Pour traiter les questions 1 et 2, un élève peut confectionner un arbre de probabilité. Conformément aux programmes, un tel arbre correctement constitué sert de preuve. Cet arbre amène à l'utilisation implicite des formules : $p(B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$ et $p(A\Delta B) = p(A)p_A(\bar{B}) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$. On attend comme résultats de ces questions respectivement 0,2875 et 0,3375.

Pour calculer l'espérance mathématique de la commission C , les élèves peuvent utiliser deux méthodes : soit déterminer les valeurs prises par C et calculer son espérance en appliquant la formule de calcul usuelle (démarche privilégiée par l'énoncé), soit lier la variable aléatoire C au nombre N de ventes ($C = 75N$), calculer l'espérance de N et appliquer la propriété de linéarité de l'espérance.

3. Apport de la TI-Nspire

Prérequis :

- Utiliser des instructions conditionnelles dans un programme.
- Connaître l'opération sur les listes cumulatives `sum` (liste) (ou `cumsum`) qui dresse la liste du cumul des valeurs de la liste indiquée.
- Connaître l'instruction `countif` (liste, valeur) qui renvoie le nombre d'occurrences de la valeur indiquée dans la liste indiquée.

a. Apports proposés

- Construction d'un programme simulant une liste d'expériences dont le protocole est conforme aux hypothèses de l'énoncé.
- Diverses exploitations des résultats à l'aide du tableur de la calculatrice.
- Représentation graphique de certaines des séries statistiques obtenues.

b. Simulation d'une série de tournées

Ouvrir un nouveau classeur. Les réglages de ce classeur sont ici le mode Approché pour l'écriture des nombres et Flottant 4 pour le nombre de décimales affichées.

Dans une première page **Calculs**, le programme **commercial**(n) est destiné à simuler le résultat d'une série de n tournées. A cet effet, l'instruction « For ... EndFor » égrène les différentes tournées et définit deux listes. L'une, nommée **cla**, enregistre pour chaque tournée, le résultat (0 ou 1) de la visite du premier client (client a). L'autre, nommée **clb**, enregistre le résultat de la visite du deuxième client (client b) de la même tournée, conditionné par le résultat précédent à l'aide de l'instruction conditionnelle « If ... Then ... Else ... EndIf ».

```

1.1 RAD AUTO RÉEL
commercial 1/11
Define commercial(n)=
Prgm
Local i
newList(n)→cla
newList(n)→clb
For i,1,n
when(rand()<0.25,1,0)→cla[i]
If cla[i]=0 Then
when(rand()<0.25,1,0)→clb[i]

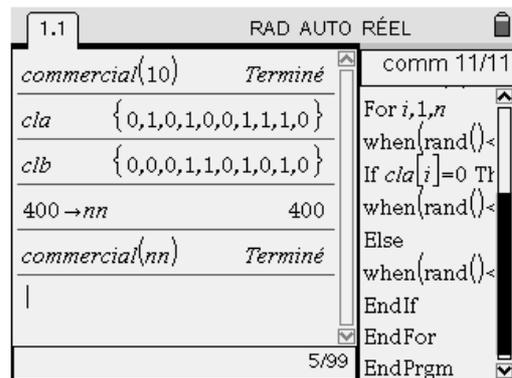
```

```

when(rand()<0.4,1,0)→clb[i]
EndIf
EndFor
EndPrgm

```

Le programme est testé pour une petite valeur de n puis lancé pour une valeur plus grande (400 par exemple) stockée en variable¹ **nn**.



Ouvrir une page **Tableur & listes**. La colonne A, nommée **num**, sert à numéroter les tournées à l'aide par exemple de la formule « =seq($i,i,1,nn$) ». Les colonnes B et C rappellent les listes **cla** et **clb** générées par le programme précédent. Chaque couple ($cla[i]$, $clb[i]$) pour $i = 1, \dots, nn$ représente les nombres de ventes réalisées lors d'une visite virtuelle à deux clients successifs.

La simulation est terminée, il reste à en exploiter les résultats.

A	B	C	D
num	cla	clb	
♦ =seq(i,i,1,nn)			
1	1	0	0
2	2	0	1
3	3	1	0
4	4	1	0
5	5	0	0

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen in table editor mode. The table has four columns: A (num), B (cla), C (clb), and D. The first row contains the column headers. The second row contains the formula for generating the data: ♦ =seq(i,i,1,nn). The following rows contain the data for i=1 to 5. The status bar shows 'A num:=seq(i,i,1,nn)'.

