

TI-89 / TI-92 Plus

en ny teknologi med **FLASH**



När nya verktyg för matematik och naturvetenskapliga applikationer kommer på räknare behöver du nu inte köpa en ny. Om du har en Plus modul installerad i din TI-92 kan du enkelt *uppgradera* din gamla räknare med nya funktioner och applikationer. Om du har *Graf Link* hämtar du hem dessa från Texas Instruments hemsidor. På TI-89 finns denna nya flash-teknologi inbyggd från början.

På dessa sidor beskriver vi några av de viktigaste funktionerna som du får med Plus-modulen (och som från början finns på TI-89). I beskrivningen finns exempel på hur de några av de viktigaste nya funktionerna används. Beskrivningen omfattar följande:

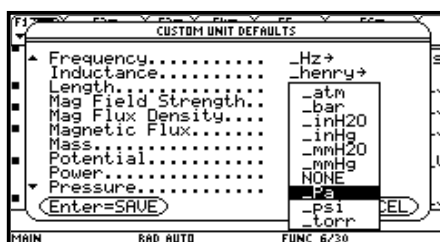
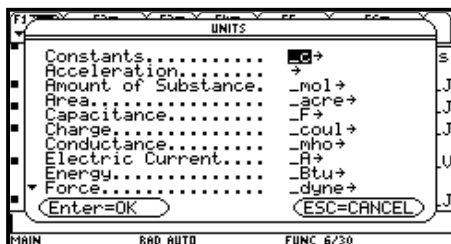
- Enheter och konstanter
- Numerisk ekvationslösare
- Exakta beräkningar av lösningar till linjära och icke linjära ekvationssystem
- Omvandling mellan olika talsystem
- Exakta och numeriska lösningsmetoder för differentialekvationer

Användning av enheter och konstanter – något för fysiker

I räknaren finns ett antal fördefinierade enheter och konstanter som kan användas vid olika beräkningar. Du kan t ex använda enheter i uttryck som ska beräknas. Du kan också göra enhetsomvandlingar och definiera dina egna enheter. Under 3 kan man ställa in det måttssystem som ska användas.

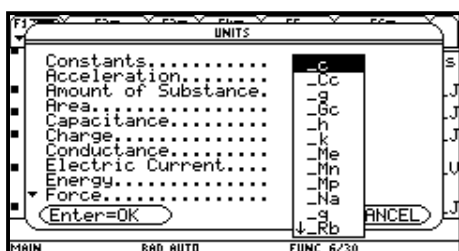


Vi kan titta lite på de enheter och konstanter som är förinställda om vi väljer SI-systemet. För att komma åt dessa snabbast trycker du på • [P]. Se bilden nedan till vänster. Med valet CUSTOM kan du ställa in enheterna som du vill ha dem i din meny. Under enheten Pressure (tryck) kan man t ex välja mellan nio olika enheter. Se bilden till höger nedan.



Konstanter

De konstanter (med tillhörande värden) som finns inbyggda i räknaren är de som man vanligtvis finner i tabell- och formelsamlingar. Vi når dem från första raden i enhetsmenyn (units), som vi har i bilderna ovan, genom att trycka på ~.

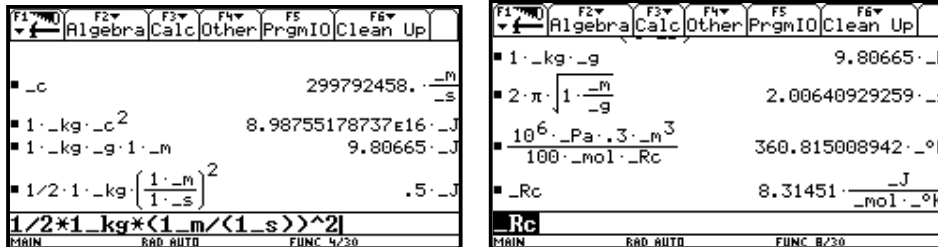


T.ex. är c är ljusets hastighet, g är tyngdkraftens acceleration osv.

Om vi trycker på • inkopiera s -c på inmatningsraden i grundfönstret. Om man trycker på • igen får vi värdet av c (299 792 458) med enheten m/s. utsatt. -c liksom alla andra konstanter kan man naturligtvis skriva direkt från tangentbordet. _ får man genom att trycka 2 [P].

