

Autour de l'épreuve 2 du CAPES 2009

Auteur : Gilbert JULIA

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7 de la TI-Nspire CAS

Fichiers associés : ep2_2009.tns, thlucas.tns

Ce document propose une résolution, assistée par calculatrice, de certaines questions de la deuxième épreuve du CAPES 2009 de Mathématiques. Des quatre parties du sujet, les extraits présentés ci-dessous retiennent uniquement les thèmes qui paraissent pouvoir bénéficier d'un travail d'appoint sur la calculatrice TI-Nspire CAS.

Le lecteur est invité à prendre connaissance de l'intégralité de l'épreuve sur le site du CAPES de Mathématiques http://capes-math.org/2009/ep2_2009.pdf

Il ne s'agit pas d'un corrigé type. Ce document alterne quelques éléments de correction, envisageables en situation de concours, et des travaux d'approfondissement des notions abordées (figures d'étude, figures de synthèse,...), exploitables sur un plus long terme.

1. Extraits du sujet : Racines d'un polynôme à coefficients complexes, racines de son polynôme dérivé. Théorème de Lucas.

D'après les parties A et B : un exemple numérique

N.B. L'objectif de ces deux premières parties est de déterminer un majorant des modules des racines d'un polynôme unitaire $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ à coefficients complexes.

La partie A montre que le nombre : $R = \max\{|a_0| ; 1+|a_1| ; 1+|a_2|, \dots, 1+|a_{n-1}|\}$ est un tel majorant. La partie B montre que l'unique solution $\rho(P)$ réelle strictement positive de l'équation d'inconnue x : $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = x^n$, dite « borne de Cauchy », en est un autre.

A1. Un exemple numérique

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i$, $a_1 = -3 - 5i$, $a_2 = -2 + 3i$ et on définit le polynôme $p(X)$ par : $p(X) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$.

1.1. Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

1.2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

1.3. Vérifier que les images M_1 , M_2 , M_3 des racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \max\{|a_0| ; 1+|a_1| ; 1+|a_2|\}$

...

B3.4. Soit $(\zeta_i)_{i=1,2,3}$ les trois racines du polynôme p défini ci-dessus, avec $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq |\zeta_3|$. Déterminer, à la calculatrice, une valeur approchée de la borne de Cauchy $\rho(P)$ de ce polynôme et vérifier pour ce polynôme que : $(\sqrt[3]{2} - 1)\rho(P) \leq |\zeta_3| \leq \rho(P)$ (N.B. Résultats des questions B3.2 et B.3.3c).

Partie C : Théorème de Lucas

...

2. Théorème de Lucas

Soit $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients complexes et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé.

Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in \{1 ; 2 ; \dots ; m\}$.

2.1. Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$: $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$.

2.2. Soit r une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Montrer que : $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$ et

en déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2, \dots, M_m d'affixes respectives r_1, r_2, \dots, r_m .

2.3. Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*).

2.4. Illustrer ce résultat pour le polynôme p défini par : $p(X) = X^3 - (2 - 3i)X^2 - (3 + 5i)X + 6 - 2i$.

Partie D : Théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose, dans cette partie, de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour les polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit f un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients complexes. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

- Des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral.
- Du centre du cercle inscrit dans le triangle s'il est équilatéral.

1. Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts.

On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1.1. Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω .

1.2. Conclure.

2. Une propriété de la tangente à l'ellipse

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$.

On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axis focal a l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$.

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t)$ appartenant à (E), on note

$\vec{\tau}(t) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F})$ un vecteur directeur de la tangente à (E) en $M(t)$ et on pose :

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{M(t)F} \overrightarrow{M(t)F} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) = \frac{1}{M(t)F'} \overrightarrow{M(t)F'}.$$

2.1. Montrer que : $\frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F'})$.

2.2. Montrer que le produit scalaire $(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))\vec{\tau}(t)$ est nul.

2.3. En déduire que la tangente à (E) en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F); (M(t)F'))$.

3. Un théorème de Poncelet

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse (E) (c'est-à-dire un point P tel que $PF + PF' > 2a$). On admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à (E) et on note T_1 et T_2 les points de tangence.

3.1. Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1) . Montrer que $F'F_1 = 2a$.

3.2. On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2) . Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

3.3. On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1); (PF))$ et $((PF'); (PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note S_D la réflexion d'axe D .

3.3.a) Déterminer $S_{PF} \circ S_{PT_1}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{PF} \circ S_{PT_1}$.

3.3.b) Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{PT_2} \circ S_{PF'}$ et conclure.

4. Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts.

On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral. On note w et w' (avec $w \neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w' .

4.1. Justifier qu'il existe une ellipse (E) de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1M_2]$.

4.2.a) Montrer que, dans $\mathbb{C}[X]$, on a l'égalité :

$$3(X - w)(X - w') = (X - r_1)(X - r_2) + (X - r_2)(X - r_3) + (X - r_3)(X - r_1).$$

4.2.b) En déduire que : $12 \frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \frac{r_1 + r_2}{2}}$ puis que la droite (M_1M_2) est tangente à (E).

4.3.a) Montrer que : $\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3 \frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}$.

4.3.b) En déduire que (M_1M_3) est la deuxième tangente à (E) issue de M_1 .

4.4. Conclure.

5. Illustration du théorème de Lucas

Question non posée dans le sujet original.

Illustrer le théorème de Lucas en construisant l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux lorsque f est le polynôme p étudié au début du problème.

2. Eléments de correction de l'exemple numérique des parties A et B

A1. Ouvrir une page **Calculs**. Définir le polynôme p .

