Determinación del Coeficiente de Restitución (e) de una pelota de ping-pong

Víctor Garrido C.
Universidad de Viña del Mar, Av. Agua Santa 7255, Campus Rodelillo, Viña del Mar, Chile.
vgarrido@uvm.cl , vgarridoster@gmail.com 032(2) 462680

Resumen

Este artículo presenta una forma experimental para el cálculo del coeficiente de restitución **(*e*)** de una pelota de ping-pong. Se analiza además el comportamiento de su posición, velocidad y aceleración en el tiempo teniendo en cuenta diversas superficies y haciendo uso de tecnologías (TICS).

Palabras claves: Coeficiente de restitución, colisiones elásticas, elasticidad

1. Introducción

Durante una colisión, todos los cuerpos sufren pequeñas deformaciones y por tanto liberan energía en forma de calor. La facilidad con que un cuerpo recobra su forma original después de un choque, es la medida de su elasticidad. Se debe tener en cuenta que tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética deben conservarse en los choques. Aunque esta afirmación es aproximadamente cierta para cuerpos duros, es falsa para cuerpos suaves o que puedan rebotar más lentamente cuando chocan

Si la energía cinética permanece constante después del choque, se dice que este ha sido perfectamente elástico (caso ideal). Si los cuerpos que chocan entre sí, permanecen juntos después de la colisión, se dice que esta fue perfectamente inelástica. La mayor parte de los choques varían entre estos dos extremos.

Las colisiones inelásticas se caracterizan por una pérdida en la energía cinética. Una manera de medir la elasticidad de un choque, se obtiene relacionando las velocidades relativas antes del choque y después del choque.

Se define coeficiente de restitución ***(e)*;** como el cuociente negativo de la velocidad relativa después del choque a la velocidad relativa antes del choque.

$$e = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}} \qquad (1)$$

El coeficiente de restitución ***(e),*** puede tomar diferentes valores y permite la clasificación de las interacciones.

1.- Si *e* = 1 ó *e* = 0, se considera que el choque es perfectamente elástico o perfectamente inelástico, respectivamente.

Estos son los dos casos extremos, y en general, el coeficiente de restitución tiene un valor comprendido entre cero y uno $(0 \langle e \langle 1)$

El método que usaremos para medir el coeficiente de restitución esta basado en dejar caer una pelota de ping-pong desde una altura inicial h_0 ,siendo h_1 y h_2 las alturas sucesivas alcanzadas por la pelota después del choque con la superficie del suelo, como se aprecia en la Figura 1.

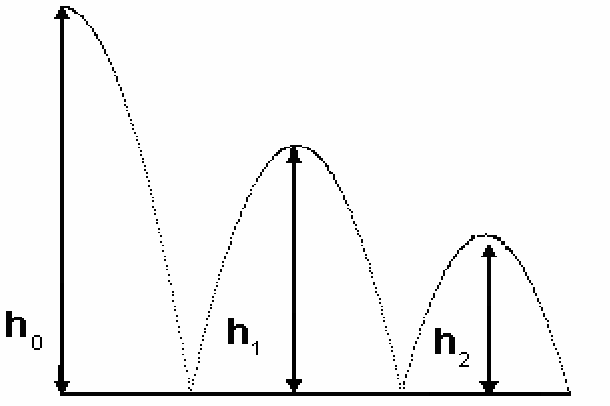


Figura 1: Alturas sucesivas alcanzadas por la pelota de ping-pong al caer.

Cuando se deja caer la pelota se produce el choque con la superficie horizontal fija del suelo. La masa del sistema (suelo-Tierra) es muy grande por lo que su velocidad no cambia durante la colisión con la pelota. Por consiguiente, en este caso especial, se tendrá que:

v_{1i} y v_{1f} , corresponden a las velocidades de la pelota antes del choque y después del choque, respectivamente;

v_{2i} y v_{2f} , son las velocidades de la superficie (tierra) antes y después del choque, respectivamente.