Enheter och formler

Om vi nu vill beräkna energin hos massan 1 kg med Einsteins berömda formel skriver vi enligt skärmbilden nedan. På skärmen syns också beräkningar för den potentiella energin (mgh) resp för den kinetiska energin ($mv^2/2$). Vi ser att vi får resultaten i enheten J (joule). Till höger syns några ytterligare exempel på beräkningar från fysiken.



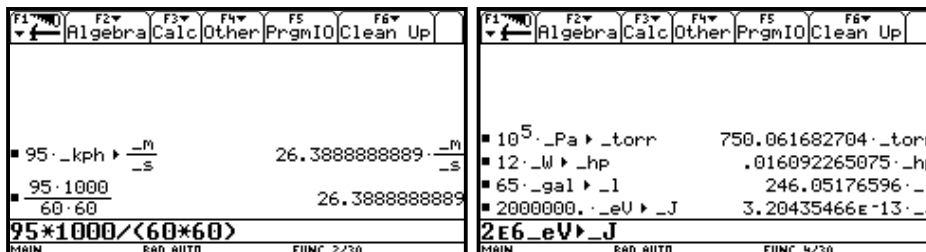
Beräkningen på andra raden nerifrån i den högra skärmbilden är beräkningen $T = \frac{pV}{nR}$ som följer ur den allmänna gaslagen. R_c är den allmänna gaskonstanten, vars värde är beräknat på sista raden.

Alla konstanter med beteckningar finns listade i handledningen till TI-92 Plus.

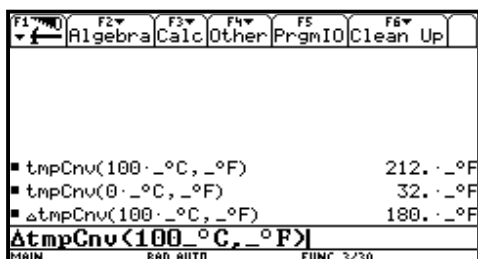
Totalt finns det ca 20 konstanter och ca 30 enheter att arbeta med.

Enhetsomvandlingar

man kan även göra omvandlingar mellan enheter med räknaren. Hur många m/s är 95 km/h? Att göra denna beräkning utan något hjälpmedel är naturligtvis inte särskilt krångligt, men vi visar hur man gör med ett lätt första exempel. Längst ner på skärmen finns även beräkningen ”för hand”. • får man med 2 [Y]. Nedan till höger syns några andra enhetsomvandlingar:



När det gäller omvandlingar mellan temperaturskalor måste man göra på ett något annorlunda sätt. Istället för • får man använda instruktionen tmpcnv resp •tmpcnv för temperaturdifferenser. Se skärmbilden nedan.



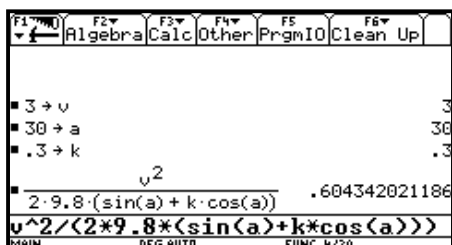
Ekvationslösaren

Ett block skjuts iväg med begynnelsehastigheten v m/s uppför ett lutande plan, vars vinkel mot markplanet är a grader. Friktionskoefficienten mellan blocket och det lutande planets yta är k . Hur långt upp längs planet kommer blocket att glida innan det stannar?

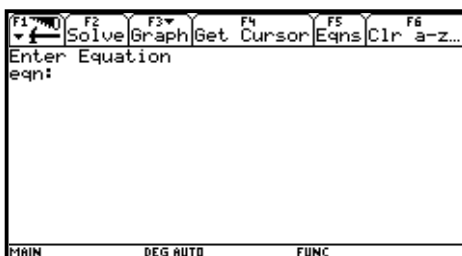
Detta är ett mekanikproblem som leder fram till ett uttryck för hur långt upp blocket kommer att röra sig. Vi kan kalla denna väg för s . Uttrycket blir

$$s = \frac{v^2}{2g(\sin a + k \cdot \cos a)}$$

Här kan vi naturligtvis beräkna s när vi känner värden på alla de variabler som förekommer i ekvationens högra led. Låt oss säga att begynnelsehastigheten är 3 m/s, vinkeln är 30° och friktionskoefficienten är 0,3. Vi matar in direkt i grundfönstret enligt skärmbilden nedan. Först tilldelar vi variablerna v , a och k värden.

