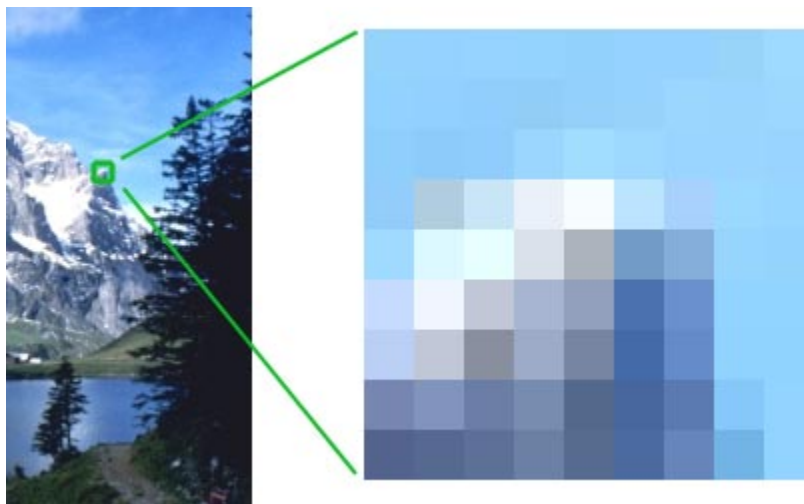


Nombre: _____ Fecha: _____

Actividad NUMB3RS: Mensajes cifrados

En "El topo" el FBI descubre que un sospechoso descargó varias imágenes del Internet. Charlie observa que la NSA ha descubierto que grupos como al-Qaeda y Hezbollah ocultan mensajes dentro de fotografías mediante un proceso llamado esteganografía. En una pantalla de computadora, una imagen se compone de una serie de miles de puntos y bytes, y no se necesitan todos los bytes para formar la imagen. Es fácil ocultar un mensaje cifrado en las partes de la imagen que no se usan.

¿Cómo funciona? Toda imagen de bitmap que se ve en una computadora se compone de miles de cuadros pequeñísimos llamados pixels, como se ve abajo.



[Fuente: <http://www.prepressure.com/image/formatbitmap.jpg>]

La computadora ve estos pixels no como colores sino como números. Por ejemplo, la imagen *pixelada* de arriba puede traducirse en los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 14 & 8 & 7 & 8 & 14 & 12 & \dots \\ 7 & 6 & 12 & 8 & 6 & 7 & \dots \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 12 & 14 & \dots \end{bmatrix}$$

Si alguien envía un mensaje secreto en forma de imagen puede usar la codificación mediante multiplicación de matrices.

1. Para cifrar la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ con la matriz de codificación $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, halla AE .

El resultado obtenido es el mensaje enviado al receptor. Ahora el receptor necesita leer el mensaje. Esta descodificación requiere la matriz inversa.

Para una matriz 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ su inversa se calcula $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2. Calcula la inversa de la matriz de codificación de la Pregunta 1, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Multiplica esta matriz inversa por la matriz de codificación original. ¿Cuál es el resultado?

Esta respuesta a la pregunta 3 se llama matriz de identidad. Esta matriz es la clave para hallar la inversa de una matriz.

4. Multiplica cualquier matriz 2×2 por la respuesta a la pregunta 3. ¿Cuál es el resultado?
5. Hay muchas maneras de calcular la inversa de una matriz superior a 2×2 . En esta actividad usarás la calculadora para hallar la inversa.

Supongamos que se acaban de interceptar el siguiente mensaje y una clave de codificación. Multiplica con la calculadora la inversa de la clave de codificación por el mensaje interceptado y descifra la imagen usando los siguientes valores para los colores.

0 Negro	1 Rojo-marrón	2 Verde	3 Marrón-verde
4 Azul oscuro	5 Morado	6 Azul-verde	7 Gris oscuro
8 Gris claro	9 Naranja-rojo	10 Verde vivo	11 Amarillo
12 Azul	13 Rosado-morado	14 Azul claro	15 Blanco

$$\begin{bmatrix} 29 & 28 & 32 & 37 & 25 & 29 & 20 \\ 44 & 58 & 47 & 62 & 45 & 44 & 25 \\ 34 & 38 & 42 & 47 & 35 & 39 & 25 \\ 44 & 58 & 47 & 62 & 45 & 44 & 25 \\ 29 & 28 & 32 & 37 & 25 & 29 & 20 \end{bmatrix}$$

Mensaje interceptado

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Clave de codificación

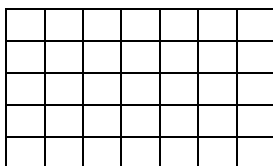
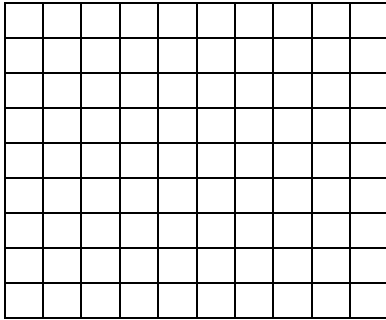


Imagen descifrada

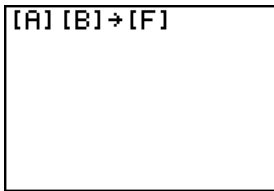
Ahora invierte los papeles. Cifra tu propio mensaje y envíalo a otra calculadora gráfica.

