EP 025 - 2007 : Moyenne arithmétique

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP025_2007_MoyenneArith_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 025 de l'épreuve pratique 2007 – Suite définie par une moyenne arithmétique

Enoncé

On définit la suite u pour tout entier naturel n, $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k-1)$

1. a) À l'aide d'un tableur, afficher les 30 premiers termes de cette suite puis afficher une représentation graphique de ces valeurs.

b) Quelle est l'allure du nuage de points obtenu ? Quelle conjecture peut-on faire ?

2. a) À l'aide du tableur, afficher les 5 premiers termes et une représentation graphique de $v_n = 3u_n$.

b) Proposer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

c) Démontrer par récurrence que l'expression de u_n trouvée en **2.b** est valable pour tout n.

Production attendue

- Réponse écrite aux questions **1.b**, **2.b** et **c**.
- Affichage à l'écran des valeurs et représentations graphiques correspondantes avec contrôle par l'examinateur.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utilisation d'un tableur pour obtenir les termes d'une suite définie par une somme ainsi qu'une représentation graphique.
- **Compétences mathématiques**
  - Résolution d'un système linéaire d'équations ;
  - Démonstration par récurrence.

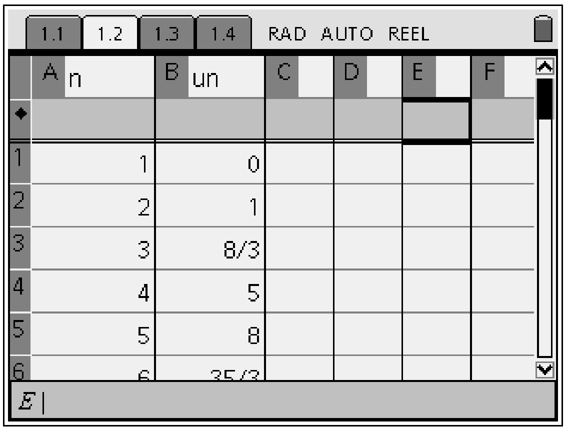
2. Corrigé

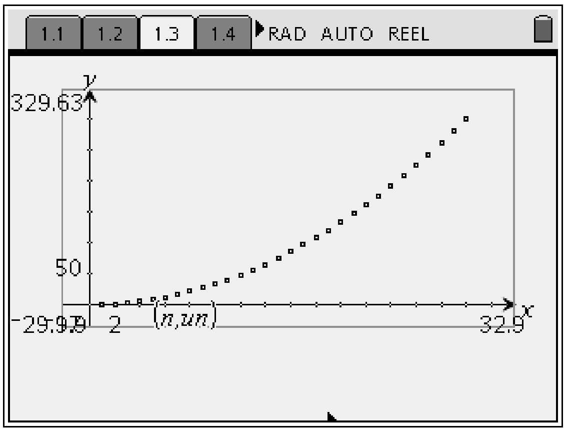
1) a) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Se placer dans la cellule grisée de la colonne **A**.
A l'aide de **Menu**, **Données**, **Générer une suite**, en renseignant **u(n) =** *n*, **Valeurs initiales :** 1, **Nbre max. de termes :** 30, **Valeur maximale :** 30, on obtient les valeurs de *n* de 1 à 30.
Nommer *n* la colonne **A** (en « tête » de colonne).

Inscrire dans la cellule **B1** la formule :
= Σ (k*(k–1), k,1,A1)/A1.

Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **B2** à **B30** et coller la formule.
Nommer *un* la colonne **B** (en « tête » de colonne).





Pour obtenir le nuage de points :

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

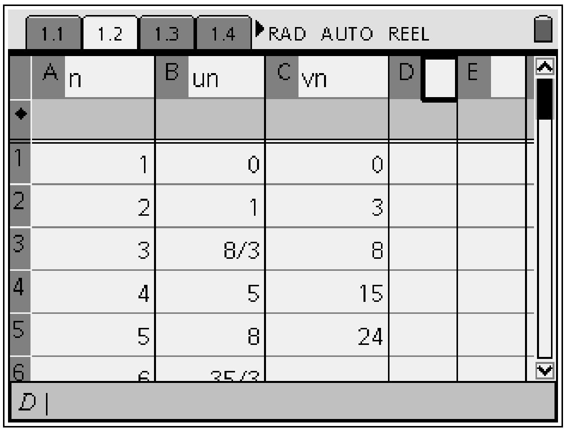
Choisir **Type de graphique**, **Nuage de points**.

Puis associer à x : **n** et à y **: un**.

Enfin choisir dans **Fenêtre**, **Zoom - Données**.