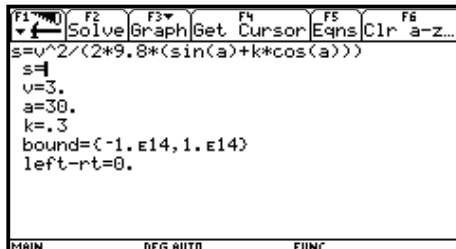


Ett annat sätt är att använda den ekvationslösare som finns i räknaren. Tryck först på O. Då kommer en meny fram med olika applikationer. Se skärmbilden till vänster nedan. Tryck nu på A. Se skärmbilden till höger nedan.



Nu kommer ett fönster upp för ekvationslösaren. Nu ska vi skriva in vår ekvation. Eftersom vi i princip ska skriva in samma uttryck en gång till går vi tillbaka till grundfönstret och kopierar uttrycket (5:Copy under É).

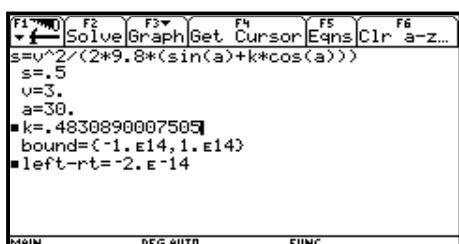
Nu börjar vi med att skriva $s =$. Sedan klistrar vi in uttrycket från grundskärmen (6:Paste under É). Då ser skärmen ut som på skärmbilden nedan till vänster. Vi trycker sedan på \bullet . Se skärmbilden till höger.



Eftersom vi tidigare hade angett värden för variablerna så finns de även i ekvationslösaren. Nu ställer vi markören vid den variabel som ska beräknas, anger ett *startvärde* och trycker sedan på \bar{N} . Ekvationslösarens program beräknar nu ett värde på s .



Vi kan nu lätt gå in och ändra vilka värden vi vill för att beräkna nya värden på s . Vi kan också placera markören vid vilken som helst av variablerna för att räkna ut ett värde på den variabeln. Låt oss säga att vi vill räkna ut friktionskoefficienten k för vissa värden på de övriga variablerna. Se skärmbilden nedan.

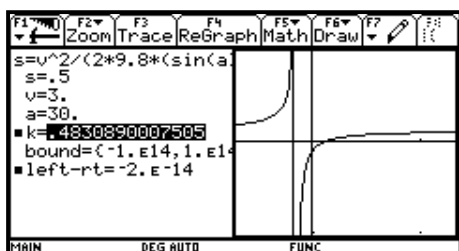


Några kommentarer om de nedersta raderna:

bound = betyder det område inom vilket räknarens program söker efter lösningar på vald variabel.

left-rt= betyder värdet på vänstra ledet – värdet på högra ledet. Vid den sista beräkningen blev detta värde $-2 \cdot 10^{-14}$.

Om vi trycker på \bar{O} delas skärmen i två delar och en graf ritas ut i den högra delen. Den okända variabeln, i detta fall k , visas längs x -axeln och left-rt längs y -axeln. Ett antal interaktiva verktyg är tillgängliga för denna graf.



Ekvationslösaren är naturligtvis mycket användbar när man ska lösa ut en variabel som är svår att lösa ut med algebraiska metoder. Låt oss säga att vi ska lösa ut variabeln a i uttrycket $s = \frac{v^2}{2g(\sin a + k \cdot \cos a)}$.

Vi matar in värden för de övriga variablerna och anger ett startvärde för a , t ex 30. Här kan det vara klokt att ange ett intervall för a . Vi matar in $\{0, 90\}$ som betyder att räknarens program ska leta efter en lösning i intervallet 0° till 90° . Se skärmbilden på nästa sida.



Här kommer ett annat exempel där man inte direkt kan lösa ut en variabel.