Remarque : Il est possible de traiter ces questions (avec des programmes similaires) sur les calculatrices graphiques de base dont disposent les élèves de lycée. Toutefois, la capacité de mémoire de telles machines peut en limiter l'usage sur de tels problèmes.

c. Un exemple d'exploitation : l'évènement B : « le second client achète le produit »

La confection d'un programme comme celui générant les listes **cla** et **clb** relève des compétences qui semblent attendues d'un candidat au CAPES en matière d'utilisation de calculatrice pour élaborer une simulation. Le candidat peut ensuite se limiter, dans le temps de préparation imparti, à *une seule* exploitation significative de sa simulation. Nous avons choisi d'illustrer la question 1.

En relation avec la question 1, la colonne D, nommée **frvb**, calcule la fréquence des ventes au deuxième client au cours des tournées déjà effectuées (formule « = $\frac{\text{cumulativesum}(\text{clb})}{\text{num}}$ » dans la ligne de saisie)

A	B	C	D
num	cla	clb	frvb
♦ =seq(i,i,1,nn)			
=cumulativesum(clb)			
1	1.	0.	0.
2	2.	0.	1.
3	3.	1.	0.
4	4.	1.	0.

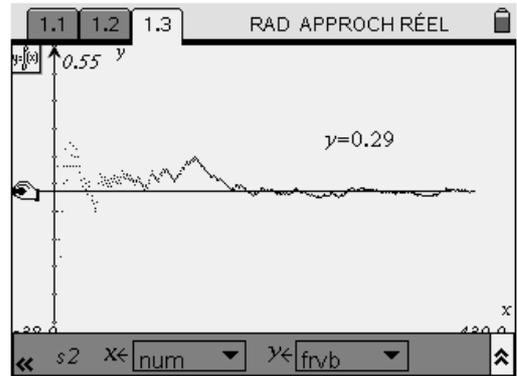
The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen in table editor mode. The table has four columns: A (num), B (cla), C (clb), and D (frvb). The first row contains the column headers. The second row contains the formula for generating the data: ♦ =seq(i,i,1,nn). The third row contains the formula for calculating the frequency: =cumulativesum(clb). The following rows contain the data for i=1 to 4. The status bar shows 'D frvb:=cumulativesum(clb)/num'.

¹ On note cette variable **nn** plutôt que **n** pour éviter ultérieurement des conflits entre référence de colonne du tableur et référence de variable.

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**. Choisir Type de graphique puis Nuage de points (menu 3 4).

La liste **num** est saisie en abscisses, et la liste **frvb** en ordonnées. Eventuellement, régler la fenêtre d'affichage (menu 4 9).

Une perpendiculaire arbitraire à l'axe des ordonnées peut être tracée, dont on fait afficher l'équation (menu 1 7) pour estimer empiriquement la fréquence des occurrences de vente au deuxième client.



Un retour sur la page **Calculs** permet d'estimer la probabilité de l'évènement B à l'aide d'un intervalle de fluctuation de niveau 95 %, lorsque **nn** tournées ont été simulées.

On note que cette simulation-ci ne remet pas en cause certaines conjectures erronées sur la probabilité de B. Par exemple, la conjecture : « la probabilité cherchée est la demi-somme 0,325 de 0,25 et de 0,4 » n'est pas démentie, le nombre 0,325 appartient lui aussi à l'intervalle de fluctuation. Le nombre de 400 tournées simulées est trop faible pour permettre de contester cette conjecture. En regroupant les résultats des calculatrices de plusieurs élèves, chacune simulant 400 tournées, on devrait y arriver.

commercial(nn)	Terminé
frvb[nn] - 1/√nn	0.245
frvb[nn] + 1/√nn	0.345

```

For i,1,nn
  when(rand())<
If cla[i]=0 Th
  when(rand())<
Else
  when(rand())<
EndIf
EndFor
EndPrgm
  
```

4. Pour aller plus loin

Cependant, une fois les listes **cla** et **clb** générées, il est possible de les utiliser pour illustrer les diverses questions de l'énoncé, et non pas seulement la question 1. Nous en proposons quelques exemples.