1.1. Montrer que p a une racine réelle revient à chercher s'il existe un nombre réel z qui annule en même temps la partie réelle et la partie imaginaire de $p(z)$, ce qu'accomplit le nombre réel 2.

1.2. Une factorisation de p sans spécification de variable fait apparaître en facteur le polynôme en question (le logiciel ne recherche pas de racine complexe).

Si on spécifie la variable, le logiciel pousse la factorisation plus loin et fait apparaître les deux autres racines. cFactor ($\text{menu } 3 \text{ A } 2$) produirait le même affichage.

1.3. L'outil cZeros ($\text{menu } 3 \text{ A } 3$) du menu **Algèbre**

Complex explicite la liste des trois racines du polynôme p . Cette liste est stockée en variable **rc**.

Le plus grand des modules des racines de p est $\sqrt{5}$. Il s'agit du module de la racine $\zeta_3 = 1 - 2i$.

```

1.1 RAD AUTO RÉEL
Define p(z)=z^3-(2-3·i)·z^2-(3+5·i)·z+6-2·i
Terminé
solve({real(p(z))=0, imag(p(z))=0}, z)
z=2
factor(p(z))
(z-2)·(z^2+3·i·z+3+i)
factor(p(z),z)
(z-2)·(z+1+2·i)·(z+1+i)
i?
4/4

```

```

1.1 RAD AUTO RÉEL
solve({real(p(z))=0, imag(p(z))=0}, z)
z=2
factor(p(z))
(z-2)·(z^2+3·i·z+3+i)
factor(p(z),z)
(z-2)·(z+1+2·i)·(z+1+i)
cZeros(p(z),z)→rc
{1-2·i, -1-i, 2}
max(|rc|)
sqrt(5)
i?
1/6

```

L'outil polyCoeffs ($\text{menu } 3 \text{ 6 } 4$) dresse la liste $\{a_2, a_1, a_0\}$ des coefficients de p (dans cet ordre) sans avoir à les ressaisir. La liste $\{1+|a_2|, 1+|a_1|, |a_0|\}$ s'en déduit.

Le nombre R de cette partie de l'énoncé est égal à $\sqrt{34} + 1$.

On vérifie que $|\zeta_3|$ est plus petit que la borne R .

```

1.1 RAD AUTO RÉEL
polyCoeffs(p(z)-z^3-z)
{-2+3·i, -3-5·i, 6-2·i}
{1, 1, 0}+{-2+3·i, -3-5·i, 6-2·i}
{sqrt(13)+1, sqrt(34)+1, 2·sqrt(10)}
max({sqrt(13)+1, sqrt(34)+1, 2·sqrt(10)}) sqrt(34)+1
sqrt(5) < sqrt(34)+1
true
i?
4/10

```

B3.4. Inversement, l'outil polyEval (disponible dans le catalogue) affecte les éléments d'une liste aux coefficients d'un polynôme. Il permet de construire le polynôme $|2-3i|x^2 + |3+5i|x + |6-2i|$ sans avoir à ressaisir ses coefficients.

La résolution numérique ($\text{menu } 3 \text{ 5}$) de l'équation $x^3 = |2-3i|x^2 + |3+5i|x + |6-2i|$ donne pour borne de Cauchy : $\rho(p) \approx 5,02$ à 0,01 près par excès. Elle est inférieure à la borne $R = 1 + \sqrt{34}$ obtenue précédemment.

```

1.1 RAD AUTO RÉEL
|cf|
{sqrt(13), sqrt(34), 2·sqrt(10)}
polyEval(|cf|, x)
sqrt(13)·x^2+sqrt(34)·x+2·sqrt(10)
nSolve(x^3=sqrt(13)·x^2+sqrt(34)·x+2·sqrt(10), x)→b
5.01855
(sqrt(2)-1)·b-sqrt(5)
-0.931642
i?
18/99

```

Nous avons vu que $|\zeta_3| = \sqrt{5}$, les modules des autres racines étant $|\zeta_2| = 2$ et $|\zeta_1| = |-1-i| = \sqrt{2}$.

D'une part, $|\zeta_3| < 5$ alors que $\rho(p) > 5$. D'autre part, le calcul de $(\sqrt[3]{2}-1)\rho(p) - \sqrt{5}$ donne un résultat strictement négatif. La double inégalité $(\sqrt[3]{2}-1)\rho(P) \leq |\zeta_3| \leq \rho(P)$ est vérifiée.

3. Éléments de correction de la partie C

2. Théorème de Lucas

2.1. La formule de dérivation d'un produit appliquée à la fonction polynôme $z \mapsto f(z) = \prod_{j=1}^m (z - r_j)^{\alpha_j}$ donne :

$$z \mapsto f'(z) = \sum_{j=1}^m \left[\alpha_j (z - r_j)^{\alpha_j - 1} \left(\prod_{k \neq j} (z - r_k)^{\alpha_k} \right) \right].$$

Lorsque z est distinct des racines de p : $f'(z) = f(z) \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$

2.2. Si r est distinct de tous les nombres r_j et si $f'(r) = 0$, le quotient $\frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{r - r_j}$ est défini et égal à

zéro. Par conjugaison : $\overline{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{r - r_j}} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\overline{r - r_j}} = 0$. Mais pour chaque indice j : $\frac{1}{\overline{r - r_j}} = \frac{r - r_j}{|r - r_j|^2}$. On obtient :

$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$. Géométriquement, si R est le point d'affixe r , ce point apparaît comme barycentre

des points M_j affectés des coefficients strictement positifs $\frac{\alpha_j}{RM_j^2}$.