De este modo, si $v_{2i} = v_{2f} = 0$ (inalteración de la velocidad de la Tierra producto del choque), y se reemplaza en la ecuación (1), se obtiene

$$e = -\frac{v_{1f} - 0}{v_{1i} - 0} = -\frac{v_{1f}}{v_{1i}} \quad (2)$$

Ahora, aplicando la ecuación de movimiento uniformemente acelerado a nuestro problema,

$$h_f = h_i \pm v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (3)$$

Con $h_f = 0$ y $v_i = 0$, se obtiene la ecuación (4)

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4)$$

Despejando el tiempo de caída, a partir de la ecuación (4), se tiene

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} \quad (5)$$

Por otra parte, la velocidad de la pelota antes del choque está definida como

$$v_{1i} = -\frac{d}{dt}\left(h_0\right) = -g \cdot t \quad (6)$$

Reemplazando la ecuación (5) en (6), se tiene que la velocidad de la pelota antes del choque es

$$v_{1i} = -\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \quad (7)$$

Del mismo modo, la velocidad de de la pelota después del choque será

$$v_{1f} = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \quad (8)$$

y reemplazando las ecuaciones (7) y (8) en la ecuación (2), se obtiene el coeficiente de restitución de la forma

$$e = -\frac{+\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}}{-\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \quad (9)$$

A partir de la figura (2) se puede obtener la altura esperada en el segundo rebote (h_2).

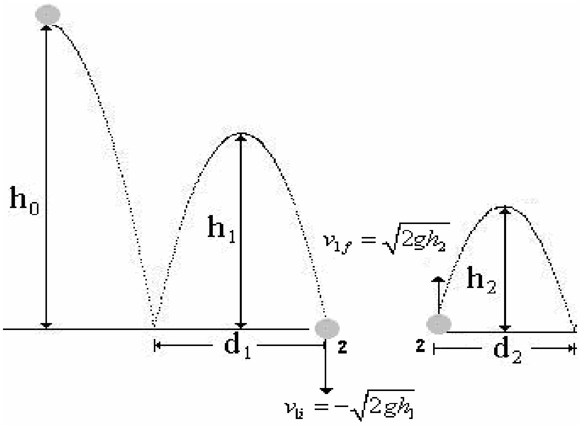


Figura 2: Muestra el punto de interacción (2), pelota -suelo

En el punto (2), se tienen las velocidades:

$v_{1i} = -\sqrt{2gh_1}$ Velocidad de la pelota antes del choque, después del segundo rebote y

$v_{1f} = \sqrt{2gh_2}$ Velocidad de la pelota después del choque, después del segundo rebote

Usando la expresión para el calculo del coeficiente de restitución

$$e = -\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Se tendrá: $$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (10)$$

Finalmente, la altura después del primer rebote es

$$h_2 = e^2 \cdot h_1 \quad (11)$$

Si se desean obtener las sucesivas alturas se pueden obtener usando la relación general

$$h_n = e^2 \cdot h_{n-1} \quad (12)$$

Una vez conocido el coeficiente de restitución e también se pueden obtener los desplazamientos horizontales sucesivos $d_1, d_2, d_3....$ (Ver figura 3) como resultado de los rebotes de la pelota, usando la expresión general

$$d_{n+1} = e \cdot d_n \quad (13)$$

Dejamos al lector el análisis y deducción de la expresión (13)

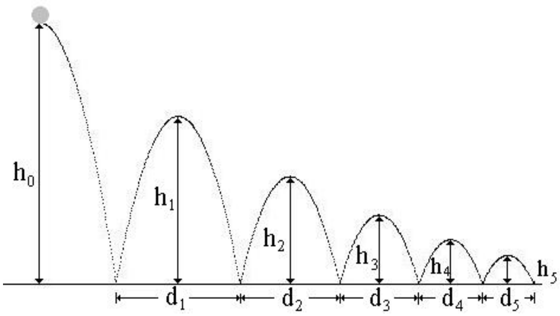


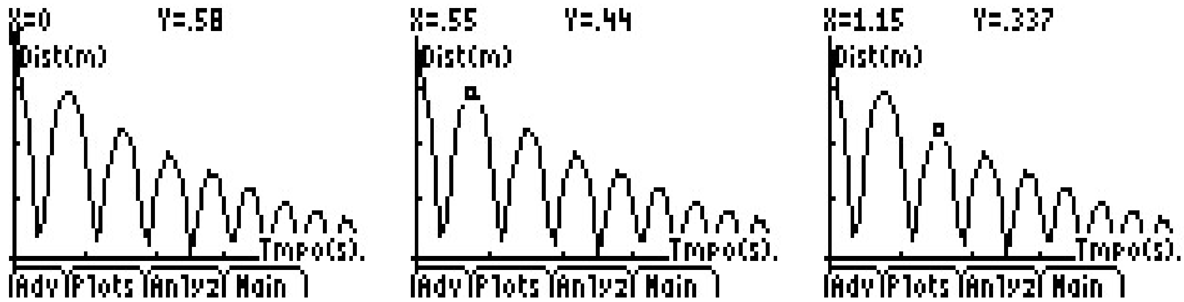
Figura 3: Representación del proceso de colisión de la pelota sobre una superficie, en el se destacan las alturas (h), y los desplazamientos horizontales (d).