Revenir à la page **Tableur & listes**. La colonne E, nommée **nbrv**, est la somme des listes **cla** et **clb**. Elle calcule le nombre total de ventes effectuées au cours de chaque tournée. Ses éléments appartiennent tous à $\{0, 1, 2\}$ suivant que la tournée correspondante s'est soldée par aucune, une ou deux ventes.

Cette liste des « nombres de ventes » servira dans toutes les exploitations suivantes

C	D	E	F
clb	frvb	nbrv	
	=cumulativ	=cla+clb	
1.	0.	0.	0.
2.	0.	0.	0.
3.	0.	0.	0.
4.	0.	0.	0.
5.	1.	0.2	1.

E nbrv:=cla+clb

a. L'évènement « un seul des deux clients conclut l'achat » (question 2)

L'évènement « un seul des deux clients conclut l'achat » est réalisé si et seulement si le nombre de ventes est égal à 1.

La colonne F, nommée **unseul**, sélectionne à l'aide d'une instruction conditionnelle (fonction when) les cas où la tournée s'est soldée par une vente exactement.

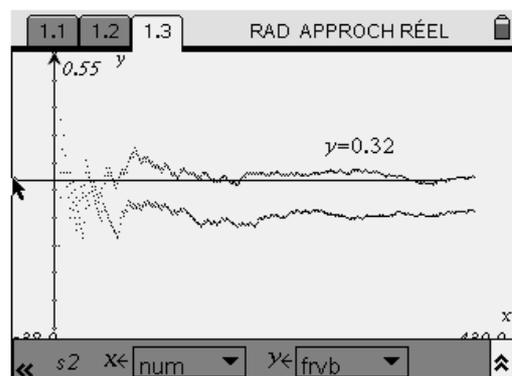
D	E	F	G
frvb	nbrv	unseul	
=cumulativ	=cla+clb	=seq(when	
1.	1.	1.	1.
2.	0.5	0.	0.
3.	0.3333	0.	0.
4.	0.25	0.	0.
5.	0.2	1.	1.

F unseul:=seq(when(nbrv[i]=1,1,0),i,1,nn)

La colonne G, nommée **frun**, calcule la fréquence des réalisations de l'évènement « un seul des deux clients conclut l'achat » au cours des tournées déjà effectuées.

	D frvb	E nbrv	F unseul	G frun
	=cumulativ	=cla+clb	=seq(whe	=cumulativ
1.	1.	1.	1.	1.
2.	0.5	0.	0.	0.5
3.	0.3333	0.	0.	0.3333
4.	0.25	0.	0.	0.25
G	frun:= $\frac{\text{cumulativesum}(\text{unseul})}{\text{num}}$			

Un détour par la page **Graphiques & géométrie** permet une représentation graphique de la fréquence de ces réalisations.



Un autre détour par la page **Calculs** estime comme précédemment la probabilité de l'évènement « un seul des deux clients conclut l'achat ».

$frvb[nn] + \frac{1}{\sqrt{nn}}$	0.345	comm 11/11
$frun[nn] - \frac{1}{\sqrt{nn}}$	0.275	For i,1,n
$frun[nn] + \frac{1}{\sqrt{nn}}$	0.375	when(rand())<
		If cla[i]=0 Th
		when(rand())<
		Else
		when(rand())<
		EndIf
		EndFor
		EndPrgm

b. Fréquences des nombres de ventes quotidiens

Sans quitter la page **Calculs**, la suite définie par :

$\text{seq}(\text{countIf}(\text{nbrv}, i), i, 0, 2)$ indique pour $i = 0, 1, 2$ les nombres de tournées qui se sont conclues par aucune, une, ou deux ventes.

En divisant par **nn**, on obtient les fréquences des tournées qui, respectivement, se sont soldées par aucune, une, ou deux ventes.

$frun[nn] + \frac{1}{\sqrt{nn}}$	0.375	comm 11/11
$\text{seq}(\text{countIf}(\text{nbrv}, i), i, 0, 2)$	{ 236.,130.,34. }	For i,1,n
$\frac{\{ 236.,130.,34. \}}{nn}$	{ 0.59,0.325,0.085 }	when(rand())<
		If cla[i]=0 Th
		when(rand())<
		Else
		when(rand())<
		EndIf
		EndFor
		EndPrgm

c. Moyenne² des gains quotidiens

Le gain de la journée est proportionnel au nombre de ventes, chaque vente rapportant 75 € au commercial.