2.3. Les points qui sont les images des racines du polynôme dérivé sont ou bien certains des points M_i eux-mêmes (dans le cas de racines multiples) ou bien des points du type R , strictement intérieurs à l'enveloppe convexe des images des racines de f . Ils sont tous dans l'enveloppe convexe de ces points-là.

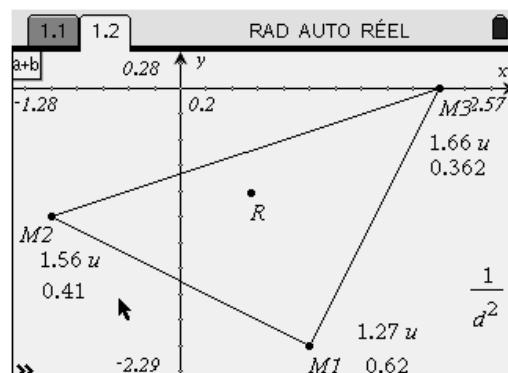
2.4. Le polynôme p admet trois racines simples : $r_1 = 1 - 2i$; $r_2 = -1 - i$; $r_3 = 2$, affixes des points M_1, M_2 et M_3 . Son polynôme dérivé est un polynôme de degré 2 qui admet deux racines, toutes deux distinctes de r_1, r_2 et r_3 .

Nous nous proposons de réaliser une première figure destinée à conjecturer qu'il existe à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$ deux points R qui sont barycentres des points M_j ($j = 1, 2, 3$) affectés des coefficients

$\frac{1}{RM_j^2}$, c'est-à-dire qui vérifient la relation vectorielle : $\frac{1}{RM_1^2} \overrightarrow{RM_1} + \frac{1}{RM_2^2} \overrightarrow{RM_2} + \frac{1}{RM_3^2} \overrightarrow{RM_3} = \vec{0}$.

• Figure d'étude

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**. Placer les images M_1, M_2, M_3 des racines de p . Créer un point libre R . Mesurer pour $i = 1, 2, 3$ la distance d_i de R au point M_i puis calculer l'inverse du carré de cette distance. A cet effet, éditer le texte $\frac{1}{d^2}$ ($\text{menu } 1 \text{ } 6$) et calculer l'expression ($\text{menu } 1 \text{ } 8$) en sélectionnant pour d , tour à tour, chacune des mesures.



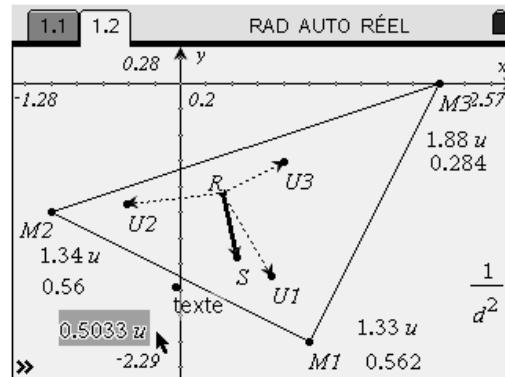
Construire dans chaque cas l'image U_i du point M_i par l'homothétie ($\text{menu } \textcircled{A} \textcircled{5}$) de centre R et de rapport $\frac{1}{d_i^2}$.

Définir les vecteurs $\overrightarrow{RU_i}$ puis le vecteur $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RU_1} + \overrightarrow{RU_2} + \overrightarrow{RU_3}$, par exemple en construisant le translate de U_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU_2}$ puis le translate ($\text{menu } \textcircled{A} \textcircled{3}$) de ce point par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU_3}$.

Par construction, ce vecteur est le vecteur

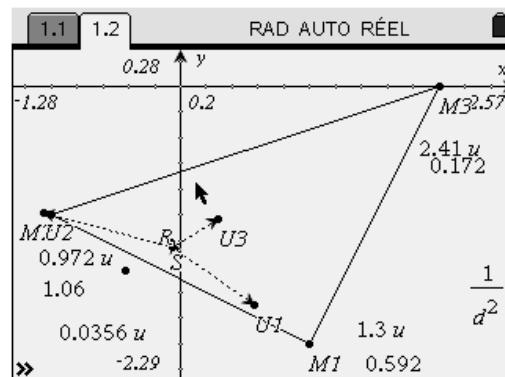
$$\frac{1}{RM_1^2} \overrightarrow{RM}_1 + \frac{1}{RM_2^2} \overrightarrow{RM}_2 + \frac{1}{RM_3^2} \overrightarrow{RM}_3.$$

Afficher la norme du vecteur \overrightarrow{RS} (sur l'écran ci-contre : 0.5033).



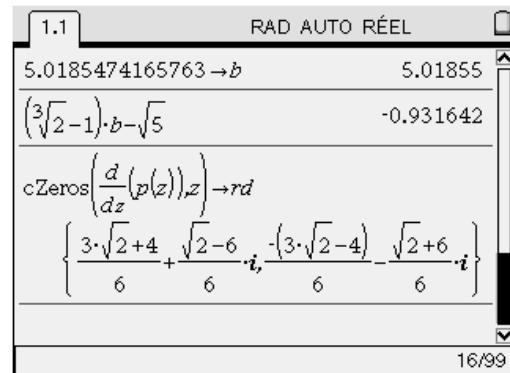
En déplaçant le point R dans le triangle $M_1M_2M_3$, chercher empiriquement à annuler la norme du vecteur \overrightarrow{RS} .

Nous pouvons conjecturer qu'il existe deux positions de R qui réalisent l'annulation. Voici à peu près l'une des deux positions (le vecteur \overrightarrow{RS} n'a plus pour norme que 0,0356).



