EP093 - 2008: Triangle inscrit dans une courbe donnée

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP093_2008_TriangleInscrit_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 093 de l'épreuve pratique 2008 – Triangle inscrit dans une courbe donnée

Enoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On appelle $\mathcal{E}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

On désigne par a, b et c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B et C les points de $\mathcal{E}$ d'abscisses respectives a, b et c. Le point H est l'orthocentre du triangle. On appelle $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est le point E. Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.

Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point H.

1.

a) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

b) Faire varier a, b, c et émettre une ou deux conjectures concernant la position du point H, la position du point D.

c) À l'aide de manipulations appropriées, émettre une conjecture sur les ordonnées des points D et H en fonction de a, b, c, puis sur l'abscisse de H.

2. Démontrer la conjecture émise sur les coordonnées du point H.

3. Proposer une démarche permettant de démontrer la (ou les) conjecture(s) faite(s) pour le point D (on ne demande pas de calculs mais uniquement le plan proposé).

Production demandée

- Figure réalisée avec le logiciel de géométrie ;
- Démarche et réponses argumentées pour les questions **2. et 3.**

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
  - Tester une conjecture.
- **Compétences mathématiques**
  - Connaître la notion de produit scalaire et ses propriétés.

2. Corrigé

1) a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Définir la **Fonction** $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, Régler la **Fenêtre** avec **xMin** = –4 et **xMax** = 4 puis choisir **Zoom carré**.

Cacher la ligne de saisie.

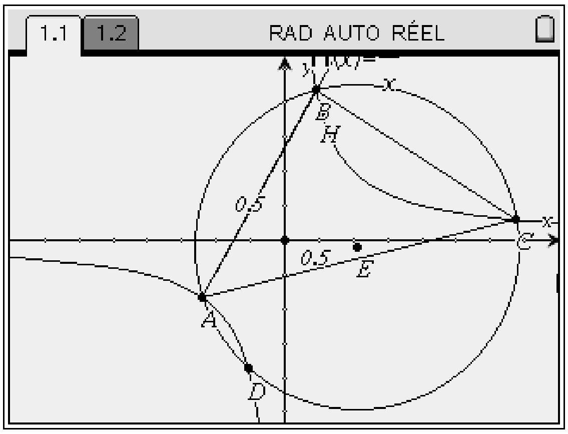
Construire un **Triangle** en plaçant A, B et C sur le graphique précédent (nommer les points au fur et à mesure).

Construire les **Perpendiculaires** à (AB) passant par C et à (AC) passant par B. Construire H **point d'intersection** de ces deux droites puis **Cacher** les droites. (H est l'orthocentre du triangle ABC).

Construire les **Médiatrices** de $[AB]$ et $[AC]$. Construire E **point d'intersection** de ces deux droites puis **Cacher** les droites. (E est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC).

Construire D image de H par la **Symétrie** de centre O origine du repère.

Enfin construire le **Cercle** de centre E passant par A.



1)b) *Conjectures :*

- H semble appartenir à la courbe de la fonction f_1 ;
- D semble appartenir à la courbe de la fonction f_1 mais aussi au cercle circonscrit.

1)c) Sur la figure précédente, faire afficher les **Coordonnées** des points A, B, C et H

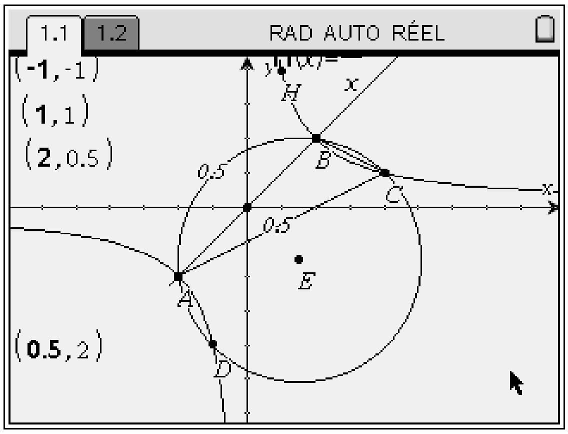
Sur l'écran ci-contre en haut à gauche celles de A, de B et de C et en bas à gauche celles de H.

Modifier les valeurs des abscisses des points A, B et C pour avoir des valeurs entières.