2. Procedimiento

1. Encienda la calculadora Texas Instrument modelo TI-.84 Plus y asegúrese de que aparezca la pantalla de inicio.
2. Presione APPS para mostrar las listas de aplicaciones instaladas en la calculadora.
3. Seleccione Easy Data y pulse ENTER.
4. En el menú Setup, seleccione cero y ajuste el sensor, luego Star (pulse **ZOOM**), la pantalla muestra instrucciones generales; Ball Bounce opta automáticamente los valores de la configuración.
5. Pida a una persona que sostenga la calculadora **TI-84 PLUS SILVER** y el sensor CBR 2^{TM} , mientras que otra persona sostiene la pelota de ping-pong debajo de este a unos 50(cm).
6. Seleccione Start (pulse **ZOOM**).Cuando el CBR 2^{TM} comience a emitir un sonido suelte la pelota, procurando no cambiar la altura del CBR 2^{TM} .
7. Cuando cesa el sonido, los datos capturados, se transfieren a la calculadora que muestra una representación gráfica de la distancia versus tiempo.
8. Si la gráfica obtenida no es la correcta seleccione **MAIN START** para repetir la toma de datos.
9. Proceda a estudiar y analizar los gráficos obtenidos.

3. Análisis

A partir de los gráficas de posición en función del tiempo, ilustrados en la Figura 3, es posible apreciar que la altura inicial, h_0 , desde la cual se deja caer la pelota es 0.58 cm. Esta alcanza una altura h_1 , después del primer impacto, de 0.44 cm, lo cual se observan en el gráfico (4)



(a) **(b)** **(c)**

Figura 3: Gráficas obtenidas para la caída de la pelota: (a) Condición inicial; (b) altura máxima obtenida después del primer choque; (c) altura máxima obtenida después del segundo choque.

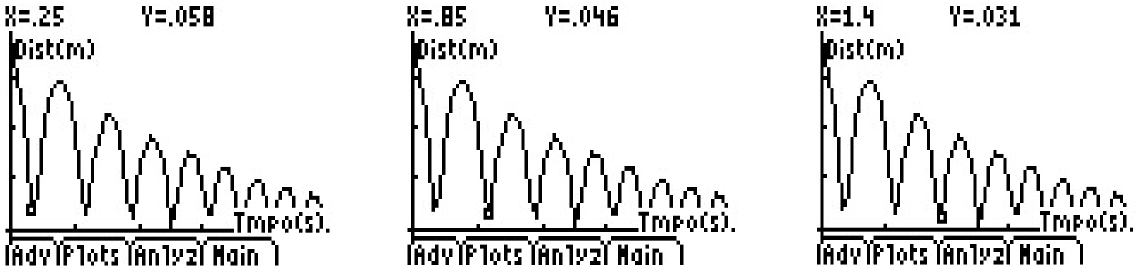
Usando la expresión(9) se puede determinar el coeficiente de restitución e , y considerando las gráficas de las figuras 3 y 4, se obtienen los siguientes valores .La tabla muestra los valores obtenidos a partir del experimento

Alturas (cm.)	Desplazamientos (cm.)
h_0=0.580	d_3=1,895 -1,40
h_1=0.440	d_2=1,40 -0,85
h_2=0.337	d_1=0,85 -0,25

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{0,44}{0,58}} = 0,8709 \cong 0,9 \, ,$$

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{0,337}{0,44}} = 0,875 \cong 0,9 \, .$$

También a partir de los desplazamientos horizontales sucesivos dado por la ecuación (13), se puede determinar el coeficiente de restitución e .



(a) **(b)** **(c)**

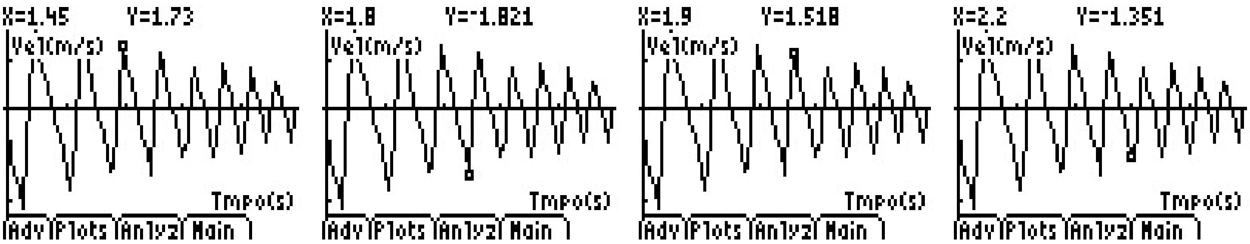
Figura 4: Las gráficas (a), (b), (c) muestran los sucesivos rebotes de la pelota de ping-pong