Vi har investerat pengar i en fond. Till fonden har inbetalts 5000 kr i början av varje år. Efter 5 år (6 inbetalningar) är avkastningen på det inbetalade kapitalet 2342 kr. Hur stor årlig ränta motsvarar det?

Vi har totalt investerat 30 000 kr. Det samlade kapitalet efter 5 år är då 32 342 kr. Vi går till ekvationslösaren och skriver in formeln. Vi anger 4 som startvärde på p .

$$A = K \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t - 1}{\frac{p}{100}}$$

I ekvationslösaren ser det ut så här när vi löst ekvationen och beräknat p .



Resultatet blir nästan precis 3 %.

På sista raden i ekvationslösarens fönster står det $\text{left-rt} = -6\text{E}-8$.

Detta värde (0,000 000 06) är alltså skillnaden mellan vänster och höger led i ekvationen. Av värdet kan vi se att vänster och höger led är lika för de första 7 decimalerna.

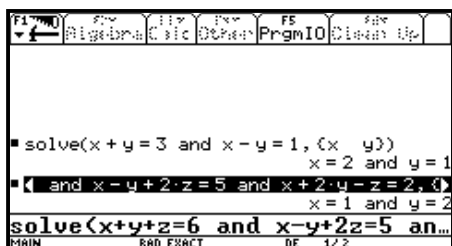
På samma sätt kan man lösa problem som handlar om att betala en skuld. Den formel man ska använda då är

$$A = K \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t}}{\frac{p}{100}}$$

Lösa system av ekvationer

Att TI-92 i sitt grundutförande kan lösa många ekvationer med reella och icke reella lösningar exakt är bekant. Med Plusmodulen installerad kan man nu också *direkt* lösa många *ekvationssystem* innehållande både linjära och icke-linjära ekvationer.

På skärmbilden nedan visas lösningarna till ett ekvationssystem i variablerna x och y och ett ekvationssystem i variablerna x , y och z .



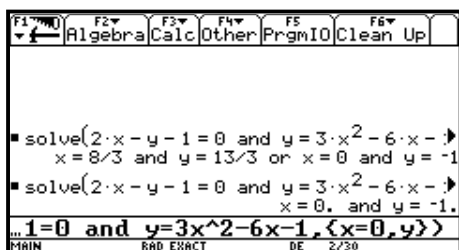
Det större ekvationssystemet kan vara svårt att se på skärmen eftersom instruktionen blir ganska lång. Det handlar alltså härom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \text{Lösningen blir} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Det är även möjligt att lösa system som innehåller icke linjära ekvationer.

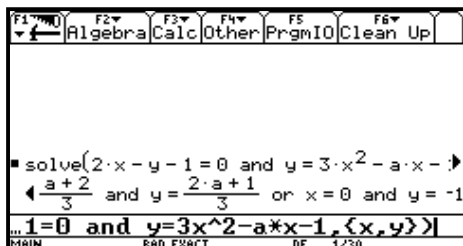
Vi ska nu lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = 3x^2 - 6x - 1 \end{cases}$$

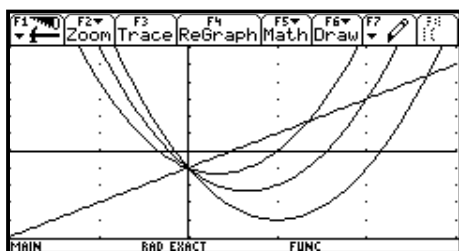


I uttrycket längst ner ha vi angett att vi bara är intresserade av den lösning för vilken $x = 1$.

Det är även möjligt att i ekvationerna ha med en variabel som man inte har tilldelat något värde, men som senare kan tilldelas ett sådant. I matematik kallas ofta sådana variabler för *parametrar*. Se exemplet nedan där andragsuttrycket innehåller parametern a .

