EP 076 - 2009 : Recherche d'un point fixe

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP076_2009_PointFixe.tns

1. Le sujet

Sujet 076 de l'épreuve pratique 2009 – Recherche d'un point fixe

Énoncé

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle OO'A de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O' et on désigne par M' le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM') passe par un point fixe.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire la figure associée à la situation décrite ci-dessus.
2. Construire l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ par la similitude S. Caractériser cet ensemble $\mathcal{C}'$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM') lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

On appelle A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

4. On pose S(B) = B'. Quelle propriété relative est vérifiée par les triangles ABB' et AOO' ? Justifier.
5. Positionner le point M afin que le point B soit entre les points M et M'.
6. Donner des arguments mathématiques permettant de prouver que les points M, B et M' sont alignés.

Production demandée

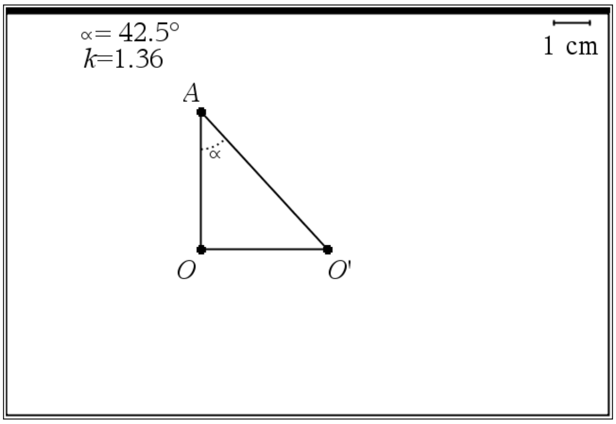
- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La caractérisation de l'ensemble $\mathcal{C}'$.
- La justification de la propriété de la question **4**.
- La justification de la conjecture de la question **3** seulement dans le cas où le point B est entre les points M et M'.

Compétences évaluées

- Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dynamique.
- Visualiser le lieu d'un point.
- Caractériser une similitude plane.
- Utiliser des triangles semblables et des angles inscrits.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

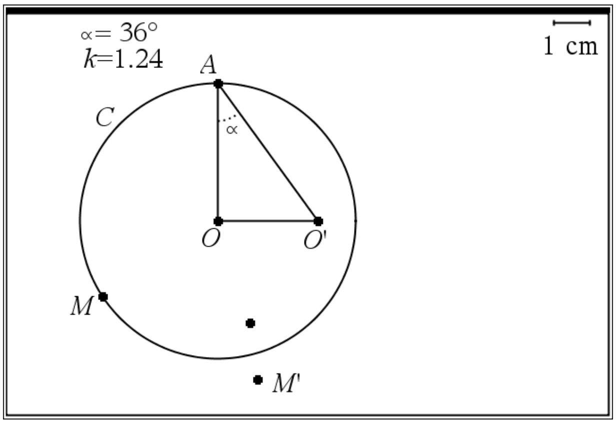
2. Corrigé



1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

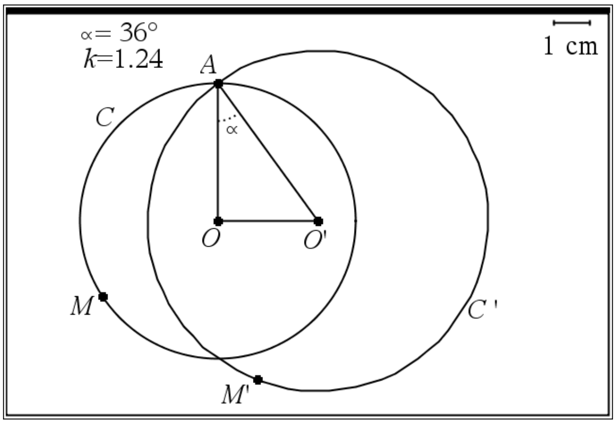
Demander l'affichage du plan géométrique.
Placer 2 points O et O', tracer le segment [OO'], la perpendiculaire à [OO'] passant par O et placer le point A sur cette perpendiculaire de telle sorte que le triangle OO'A soit de sens direct, cacher cette perpendiculaire et enfin tracer les segments [OA] et [O'A].
Mesurer l'angle et calculer le rapport de cette similitude en demandant la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{OAO'}$ et en calculant le quotient des longueurs $k = \dfrac{AO'}{AO}$.

Pour ce calcul de rapport : mesurer les segments [AO'] et [AO], placer ces 2 mesures à l'extérieur de la figure, insérer un texte $\dfrac{a}{b}$, puis demander de le calculer et placer le résultat sous l'angle α. Cacher ensuite les éléments inutiles pour obtenir une figure analogue à celle ci-contre.