Colorea la cuadrícula de abajo con una imagen para cifrar. Usa los códigos de colores de la página anterior para guardar la imagen como matriz *A*. Guarda la matriz de codificación a la derecha abajo como matriz *B*.



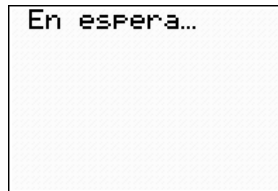
$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

1.



Para cifrar la matriz de la imagen *A* con la matriz de codificación *B*, halla *AB*. Guarda el resultado como una matriz diferente de tu vecino pulsando la tecla **STO→** y escogiendo una matriz del menú de matrices.

2.



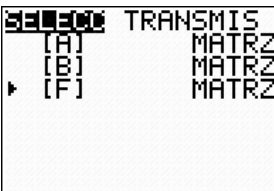
Para enviar este mensaje cifrado a la calculadora de tu vecino, conecta las dos calculadoras con el cable de unidad a unidad. En la calculadora receptora, pulsa **2nd** [LINK], pasa al menú de **RECIBIR** y pulsa **ENTER**.

3.



En la calculadora que envía la matriz, pulsa **2nd** [LINK], pasa al menú de **ENVIAR** y escoge **8:Matriz...**

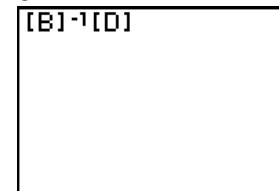
4.



Escoge la matriz cifrada, pulsa **ENTER** y escoge **TRANSMITIR** para enviar.

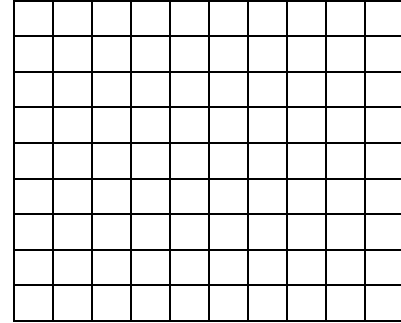
Ahora tu vecino te enviará un mensaje cifrado a ti.

5.



Para descifrar la matriz cifrada, multiplica la inversa de la matriz de codificación por la matriz cifrada.

Usando la matriz descifrada, colorea los cuadros a la derecha conforme a la codificación de colores empleada antes. Verifica con tu vecino si descifraste correctamente.



El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Actividad: Hallar la matriz inversa por el método de adjuntos

Introducción

Dos métodos frecuentes para hallar la inversa de una matriz son Gauss-Jordan y el método de adjuntos. El método de adjuntos se describe abajo. Para hallar A^{-1} , calcula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A), \text{ donde adj } A \text{ es la traspuesta de la matriz cofactor de } A.$$

Ejemplo: Dado que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ halla A^{-1} .

Paso 1: Halla la matriz cofactor de A . Se halla reemplazando cada casilla en la matriz A con su menor e imponiendo un signo negativo alternante.

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 \\ -6 & -6 & 6 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Halla la traspuesta de la matriz cofactor. Para hacerlo intercambia las filas y columnas de la matriz. Esto es, convertir las columnas en filas.

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 \\ 3 & -6 & 1 \\ -9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Para hallar A^{-1} , multiplica la matriz traspuesta por $\frac{1}{\det A}$

$$-\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 \\ 3 & -6 & 1 \\ -9 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Recursos adicionales

- Las imágenes reales usadas en el episodio NUMB3RS fueron imágenes JPEG (no bitmaps). Los diferentes métodos de esteganografía para imágenes JPEG se encuentran en el sitio Web <http://www.guillermi2.net/stegano/jsteg/index.html>.
- Para aprender una técnica diferente de uso de la esteganografía para disfrazar un mensaje, ver la actividad de NUMB3RS "Ahora lo ves". Esta actividad se baja gratis en <http://education.ti.com/exchange> y buscando "6213".
- Para aprender más sobre la multiplicación de matrices, ver la actividad NUMB3RS "Settling the Score" o "El puntaje". Esta actividad se descarga gratis en <http://education.ti.com/exchange> y buscando "6809".