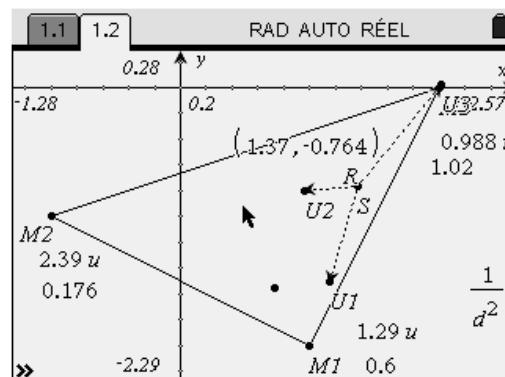
Une deuxième figure, *a posteriori*, a maintenant pour objectif de vérifier que les images des racines du polynôme dérivé sont bien les points conjecturés.

Revenir à la première page **Calculs** et calculer, à l'aide de l'outil **cZeros**, la liste des racines du polynôme dérivé de p . Stocker cette liste en variable **rd**.



Dans la page **Graphiques & géométrie**, afficher les coordonnées du point libre R . Les remplacer respectivement par la partie réelle et la partie imaginaire de l'une des racines du polynôme dérivé : **real(rd[1])** et **imag(rd[1])**.

R et S sont maintenant des points confondus, la norme du vecteur \overrightarrow{RS} « disparaît » de l'écran, signe que ce vecteur est bien le vecteur nul. Même constat avec l'autre racine.



4. Éléments de correction de la partie D

1. Etude du cas où $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Ouvrir une nouvelle **Activité** et une page **Calculs**. Définir le polynôme f . Les coefficients du polynôme dérivé sont stockés dans la liste c à l'aide d'une commande du menu **Algèbre Outils Polynômes** ($\text{menu} \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4$).

Dans l'hypothèse où un polynôme du deuxième degré $ax^2 + bx + c$ admet une racine double, celle-ci est égale au nombre « $-\frac{b}{2a}$ ». Dans le cas du polynôme dérivé de f , ce

nombre complexe coïncide avec $\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ qui n'est autre que l'affixe du centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

Cette racine double a lieu lorsque le discriminant du polynôme dérivé est nul.

Il est alors possible d'exprimer r_1 en fonction de r_2 et r_3 , expression que la calculatrice affiche avec l'outil **cZeros**. Nous obtenons une liste de deux expressions possibles, qui est stockée dans la variable **u**.

```

RAD AUTO RÉEL
Define f(x)=(x-r1)·(x-r2)·(x-r3) Terminé
polyCoeffs(d/dx(f(x)))→c
{3,-2·(r1+r2+r3),r1·(r2+r3)+r2·r3}
-c[2] r1+r2+r3
2·c[1] 3
| 3/99

```

```

RAD AUTO RÉEL
{3,-2·(r1+r2+r3),r1·(r2+r3)+r2·r3}
-c[2] r1+r2+r3
2·c[1] 3
cZeros(c[2]^2-4·c[1]·c[3],r1)→u
{r2·(1+√3·i)-r3·(-1+√3·i), -(r2·(-1+√3·i)
2 2
| 4/99

```

```

RAD AUTO RÉEL
u-r2 {1+√3 2 ·i, 1-√3 2 ·i}
u-r3 {1 2 + √3 2 ·i, 1 2 - √3 2 ·i} Polar
{1 2 + √3 2 ·i, 1 2 - √3 2 ·i} {i·π e 3 , -i·π e 3 }
| 6/99

```

Le calcul de $\frac{u - r_2}{u - r_3}$ affiche une liste contenant les formes

algébriques de $\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ et de $\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$ comme le confirme une conversion en coordonnées polaires ($\text{menu} \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 6$).

Lorsque le point M_1 a pour affixe l'une ou l'autre des valeurs r_1 trouvées, alors

$$\frac{M_2 M_1}{M_3 M_1} = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 M_2}\right) = \pm \frac{\pi}{3} \text{ mod } 2\pi.$$

Le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle et a un angle de mesure $\pm \frac{\pi}{3}$: il est équilatéral.

Réciproquement, si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral, r_1 s'exprime en fonction de r_2 et de r_3 selon l'une ou l'autre des expressions ci-dessus (selon son orientation). Le discriminant du polynôme dérivé est alors égal à zéro, ce polynôme a une racine double. Le calcul de cette racine double effectué plus haut reste d'actualité, il donne la même affixe que celle du centre de gravité du triangle.

2. Une propriété de la tangente à l'ellipse

• Réalisation d'une figure d'étude

Ouvrir une nouvelle **Activité** et une page **Graphiques & géométrie**. Vérifier que le mode Radian est activé.

Placer deux points A et F sur l'axe Ox de sorte que A, F, O soient alignés dans cet ordre. Construire le symétrique F' de F par rapport au point O .

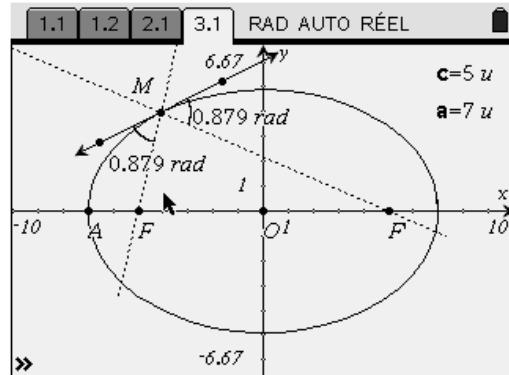
Mesurer les distances OF et OA et les stocker respectivement dans les variables **c** et **a**.