On peut constater après quelques essais que $x_H = \dfrac{-1}{abc}$

et que $y_H = -abc$

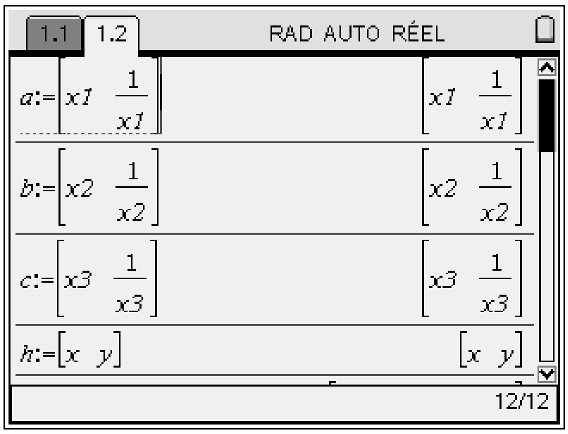
Pour le point D on a $x_D = -x_H$ et $y_D = -y_H$



2) Ouvrir une page **Calculs**

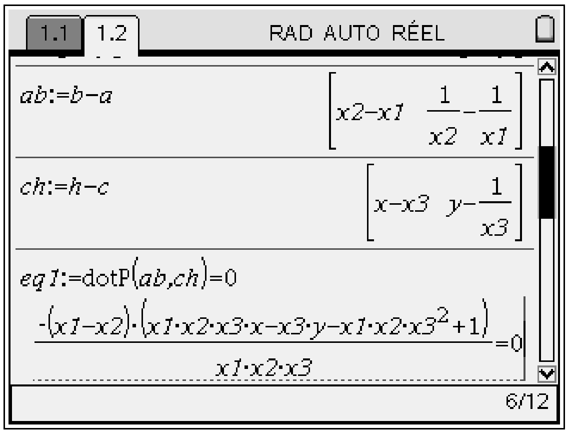
Définir les coordonnées des points A, B et C (pour éviter les confusions de notations on a choisit x_1, x_2 et x_3 comme abscisses respectives de A, B et C).

Définir les coordonnées $(x\ ;y)$ du point H.



Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$
Définir l'équation **eq1** de la hauteur issue de *C*.
Dot P(ab,ch) est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}$

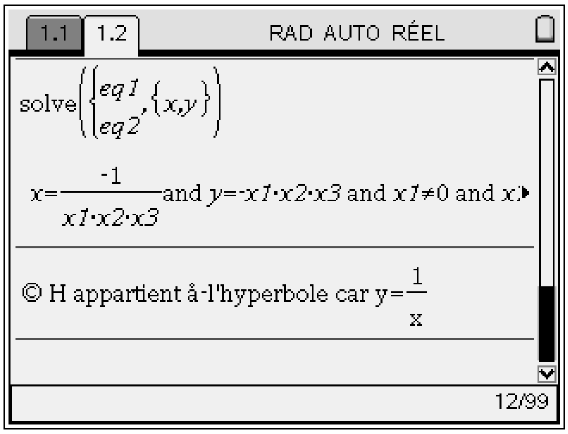
De même calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ et définir l'équation **eq2** de la hauteur issue de *B*.



Résoudre le système formé par **eq1** et **eq2** d'inconnues (x ; y) on obtient ainsi ls coordonnées du point *H*.

Les conjectures faites sur les positions des points *H* et *D* sont donc vérifiées.

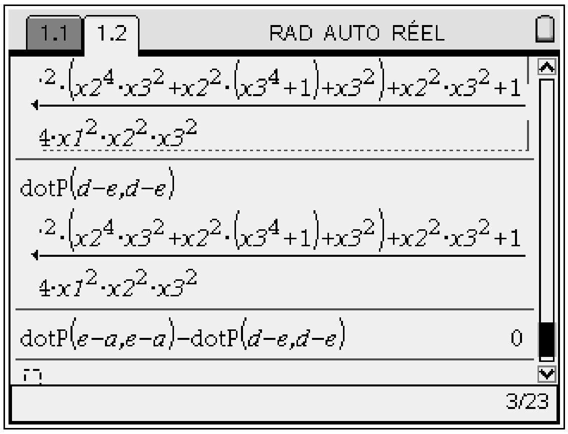
En effet *D* a des coordonnées opposées à celles de *H* donc *D* appartient aussi à l'hyperbole.



3) Pour vérifier la conjecture sur la position du point *D* sur le cercle circonscrit on peut de la même manière définir les équations des médiatrices des côtés [*AB*] et [*AC*] et calculer les coordonnées du point *E*.
Puis calculer les nombres EA^2 et ED^2.

On peut constater que $EA^2 – ED^2 = 0$

Donc *D* est bien sur le cercle circonscrit au triangle *ABC*.



Tous les écrans de ce document sont obtenus à partir de la calculatrice.