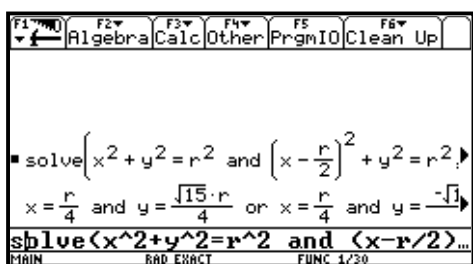


Vi tittar på denna situation grafiskt:

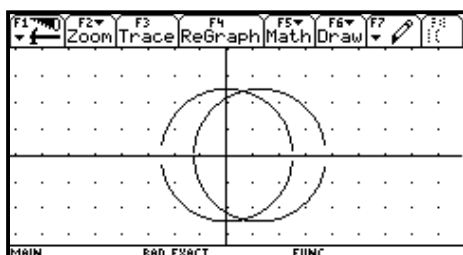


Vi har låtit parametern a anta värdena 6, 4 och 2. Vi ser att alla andragrads-
polynomen går genom punkten $(-1, 0)$.

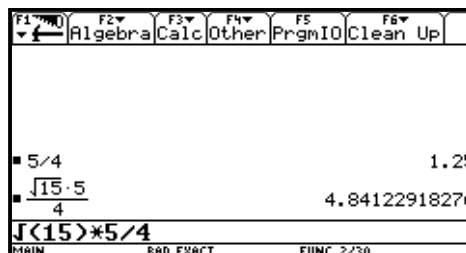
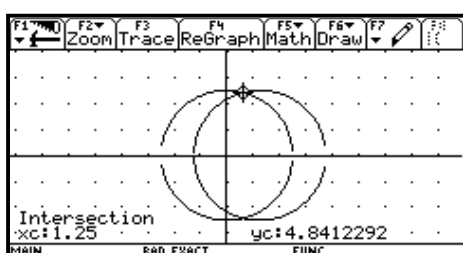
Här kommer ett litet svårare exempel med parametern a .



Den geometriska betydelsen är en cirkel med radie r och medelpunkt i origo och
en cirkel som är förskjuten $r/2$ längdenheter åt höger. Lösningen till
ekvationssystemet är cirklarnas skärningspunkter.



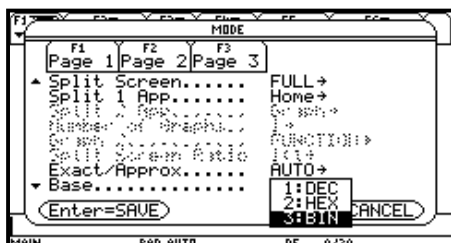
Om vi numeriskt beräknar en skärningspunkt får vi närmevärden enligt
skärmbilden nedan. Vi har här arbetat med cirklar med radierna 5. Det stämmer
bra med de numeriska värden. Se skärmbilden nedan till höger.



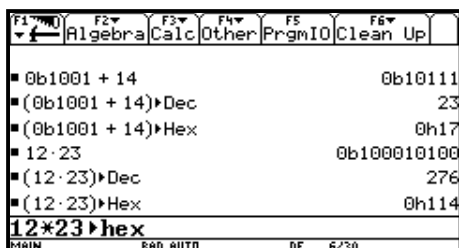
Arbeta med olika talsystem

Med TI-92 Plus kan du arbeta med heltal i decimalform, binär form och hexadecimal form. Genom en inställning under Page 3 kan du ställa in det talformat som du önskar för resultat av beräkningar.

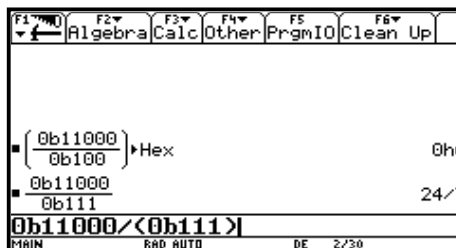
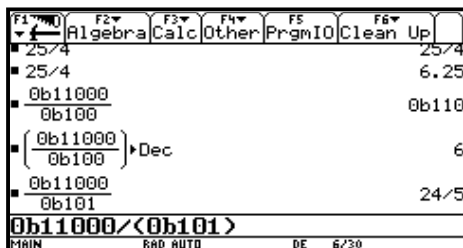
Vi börjar med att ställa om talformatet till binär form. Tryck på 3 och sedan \tilde{N} . Glöm inte att trycka på \bullet för att spara inställningen.