L'ellipse (E) de foyers F et F' et de demi grand axe $[OA]$ est obtenue comme courbe paramétrée (**menu** **3** **2**) à l'aide des

formules :
$$\begin{cases} x_1(t) = a \cdot \cos(t) \\ y_1(t) = \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sin(t) \end{cases}$$

Le point M étant choisi sur l'ellipse, construire la tangente en M (**menu** **6** **7**). Les angles géométriques que détermine la tangente avec (MF) d'une part, et (MF') d'autre part, sont mesurés l'un après l'autre.

Déplaçons M sur l'ellipse : les mesures des deux angles paraissent rester égales, ce qui permet de conjecturer que les angles de droites sont égaux.



• Au tour des démonstrations

2.1. $\overrightarrow{M(t)F'}$ et $\overrightarrow{M(t)F}$ diffèrent d'un vecteur constant : $\overrightarrow{M(t)F'} = \overrightarrow{M(t)F} + \overrightarrow{FF'}$. Leurs vecteurs dérivés sont donc égaux.

2.2. On part de la relation : $M(t)F = \sqrt{\overrightarrow{M(t)F} \cdot \overrightarrow{M(t)F}}$ que l'on dérive :

$$\frac{d}{dt}(M(t)F) = \frac{\vec{\tau}(t) \cdot \overrightarrow{M(t)F}}{M(t)F}. \text{ Soit } \frac{d}{dt}(M(t)F) = \vec{\tau}(t) \cdot \vec{u}(t).$$

$$\text{De même : } \frac{d}{dt}(M(t)F') = \frac{\vec{\tau}(t) \cdot \overrightarrow{M(t)F'}}{M(t)F'} = \vec{\tau}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Puisque $M(t)F + M(t)F'$ est une constante : $\frac{d}{dt}(M(t)F) + \frac{d}{dt}(M(t)F')$ est égal à zéro pour tout t ce qui donne : $\vec{\tau}(t) \cdot (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = 0$ pour tout t .

2.3. Les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont tous deux des vecteurs unitaires, et ils sont directeurs respectivement de la droite $(M(t)F)$ et de la droite $(M(t)F')$.

Il s'agit de deux vecteurs de même norme, leur somme dirige donc une bissectrice de la paire de droites $((M(t)F); (M(t)F'))$ et, plus précisément, la bissectrice de la paire de demi-droites $([M(t)F]; [M(t)F'])$ (demi-droites d'origine $M(t)$ dirigées respectivement par $\vec{u}(t)$ et par $\vec{v}(t)$). Cette bissectrice est la bissectrice intérieure de l'angle de sommet M du triangle FMF' .

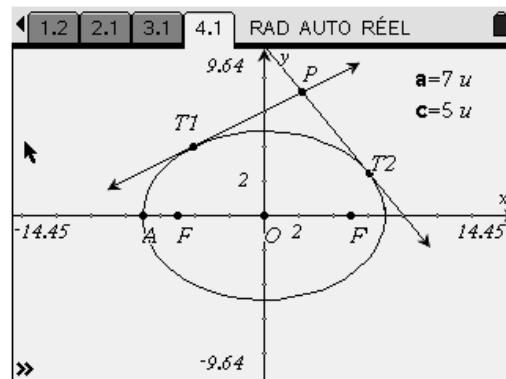
Puisque $\vec{\tau}(t)$ est orthogonal à cette somme, il dirige l'autre bissectrice de la paire de droites. Cette bissectrice est la bissectrice extérieure de l'angle de sommet M du triangle FMF' .

3. Un théorème de Poncelet

- *Réalisation d'une figure d'étude*

Ouvrir une nouvelle **Activité** et une page **Graphiques & géométrie**. Construire l'ellipse comme dans l'activité précédente. (On peut sélectionner l'application précédente ($\text{ctrl } \text{K}$ ou $\text{ctrl } \text{G} \text{ (5) } \text{ (3)}$) et effectuer un « copié-collé » dans la nouvelle activité).

Les points T_1 et T_2 sont choisis sur l'ellipse. Le point P est défini comme étant le point d'intersection des tangentes à l'ellipse en T_1 et en T_2 .

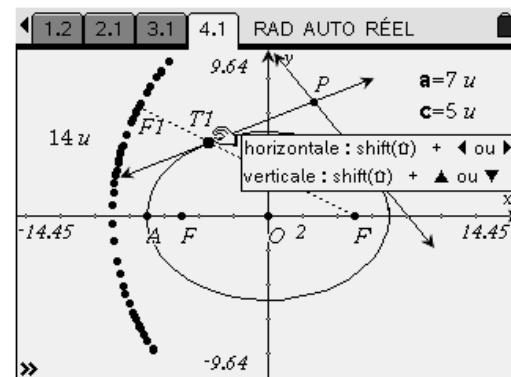


Construire l'image F_1 de F par la réflexion d'axe (PT_1) . Créer puis mesurer le segment $[F'F_1]$.

- *Conjectures pour la question 3.1*

Les points F_1 , T_1 et F' semblent être alignés dans cet ordre.

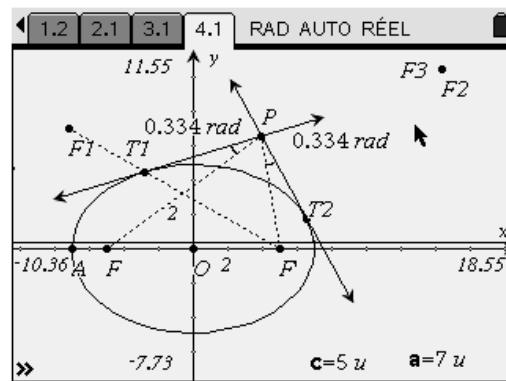
Déplaçons le point T_1 sur l'ellipse : la longueur du segment $[F'F_1]$ semble être toujours égale à $2a$. L'activation de la trace géométrique ($\text{menu } \text{ (5) } \text{ (4)}$) à propos de F_1 laisse conjecturer qu'en effet, lorsque T_1 décrit l'ellipse, le point F_1 se déplace sur un cercle de centre F' .