Le gain moyen réalisé au bout des 400 tournées s'obtient en calculant $\frac{75 \cdot \text{sum}(nbrv)}{nn}$. Le pourcentage de commission qu'il aurait fallu appliquer pour obtenir lors de cette série de tournées s'obtient en calculant $\frac{100 \cdot 60 \cdot nn}{500 \cdot \text{sum}(nbrv)}$. Sur cet exemple, le commercial a réalisé un gain moyen de 37,13 € par tournée, et il aurait fallu qu'il applique un pourcentage de l'ordre de 25 % pour assurer un gain moyen de 60 €.

Program	Input	Output
seq(countIf(nbrv,i),i,0,2)		{ 236.,130.,34. }
$\frac{75 \cdot \text{sum}(nbrv)}{nn}$		37.13
$\frac{100 \cdot 60 \cdot nn}{500 \cdot \text{sum}(nbrv)}$		24.24

On obtient une nouvelle série de tournées en relançant le programme **commercial** puis en recalculant ($\text{ctrl} \text{R}$) la feuille du tableur.

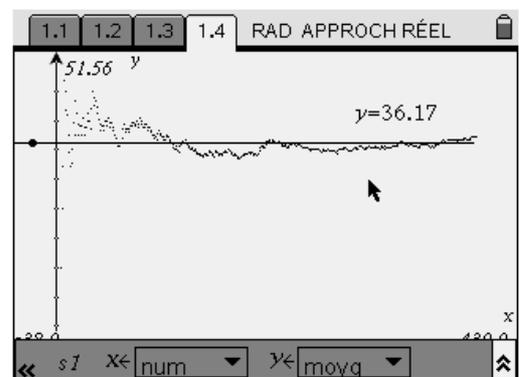
Program	Input	Output
seq(countIf(nbrv,i),i,0,2)		{ 0.56,0.3475,0.0925 }
$\frac{75 \cdot \text{sum}(nbrv)}{nn}$		39.94
$\frac{100 \cdot 60 \cdot nn}{500 \cdot \text{sum}(nbrv)}$		22.54

Pour étudier la moyenne des gains, une autre option serait de faire un détour par la page **Tableur & listes**. La liste affichant la moyenne des gains obtenus lors des tournées déjà effectuées est générée à l'aide de formule :

« $\frac{75 \cdot \text{cumulativeSum}(nbrv)}{\text{num}}$ » dans la ligne de saisie de la colonne H, nommé **moyg**.

	E nbrv	F unseul	G frun	H moyg
	=cla+clb	=seq(wher	=cumulativ	=75*cumul
1.	0.	0.	0.	0.
2.	0.	0.	0.	0.
3.	0.	0.	0.	0.
4.	0.	0.	0.	0.
H	$\text{moyg} := \frac{75 \cdot \text{cumulativeSum}(nbrv)}{\text{num}}$			

Une représentation graphique de la série **moyg** dans une nouvelle page **Graphiques & géométrie** donne dans ce cas une idée de l'évolution de cette moyenne au cours des tournées.



² La variable aléatoire « gain quotidien » prend les valeurs 0, 75 et 150 avec respectivement les probabilités 0,5625, 0,3375 et 0,1. Son espérance est égale à 40,3125. Le commercial peut espérer une commission de l'ordre de 40 €.

5. Conclusion

L'élaboration d'une telle simulation amène à « *utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice, mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme* », compétence visée explicitement³ par le programme de statistiques et probabilités des classes de lycée.

Son utilisation peut être envisagée à deux moments de l'exercice :

- *Avant* sa résolution, à titre d'expérimentation, pour susciter des conjectures : faire établir des fourchettes, à l'intérieur desquelles les probabilités demandées aux questions **1** et **2** doivent probablement se trouver, estimer le gain moyen que le commercial peut réaliser.
- *Après* sa résolution pour contrôler les résultats de l'étude théorique. Les élèves confrontent leurs propres résultats à ceux issus de la simulation et, le cas échéant, les remettent en question. La simulation fournit également l'occasion de vérifier le fait que « les distributions des fréquences sur des échantillons de taille n se rapprochent de la probabilité quand n devient grand », conformément aux directives du programme, dans un cas où le calcul de la probabilité n'est pas immédiat.

³ Cf programme de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009