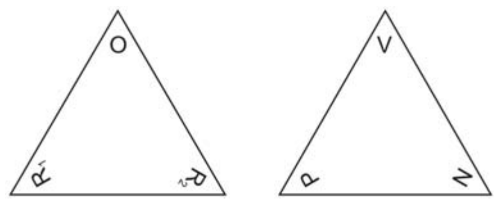
Nombre: ________________________________ Fecha: _______________

Actividad *NUMB3RS*: Un grupo de simetrías

Charlie prepara una clase sobre álgebras de Kac-Moody (se pronuncia "Kots-Mudi"). Él y el Dr. Finch, nuevo director de la división, escriben juntos una ecuación de Kac-Moody. Aunque estas álgebras están más allá del alcance de las matemáticas de la secundaria, son extensiones de grupos de simetrías. Esta actividad explora el grupo de simetría de un triángulo equilátero.

Considera el conjunto de todas las reflexiones y rotaciones que hacen que un triángulo equilátero sea congruente con el original (posiblemente con diferente denominación de los vértices). Un triángulo equilátero puede reflejarse a lo largo de cualquiera de sus tres alturas o rotar en sentido del reloj sobre el circuncentro (punto de intersección de las tres mediatrices de los lados) en 120° ó 240°, y ajustarse consigo mismo. (En el caso trivial, puede rotar 0°, lo que lo deja como era originalmente).

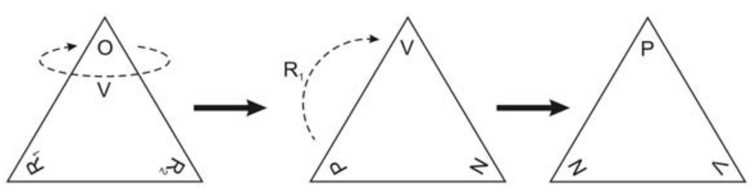
Siguiendo las orientaciones del profesor, traza un triángulo equilátero sobre una transparencia o recórtalo de una hoja de papel. Marca los vértices como se muestra abajo. Nota que P está "detrás" de R_2 y que N está "detrás" de R_1.



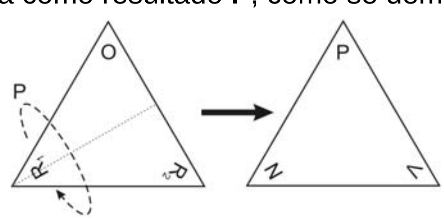
Frente **Parte posterior**

Sea $\mathbf{R_1}$ una rotación de 120° en el sentido de las manecilas del reloj sobre el circuncentro y sea $\mathbf{R_2}$ una rotación similar pero de 240°. Usa **O** para referirte a la figura en su posición original. Sea **V** la reflexión a lo largo del eje vertical y **P** la reflexión a lo largo de la mediatriz que va de la esquina inferior izquierda al centro del lado derecho, y sea **N** la mediatriz que va de la esquina inferior derecha al centro del lado izquierdo.

La transformación **V** seguida de $\mathbf{R_1}$ significa primero aplicar **V** al triángulo original y luego aplicar $\mathbf{R_1}$ al resultado, como se demuestra abajo. (La **V** en la primera figura está atrás).



Estas dos transformaciones producen el mismo resultado que una sola reflexión **P**. O sea que **V** seguida de $\mathbf{R_1}$ da como resultado **P**, como se demuestra abajo.



Si usamos * para representar la operación "seguido de", esto se puede escribir así:
$\mathbf{V} * \mathbf{R_1} = \mathbf{P}$.

Bro. Patrick Carney, Escuela Secundaria Católica De Paul, Wayne, NJ

1. Completa la siguiente tabla mostrando los resultados de cada operación que figuran en la columna izquierda seguida de las operaciones del renglón superior. Se dan algunos resultados como ejemplo:

*	O	V	P	N	R_1	R_2
O	O			N		
V			R_1			N
P			O			
N						P
R_1					R_2	
R_2		P				

2. La propiedad de identidad de una operación enuncia que hay un elemento del conjunto que deja sin cambio todos los elementos en la operación. Según la tabla, ¿tiene la operación * una identidad? Si la tiene, ¿cuál es? Si no la tiene, cita un contraejemplo.

3. La propiedad inversa enuncia que cada elemento del conjunto tiene un elemento (posiblemente él mismo) tal que, al realizar ambas operaciones, el resultado es la identidad. ¿Tiene cada elemento de este conjunto una inversa bajo la operación *? Si lo tiene, cita las inversas de cada uno de los seis movimientos en el conjunto. Si no la tiene, cita un contraejemplo.

4. Si el orden no importa en una operación con dos elementos, entonces se dice que la operación es conmutativa (por ejemplo, con la multiplicación: $x \cdot y = y \cdot x$). Usando la tabla, responde: ¿Es la operación * conmutativa? Si lo es, explica cómo la tabla muestra esta propiedad. Si no lo es, cita un contraejemplo.

5. Demuestra por qué no hay más de 6 simetrías de un triángulo equilátero.

Bro. Patrick Carney, Escuela Secundaria Católica De Paul, Wayne, NJ

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Introducción

Esta actividad muestra cómo las propiedades geométricas pueden convertirse en las bases de una estructura algebraica (en este caso, un grupo).

Para el estudiante

1. Esta actividad muestra algunas propiedades del grupo simétrico en triángulos equiláteros. Un grupo es una estructura matemática con cuatro propiedades (identidad, inversa, clausura y asociatividad). La actividad ilustra las propiedades de identidad e inversa.

- La propiedad de clausura enuncia que para todo valor de x y de y en el conjunto, el resultado $x * y$ también está en el conjunto. Use la tabla para verificarlo.
- La propiedad asociativa dice que para todo valor de x, y, z en el conjunto, $x * (y * z) = (x * y) * z$. Se puede tardar algún tiempo en demostrarlo, aun para un conjunto pequeño (como en esta actividad). ¿Cuántos casos hay que examinar? Forma un equipo con otras personas y cada uno haga una parte para verificar que esta operación es asociativa y que así se satisfacen todas las propiedades de grupo.

2. La clase que prepara Charlie es sobre álgebras de Kac-Moody, que son una extensión de los grupos de Weyl. Estos grupos incluyen las simetrías de hexágonos y cuadrados. Usa un razonamiento similar al empleado con el triángulo para desarrollar el grupo simétrico para el cuadrado. El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría y rotaciones de 90°, 180° y 270° (así como la identidad 0°). Determina cuántos elementos hay en la tabla, nómbralos adecuadamente y luego desarrolla la tabla correcta.

Recursos adicionales

- Si bien estos ejemplos son bidimensionales, este concepto no está limitado al plano. Comienza con un cubo y considera todas sus simetrías posibles. Para una demostración interactiva con un cuadrado, visita: **http://www.math.csusb.edu/notes/advanced/algebra/d4/d4.html**

- Para más información sobre las simetrías de un cuadrado y un cubo, visita: **http://www.maths.uwa.edu.au/~schultz/3P5.2000/3P5.2,3SquareCube.html**

- Para ver un par de lecciones completas sobre estas simetrías en Illuminations, visita: **http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=U157**

Temas relacionados

Una de las aplicaciones de la teoría de grupos es el cubo de Rubik. Para una explicación de esta relación y de las cuatro propiedades de un grupo, así como una tabla para la solución del cubo de Rubik, visita:
http://members.tripod.com/~dogschool/cubegroups.html

Bro. Patrick Carney, Escuela Secundaria Católica De Paul, Wayne, NJ