- *Conjectures pour les questions 3.2 et 3.3*

Construire l'image F_2 de F par la réflexion d'axe (PT_2) . Si les conjectures précédentes sont exactes, les points F_2 et T_2 ont les mêmes propriétés que F_1 et T_1 , correspondant simplement à une autre position sur l'ellipse du point de contact. F' devrait être équidistant de F_1 et de F_2 . La construction du symétrique F_3 de F_1 par rapport à (PF) laisse conjecturer que F_3 est en effet confondu avec F_2 .

Mesurer les angles $\hat{T_1PF}$ et $\hat{FPT_2}$ dont on peut conjecturer l'égalité.



- *Au tour des démonstrations*

3.1. Puisque T_1 appartient à l'ellipse : $T_1F + T_1F' = 2a$.

Puisque (PT_1) est bissectrice extérieure de $\hat{FT_1F'}$, la réflexion S_{PT_1} transforme la demi-droite $[T_1F)$ en la demi-droite de support (T_1F') et d'extrémité T_1 ne contenant pas F' . F_1 est donc sur cette demi-droite. Les points F_1 , T_1 et F' sont alignés dans cet ordre. Il en résulte que : $F_1F' = F_1T_1 + T_1F' = 2a$.

Une réflexion conservant la distance : $T_1F_1 = T_1F$. En conséquence : $F_1F' = T_1F + T_1F' = 2a$

3.2. La même propriété concerne au même titre le point F_2 : $F_2F' = T_2F + T_2F' = 2a$. Les points P et F' sont distincts, puisque l'un est intérieur et l'autre extérieur à l'ellipse. Tous deux équidistants de F_1 et F_2 , ils déterminent la médiatrice de $[F_1F_2]$, il s'agit de la droite (PF') .

3.3.a) Par chacune des deux réflexions de la composée $S_{PF} \circ S_{PT_1}$, le point F_1 a, successivement, pour image F puis F' lui-même. La composée est une rotation (composée de deux réflexions d'axes sécants), de centre P (point d'intersection des deux axes) et d'angle le double de l'angle des droites $((PT_1); (PF))$.

3.3.b) Par la composée $S_{PT_2} \circ S_{PF'}$, le point F_1 a, successivement, pour image F_2 du fait que (PF') est médiatrice de $[F_1F_2]$ puis le point F . Cette composée est la même rotation que la précédente puisqu'elle a le même centre P et qu'elle envoie F_1 , point distinct du centre, sur le même point. Son angle s'exprime comme étant cette fois le double de l'angle des droites $((PF') ; (PT_2))$.

On en déduit : $2((PF') ; (PT_2)) = 2((PT_1) ; (PF')) \bmod 2\pi$ puis : $((PF') ; (PT_2)) = ((PT_1) ; (PF')) \bmod \pi$. Les angles orientés de droites sont égaux. Les paires de droites $\{(PT_1), (PT_2)\}$ et $\{(PF), (PF')\}$ ont les mêmes bissectrices.

4. Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral

4.1. Le milieu T de $[M_1M_2]$ n'appartient pas au segment $[FF']$ (d'après la partie C du problème, les points F et F' sont des barycentres des points M_1 , M_2 et M_3 affectés de coefficients strictement positifs, ils sont donc strictement à l'intérieur du triangle). Donc : $TF + TF' > FF'$. L'ellipse en question est l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = TF + TF'$.

4.2. Dans une page **Calculs** d'une nouvelle **Activité**, définir le polynôme f puis le polynôme, noté g , de la question **4.2.a**.

Sa forme développée est :

$$g(x) = 3x^2 - 2(r_1 + r_2 + r_3)x + r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2 .$$

```

2.1 3.1 4.1 5.1 RAD AUTO RÉEL
Define f(x)=(x-r1)·(x-r2)·(x-r3) Terminé
Define g(x)=(x-r1)·(x-r2)+(x-r2)·(x-r3)+(x-r3)·(x-r1) Terminé
expand(g(x))
3·x²-2·r1·x-2·r2·x-2·r3·x+r1·r2+r1·r3+r2·r3
|
```

3/99

Le polynôme g et le polynôme dérivé de f sont deux polynômes du deuxième degré qui ont les mêmes coefficients, ils sont identiques.

Leur expression factorisée est de la forme $3(X - w)(X - w')$, puisqu'il s'agit d'un polynôme du deuxième degré dont le coefficient de X^2 est égal à 3.

La liste de leurs coefficients est stockée en variable **cd**.

```

2.1 3.1 4.1 5.1 RAD AUTO RÉEL
3·x²-2·r1·x-2·r2·x-2·r3·x+r1·r2+r1·r3+r2·r3
polyCoeffs(g(x))
{3,-2·(r1+r2+r3),r1·(r2+r3)+r2·r3}
polyCoeffs(d/dx(f(x)))→cd
{3,-2·(r1+r2+r3),r1·(r2+r3)+r2·r3}
|
```

6/99

En exploitant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme du deuxième degré, on obtient deux

relations entre les cinq paramètres :

$$\begin{cases} w + w' = \frac{2(r_1 + r_2 + r_3)}{3} \\ w \cdot w' = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1}{3} \end{cases} .$$

Sur la calculatrice, on notera w et v (et non w') les deux racines¹ du polynôme dérivé pour éviter des conflits de variables.

¹ Ces notations v et w seront désormais employées dans les commentaires suivants.