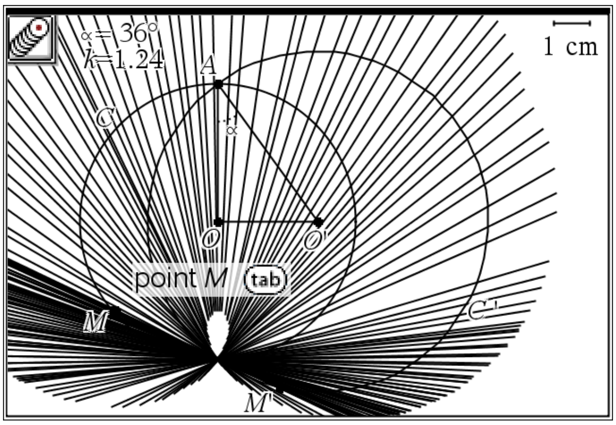


Construire ensuite le cercle *C* de centre O passant par A et placer un point M sur ce cercle.

2) Construire l'image de M par la similitude *S* comme sur l'écran ci-contre en construisant successivement l'image de M par une rotation de centre A et d'angle α, puis l'image du point obtenu par une homothétie de centre A et de rapport *k*.



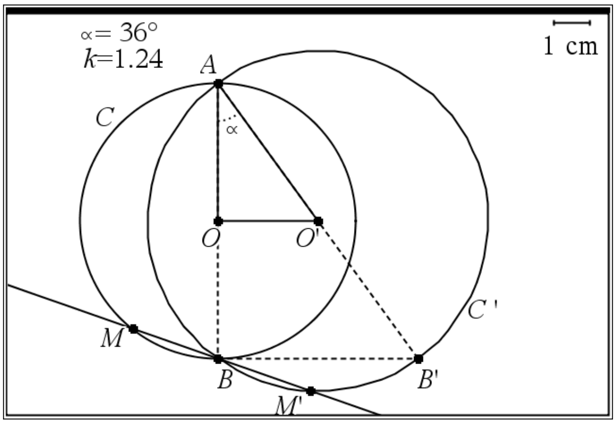
Cacher ensuite le point intermédiaire de construction et demander le lieu du point M' qui est l'image *C*' par la similitude *S* du cercle *C*.
En effet, une similitude, étant la composée d'une rotation et d'une homothétie, conserve la nature des figures géométriques ; entre autres, l'image d'un cercle par une similitude est un cercle.
Ici *C*' est le cercle de centre O' et de rayon O'A.



3) Tracer la droite (MM'), puis demander la trace géométrique de cette droite et faire bouger le point M.
Il semble que la droite (MM') passe par un point fixe B qui est le second point d'intersection des cercles *C* et *C*'.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée

4) Construire l'image B' de B par *S* en procédant comme précédemment pour M. Puis construire le triangle ABB' et le faire apparaître en pointillés pour le différencier du triangle AOO'.



Au vu de la figure, les triangles AOO' et ABB' semblent être semblables.
O et B ont pour images respectives par *S* les points O' et B', donc le triangle AOO' a pour image le triangle ABB'.
Or AOO' est rectangle en O, donc ABB' est rectangle en B. De plus, les points A, O et B sont alignés, donc les points A, O' et B' sont aussi alignés, donc l'angle $\widehat{OAO'}$ est égal à l'angle $\widehat{BAB'}$, donc les triangles AOO' et ABB' ayant deux angles égaux sont semblables.

6) Montrons que les points M, B et M' sont alignés.

A et B sont les deux points d'intersection des cercles *C* et *C*', donc la droite (AB) est orthogonale à la droite (OO') joignant les deux centres de ces cercles. De plus, le triangle AOO' est rectangle en O, d'où (AO) est orthogonale à (OO'), donc les droites (AB) et (AO) sont parallèles (orthogonales à la même droite), or A est commun à ces deux droites, donc (AB) et (AO) sont confondues, donc O appartient à [AB] et [AB] est un diamètre du cercle *C*.

M est un point de *C* et [AB] en est un diamètre, donc le triangle AMB est rectangle en M, donc (AM) est orthogonale à (MB).

M' est l'image de M par la similitude *S*, donc le triangle AMM' est semblable au triangle AOO', or (AO) est orthogonale à (OO'), donc les droites (AM) et (MM') sont orthogonales.

Les droites (MB) et (MM') sont orthogonales à la même droite (AM), ces droites sont donc parallèles entre elles, or M est commun aux deux, donc ces droites sont confondues et B est un point de (MM'), donc M, B et M' sont alignés.

© Texas Instruments 2009 / Photocopie autorisée