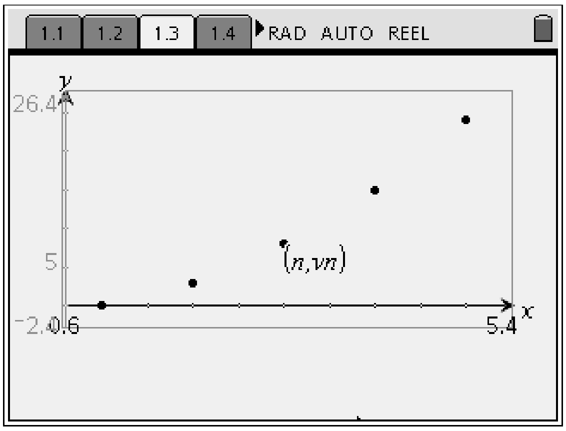
b) Le nuage de points semble avoir une forme de parabole.

On peut émettre la conjecture que :
$u_n = an^2 + bn + c$ avec a, b et c nombres réels.



	A n	B un	C vn	D	E
◆					
1	1	0	0		
2	2	1	3		
3	3	8/3	8		
4	4	5	15		
5	5	8	24		
6	6	35/3			

2) a) Dans le cellule **C1** inscrire la formule **= 3*B1**
Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **C2** à **C5** et coller la formule.
Nommer *vn* la colonne **C** (en « tête » de colonne).



b) Sur une nouvelle page, ouvrir **Graphiques & géométrie.**

Choisir **Type de graphique**, **Nuage de points**.

Puis associer à x : **n** et à y **: vn**.

Enfin choisir dans **Fenêtre**, **Zoom - Stat**.

c) D'après l'allure du nuage de points, on peut chercher pour v_n une expression de la forme :

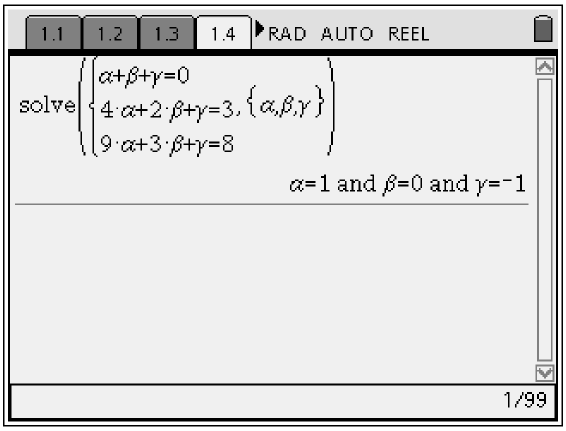
$$v_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma.$$

Comme on a : $v_1 = 0$, $v_2 = 3$ et $v_3 = 8$, α, β *et* γ sont solutions du système : $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = 8 \end{cases}$.

On peut résoudre ce système en ouvrant une page **Calculs**.

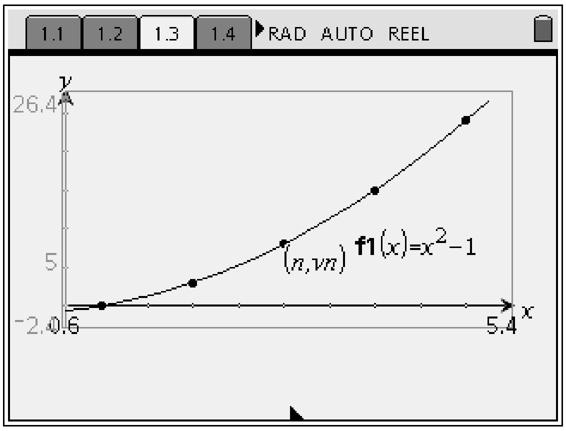
On en déduit que $v_n = n^2 - 1$ et donc que :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{3}.$$



On peut vérifier ce résultat en faisant afficher sur le graphique précédent la fonction f_1 définie par :

$$f_1(x) = x^2 - 1.$$



c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{3}$.

• Pour $n = 1$, $u_1 = 0$ donc la proposition est vérifiée pour $n = 1$.

• Supposons que pour n fixé, $n \geq 1$, on ait $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{3}$ et montrons qu'alors $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{3}$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \dfrac{1}{n+1}\left[n \left[\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1) \right] + n(n+1) \right]$.

D'où, en appliquant l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[n\left(\dfrac{n^2 - 1}{3} \right) + n(n+1) \right]$.

De là, $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \left(\dfrac{n^2 - 1}{3} + \dfrac{3n+3}{3} \right) = \dfrac{n}{n+1} \dfrac{(n+1)(n+2)}{3}$.

Enfin, $u_{n+1} = \dfrac{n^2 + 2n}{3} = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{3}$.

• La proposition est bien démontrée pour tout entier $n \geq 1$.

3. Pour aller plus loin

On pourrait démontrer la proposition en remarquant que $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} k \right]$ et en utilisant les résultats :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$