Suivant que l'on considère la somme ou le produit des racines, le nombre r_3 peut s'exprimer de deux façons en fonction des autres paramètres v , w , r_1 et r_2 . On utilise une des deux expressions (en l'occurrence, le produit) pour exprimer r_3 .

Le résultat est stocké dans la variable **r3**.

The screen shows the TI-Nspire CX CAS interface with the following steps:

- polyCoeffs($\frac{d}{dx}(Ax)) \rightarrow cd$
- $\{3,-2\cdot(r_1+r_2+r_3),r_1\cdot(r_2+r_3)+r_2\cdot r_3\}$
- solve($v\cdot w = \frac{cd[3]}{cd[1]}, r_3$)
- $r_3 = \frac{3\cdot v\cdot w - r_1\cdot r_2}{r_1 + r_2}$
- $\frac{3\cdot v\cdot w - r_1\cdot r_2}{r_1 + r_2} \rightarrow r_3$
- $\frac{3\cdot v\cdot w - r_1\cdot r_2}{r_1 + r_2}$

8/99

Puis, à l'aide de l'expression non utilisée (en l'occurrence, la somme), on exprime v en fonction des paramètres w , r_1 et r_2 .

Le résultat est stocké dans la variable **v**.

Il reste maintenant à effectuer les calculs demandés dans les questions **4.2.b** et **4.3.a**.

The screen shows the TI-Nspire CX CAS interface with the following steps:

- solve($v+w = \frac{-cd[2]}{cd[1]}, v$)
- $v = \frac{3\cdot(r_1+r_2)\cdot w - 2\cdot(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)}{3\cdot(2\cdot w - r_1 - r_2)}$
- $\frac{3\cdot(r_1+r_2)\cdot w - 2\cdot(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)}{3\cdot(2\cdot w - r_1 - r_2)} \rightarrow v$
- $\frac{3\cdot(r_1+r_2)\cdot w - 2\cdot(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)}{3\cdot(2\cdot w - r_1 - r_2)}$

2/10

4.2.b) Les nombres $\frac{r_2 - r_1}{v - \frac{r_1 + r_2}{2}}$ et $12 \frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2}$ s'expriment

visiblement d'une même façon.

Ces deux nombres complexes sont égaux. Ils ont donc les mêmes arguments.

The screen shows the TI-Nspire CX CAS interface with the following steps:

- $\frac{r_2 - r_1}{v - \frac{r_1 + r_2}{2}}$
- $\frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2}$
- $12 \cdot \frac{\frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2}$
- $\frac{6 \cdot (2 \cdot w - r_1 - r_2)}{r_1 - r_2}$

14/99

Soit alors T , le milieu du segment $[M_1 M_2]$. L'égalité des arguments s'interprète en termes de mesures d'angles par : $(\overrightarrow{M_2 M_1}, \overrightarrow{TF}) = (\overrightarrow{TF'}, \overrightarrow{M_1 M_2}) \bmod 2\pi$. Les points M_1 , T et M_2 étant alignés dans cet ordre, cette relation s'écrit : $(\overrightarrow{TM_1}, \overrightarrow{TF}) = (\overrightarrow{TF'}, \overrightarrow{TM_2}) \bmod 2\pi$, soit : $(\overrightarrow{TM_1}, \overrightarrow{TF}) = (\overrightarrow{TF'}, \overrightarrow{TM_1}) + \pi \bmod 2\pi$.

La droite $(M_1 M_2)$ est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{TF}, \overrightarrow{TF'})$: il s'agit de la tangente en T à l'ellipse. On sait désormais que $(M_1 M_2)$ est l'une des deux tangentes à l'ellipse issues de M_1 .

4.3. On vérifie que $3 \frac{v - r_1}{r_3 - r_1}$ est identique à $\frac{r_2 - r_1}{w - r_1}$.

Ces deux nombres complexes ont donc aussi les mêmes arguments, ce qui s'interprète géométriquement ainsi : $(\overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 F}) = (\overrightarrow{M_1 F}, \overrightarrow{M_1 M_2}) \bmod 2\pi$.

En tenant compte de la question **3.3**, cette relation angulaire montre que $(M_1 M_3)$ fait avec $(M_1 F)$ le même angle de droites que la deuxième tangente à l'ellipse issue de M_1 : la droite $(M_1 M_3)$ est cette deuxième tangente.

The screen shows the TI-Nspire CX CAS interface with the following steps:

- $\frac{v - r_1}{2}$
- $\frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{2}$
- $12 \cdot \frac{\frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2}$
- $\frac{3 \cdot (v - r_1)}{r_3 - r_1}$
- $\frac{-(r_1 - r_2)}{w - r_1}$

⚠ Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

4.4. Les paramètres r_1 et r_2 sont permutable. Comme en atteste l'écran ci-contre, le calcul de $3 \frac{v-r_2}{r_3-r_2}$ donne un résultat analogue à celui du **4.3.a**.

De ce fait, la droite (M_2M_3) est la deuxième tangente à l'ellipse issue de M_2 . L'ellipse (E) passe par le milieu de $[M_1M_2]$ et est tangente aux trois côtés du triangle.

On montrerait pareillement l'existence d'ellipses de foyers F et F' , tangentes aux trois côtés du triangle, et passant respectivement par le milieu de $[M_2M_3]$ et par le milieu de $[M_3M_1]$. Mais il s'agit d'une seule et même ellipse, puisque il existe (au plus) une ellipse de foyers donnés et tangente à une droite donnée. L'ellipse (E) est tangente au milieu de chacun des trois côtés du triangle.