$$e=\frac{d_2}{d_1}=\frac{[1,4-0,85]}{[0,85-0,25]}=\frac{0,55}{0,6}=0,916\cong 0,9$$

$$e=\frac{d_3}{d_2}=\frac{[1,895-1,40]}{[1,4-0,85]}=\frac{0,495}{0,55}=0,9$$

4. Análisis de la velocidad y la aceleración

El programa Easy Data permite además analizar el comportamiento tanto de la velocidad como de la aceleración, a partir de los gráficos $v\left[{}^{m}\!/_{s}\right]\ v/s\ t[s]$ y $a\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]\ v/s\ t[s]$, para la pelota de ping-pong. Lo anterior se observa en la Figura 5.



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Figura 5: Las gráficas (a), (b), (c), (d), muestran el comportamiento de la velocidad en el tiempo durante las colisiones pelota – suelo.

Observamos que la velocidad tiene pendientes positivas (pelota que sube) y pendientes negativas (pelota que baja), y si calculamos las pendientes negativas considerando los puntos de los gráficos (9) ;(10) ;(11) y (12), obtenemos los siguientes valores:

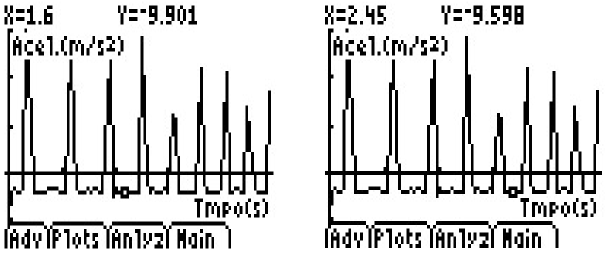
$$m_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{t_f-t_i}=\frac{-1,821-1,73}{1,8-1,45}=-10,14\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]\cong g$$

, de igual forma se cumple que:

$$m_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{t_f-t_i}=\frac{-1,351-1,518}{2,2-1,9}=-9,56\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]\cong g$$

es decir los valores que se obtienen corresponden a las de aceleración de gravedad g .lo que confirma la física del problema, dejamos el cálculo de las pendientes positivas al lector y su posterior análisis.

De los gráficos (13) y (14) que corresponden a gráficos $a\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]\ v/s\ t[s]$, se pueden visualizar zonas donde la aceleración permanece constante con un valor cercano a $9,8\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]$, las zonas de picks corresponden al momento en que la pelota se encuentra en contacto con el suelo .



(a) **(b)**

Figura 6: Las gráficas (a), (b), muestran el comportamiento de la aceleración en el tiempo.

5. Conclusiones

A través del uso de la TI-84 PLUS SILVER y el sensor CBR 2^{TM} , no solo se pueden capturar, ver y analizar el comportamiento de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo para la caída de una pelota de ping-pong, sobre una determinada superficie. Usando adecuadamente el Easy Data y los conocimientos teóricos de física se pueden calcular los coeficientes de restitución e para determinadas superficies usando diferentes materiales y diversos balones.El Easy Data además permite explorar, movimiento de caída libre, calcular pendientes a partir del gráfico Velocidad-Tiempo $\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]$, ajustar un modelo y visualizar en su conjunto la física del problema.

7. Referencias

[1] Manual de Uso CBR 1997 Texas Instruments Incorporated

[2] TI-84 Plus/TI-84 Plus Silver Edition Español / Portuges, 2004

[3] Raymond A.Serway, John W.Jewet, Jr, Física I Texto Basado en el Calculo 3ª Edición, Ed Thomson, 2003

[4] Francis W. Sears, Mark W. Zemanky Física Universitaria Ed. Pearson Educación 1999.

[5] La bola que rebota Autor: Fu-Kwun Hwang, Dept. of physics, National Taiwan Normal University [en línea] http://www.phy.ntnu.edu.tw/oldjava/bouncingBall/bouncingBall_s.htm [Consulta: 28/08/2007]

[6] Determinar el coeficiente de restitución del choque de una pelota con el piso, Daniel Vázquez Hernández y Alfonso Castillo Ábrego [en línea] http://dgenp.unam.mx/segencfm/paginas/coef_rest.htm [Consulta: 28/08/2007]

[7] Impacto Inelástico de una Partícula sobre una Superficie [en línea], W. L. Vargas, Lyda M. Pineda Juan Carlos Murcia http://www.umng.edu.co/www/resources/rev16.1%20art08.pdf [Consulta: 04/09/2007]