EP 111 - 2009 : Étude d'un ensemble de points

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP111_2009_EnsemblePoints_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 111 de l'épreuve pratique 2009 – Étude d'un ensemble de points

Enoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

On pose $a_0 = 4 + 2\mathrm{i}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Partie A

1.
a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.
b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = JA_n$.
a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.
b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n ; d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?
c) Conjecturer la nature de la suite (d_n).

Partie B

3.
a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.
b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.
d) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question **1.b)**.

Production demandée

- Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
- Réponses argumentées pour la question **3**.

Compétences évaluées

- Utiliser un logiciel pour effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$.
- Représenter graphiquement un nuage de points.
- Utiliser des similitudes du plan.
- Obtenir une liste de plusieurs termes d'une suite, et reconnaître le type de cette suite.

2. Corrigé

Partie A

1) Ouvrir une page **Calculs**.

Définir le nombre $f(z) = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$.

Puis, en prévision de la question **2**, le nombre $j = \boldsymbol{i}$.

$f(z):=\frac{1}{2}\cdot(1+\boldsymbol{i})\cdot z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{i}$ *Terminé*

$j:=\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{i}$

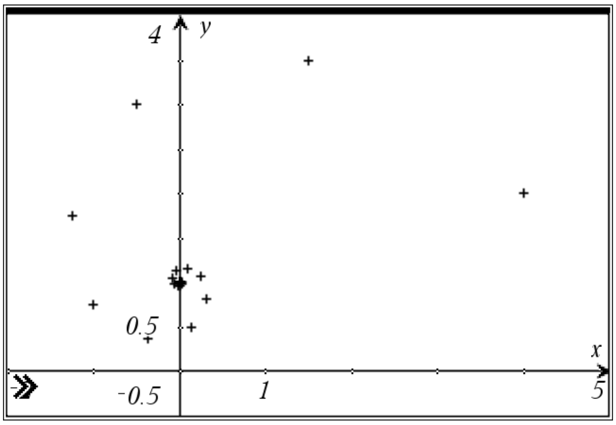
2/99

a) Ouvrir une page **Tableur & listes**.
Nommer « n » la colonne **A** et, dans la cellule grisée, saisir la formule **= seq(*x*,*x*,0,29,1)**.
Nommer « an » la colonne **B**, saisir « 4+2***i*** » dans la cellule **B1**, puis la formule **= *f*(b1)** en cellule **B2** et la recopier vers le bas grâce à la fonction saisie rapide.
Nommer « abs_an » la colonne **C** et, dans la cellule grisée, saisir la formule **=real(an)** pour obtenir l'abscisse du point A_n.
Nommer « ord_an » la colonne **D** et, dans la cellule grisée, saisir la formule **=imag(an)** pour obtenir l'ordonnée du point A_n.

	A n	B an	C abs_an	D ord_an	E
◆	=seq(x		=real(an)	=imag(an	
1	0	4+2*i	4	2	
2	1	3/2+7/2*i	3/2	7/2	
3	2	-1/2+3*i	-1/2	3	
4	3	-5/4+7/4*i	-5/4	7/4	
5	4	-1+3/4*i	-1	3/4	
6	5	-3/8+3/8*i	-3/8	3/8	

A1 =0

b) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.
Demander le tracé du nuage de points en saisissant, dans s1, « abs_an » pour *x* et « ord_an » pour *y*.
Demander un **Zoom données** pour visualiser le nuage pour la copie d'écran ci-contre, le réglage est :
Xmin= –2 ; **Xmax**= 5 ;**Ymin** = –0,5 ; **Ymax**= 4.
Les points A_n semblent s'enrouler autour du point de coordonnées (0 ; 1) et former une spirale.

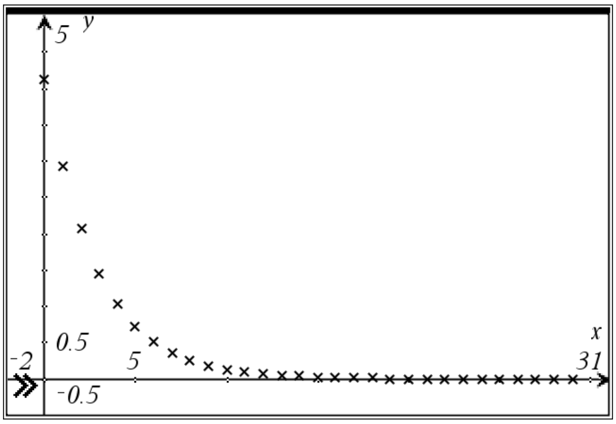


2) a) Revenir à la page **Tableur**, nommer « dn » la colonne **E** et, dans la cellule grisée, saisir la formule **=abs(an–j)** , indiquer que « j » est une référence de variable et non de colonne.