5. Illustration du théorème de Lucas

[Fichier associé : tlucas.tns]

L'objectif est de construire une figure illustrant le théorème de Lucas et s'actualisant lorsqu'on change le polynôme du troisième degré p considéré.

Soit p un polynôme du troisième degré à coefficients complexes qui admet trois racines distinctes et dont le polynôme dérivé admet deux racines distinctes. On se propose d'associer à ce polynôme un triangle $M_1M_2M_3$ du plan complexe dont les affixes sont les racines de p et de construire l'ellipse tangente en leurs milieux aux côtés de ce triangle.

À cet effet, créer un nouveau classeur. (Le réglage choisi dans ce qui suit est Mode Approché et Flottant 3).

Ouvrir dans ce nouveau classeur une page **Calculs**.

Le programme **lucas()** ci-contre envoie les racines du polynôme courant p dans une liste **r** de 3 éléments, et les racines du polynôme dérivé dans une liste **rd** de 2 éléments. Il fait afficher les deux listes et stocke les parties réelles des cinq nombres listés dans les variables **ax**, **bx**, **cx**, **vx**, **wx** et leurs parties imaginaires dans les variables **ay**, **by**, **cy**, **vy**, **wy**.

Ce programme sera destiné à actualiser les données.

Le polynôme p de l'énoncé est enregistré et le programme **lucas()** exécuté.

Les racines de p s'affichent, de même que les racines du polynôme dérivé (ou tout au moins des valeurs approchées de ces nombres).

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**, placer les points M_1 , M_2 , M_3 , en liant (ctrl menu 7) leurs abscisses respectivement aux variables ax , bx , cx et leurs ordonnées respectivement aux variables ay , by , cy . Placer de même les deux points V et W dont les affixes sont les racines du polynôme dérivé en liant leurs coordonnées aux variables vx , vy , wx , wy correspondantes.

Construire le milieu T du côté $[M_1 M_2]$ et mesurer les distances de ce point aux points V et W . Calculer leur somme $x + y$ (affichage 1.83 en bas de l'écran). Soit s cette somme.

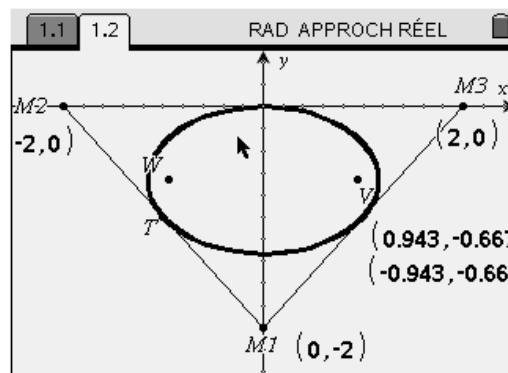
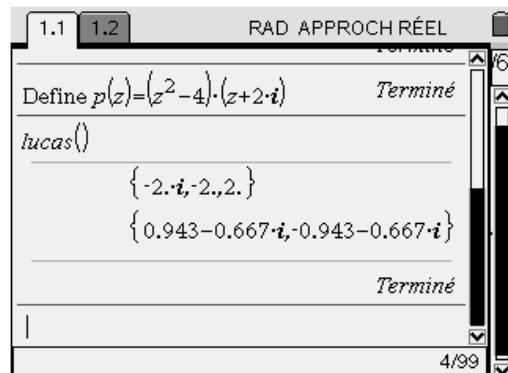
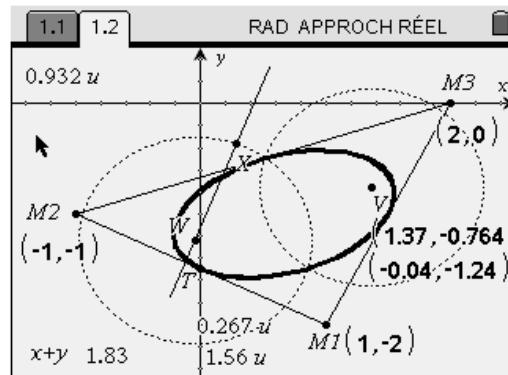
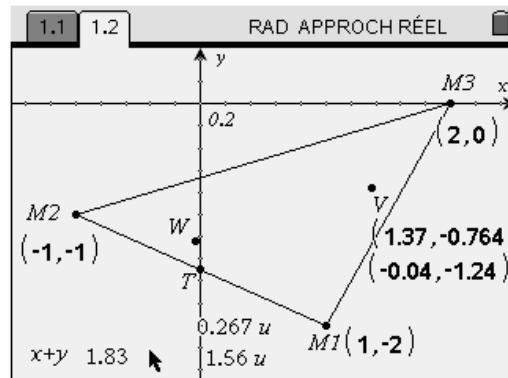
L'ellipse est l'ensemble des points N du plan tels que : $NV + NW = TV + TW = s$.

Tracer à cet effet une droite arbitraire passant par W , y placer un point X , et tracer le cercle de centre W passant par X dont on mesure le rayon r . Calculer la différence $s - r$. Tracer le cercle de centre V et de rayon $s - r$. Construire les deux points d'intersection de ce cercle avec celui de centre W . Utiliser l'outil lieu (menu 9 6) pour obtenir le lieu de chacun de ces deux points d'intersection, le point pilote étant le point X . On obtient en deux temps le tracé de l'ellipse.

• Exemple d'actualisation

Le polynôme p a maintenant pour racines 2 , -2 et $-2i$. Il est saisi dans la page **Calculs**.

Le programme **lucas()** est relancé.



La page **Graphiques & géométrie** présente un nouveau triangle dont les sommets ont pour affixes les racines du nouveau polynôme p , ainsi que son ellipse de Lucas. Les objets intermédiaires ont de plus été cachés.