	C abs_an	D ord_an	E dn	F quotient
◆	=real(an)	=imag(an	=abs(an−'j)	
1	4	2	√(17)	_
2	3/2	7/2	√(34)/2	√(2)/2
3	-1/2	3	√(17)/2	√(2)/2
4	-5/4	7/4	√(34)/4	√(2)/2
5	-1	3/4	√(17)/4	√(2)/2

F2 $=\frac{e2}{e1}$

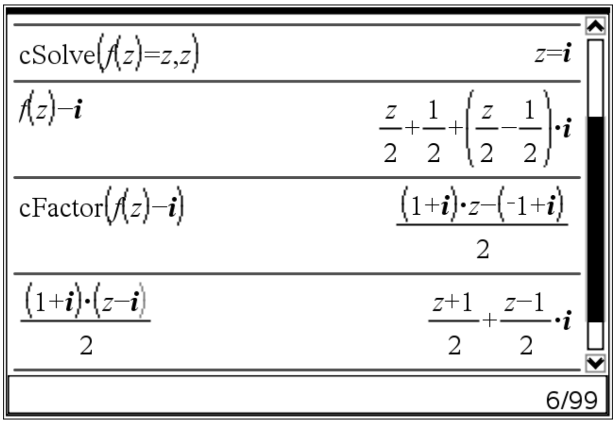
b) Demander le tracé du nuage de points en saisissant, dans s2, « n » pour x et « dn » pour y.
Demander un **Zoom données** » pour visualiser le nuage pour la copie d'écran ci-contre, le réglage est :
Xmin = –2 ; **Xmax** = 31 ; **Ymin** = –0,5 ; **Ymax** = 5.
Les points obtenus semblent se rapprocher de l'axe des abscisses, la suite (d_n) semble être décroissante et convergente vers 0.



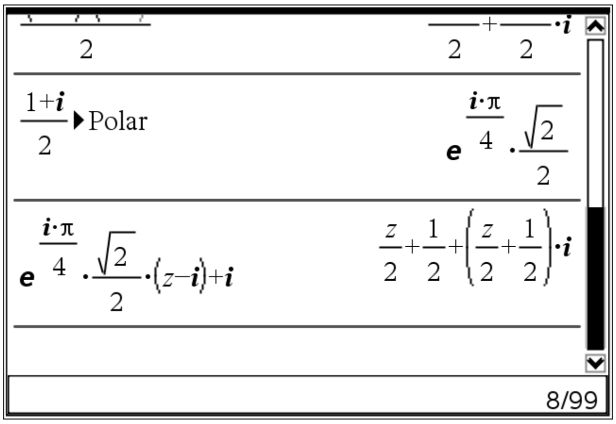
c) Nommer « quotient » la colonne **F** et, dans la cellule **F2**, saisir la formule **=** $\dfrac{\mathbf{e2}}{\mathbf{e1}}$, et la recopier vers le bas grâce à la fonction **Saisie rapide**. On constate que ce quotient de deux termes consécutifs est constant et on peut donc conjecturer que la suite est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Partie B

3) a) Pour déterminer la nature de S, déterminons d'abord son point fixe en résolvant l'équation $z' = z$ soit $f(z) = z$; on obtient comme point fixe le point d'affixe i.
Calculer ensuite la différence $f(z) - \mathrm{i}$ et demander à la factoriser ; on obtient pas une factorisation satisfaisante, mais on peut remarquer $(-1 + \mathrm{i})$ peut aussi s'écrire $(\mathrm{i}^2 + \mathrm{i})$ soit $\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$, ce qui permet d'écrire $f(z) - \mathrm{i} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}(z - \mathrm{i})$.
On peut confirmer cette factorisation la développant et en constatant que l'on retrouve l'écriture de $f(z) - \mathrm{i}$.



D'autre part, le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ s'écrit sous forme exponentielle $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, ce qui permet d'obtenir la forme définitive de la transformation : $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - \mathrm{i}) + \mathrm{i}$.
Ceci permet d'en déduire que la transformation est une similitude de centre le point J d'affixe i, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.



b) Pour tout entier n, $d_n = \mathrm{JA}_n$,

donc $d_{n+1} = \mathrm{JA}_{n+1} = |a_{n+1} - \mathrm{i}| = |f(a_n) - \mathrm{i}| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(a_n - \mathrm{i})\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| |a_n - \mathrm{i}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{JA}_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}d_n$

(en utilisant les résultats précédents).

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de premier terme $d_0 = \sqrt{17}$ et de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La raison de cette suite appartient à]0 ; 1[, donc la suite est convergente vers 0.
Les points A_n sont obtenus par une similitude, donc s'enroulent autour de son centre, de rapport inférieur à 1, donc se rapprochent de ce centre. Ceci confirme les conjectures émises dans la **Partie A**.