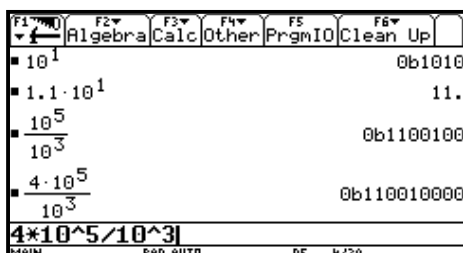
När du matar in ett tal i binär form måste du alltid skriva 0b framför talet. Du kan därmed "blanda" talformat vid inmatningar. Vi visar några olika exempel på skärmbilden nedan. Som du ser av bilden kan du i inmatningsuttryck konvertera till annat talformat oberoende av inställningen under 3. Tecknet \bullet får man genom att trycka 2 [Y].



Om du ska dividera två tal i binär form t ex, visas resultatet i binär form om det är ett heltal. Se exemplen nedan.



Resultat av beräkningar med tal i bråkform och i flyttalsform visas alltid i decimalform. Resultat av beräkningar med uttryck med potenser visas i binär form (om binär form är inställt som talformat) om resultatet är ett heltal. Se exempel nedan.



Differentialekvationer

Med TI-92 Plus kan du lösa många differentialekvationer exakt. I en del fall måste man dock ta till en numerisk metod. Sådana verktyg finns också på räknaren. Vi visar först ett trevligt exempel taget från en lärobok. Exemplet är en inhomogen ekvation av första ordningen.

Pelle bakar pepparkakor som har formen av ett hjärta. Han gräddar dem 5 minuter i 225 graders värme. När han tar ut plåten ur ugnen bjuder han Cilla. Hon vill inte äta pepparkakor som är varmare än 50°. Hur länge måste hon vänta innan hon smakar på pepparkakorna?

Exemplet är en tillämpning på *Newtons avsvlningslag*. Den säger att om en kropp med temperaturen T_0 placeras i ett rum med en temperatur T_a som är mindre än T_0 så svalnar den med hastigheten T' som bestäms av differentialekvationen

$$T' = -k(T - T_a)$$

Låt $T(t)$ vara pepparkakornas temperatur t minuter efter det att de tagits ut ur ugnen. $T(0) = 225$ och $T_a = 20$. Differentialekvationen kan då skrivas.

$$T' = -k(T - 20) \quad \text{dvs.} \quad T' + kT = 20k$$

Genom prövning finner vi att differentialekvationen har *partikulärlösningen* $T_p = 20$.

Motsvarande *homogena* ekvation $T' + kT = 0$ har den allmänna lösningen $T_h = Ce^{-kt}$, där C är en konstant.

Den *allmänna* lösningen till den inhomogena ekvationen är alltså

$$T = Ce^{-kt} + 20$$

Denna formel ger pepparkakornas temperatur $T = T(t)$ vid tiden t om vi bestämmer konstanterna C och k .

Begynnelsevillkoret $T(0) = 225$ ger $225 = Ce^0 + 20$, dvs. $C = 205$ och

$$T = 205e^{-kt} + 20.$$

Men hur ska vi bestämma k ? Konstanten k anger hur snabbt pepparkakorna kallnar och beror bl.a. på pepparkakornas tjocklek. Man kan bestämma k genom mätningar. Pelle har frågat en erfaren pepparkaksbagare som säger att Pelles pepparkakor svalnar från 225° till ungefär 150° på 1 minut.

Det ger $T(1) = 150$, dvs.

$$150 = 205e^{-k} + 20$$

$$e^{-k} = \frac{130}{205}, \quad \text{som ger} \quad -k = \ln \frac{130}{205}$$

$k = 0,455\dots$ Spara resultatet i räknarens minne.

Den tid t minuter som Cilla måste vänta får vi genom villkoret $T(t) = 50$. Det ger

$$50 = 205e^{-kt} + 20$$

$$30 = 205 e^{-kt}$$

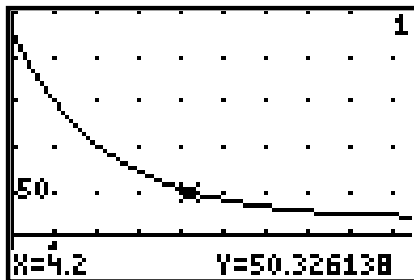
$$e^{-kt} = \frac{30}{205}$$

$$-kt = \ln \frac{30}{205}$$

Vi sätter in värdet på k och kan sedan enkelt lösa ut t .

$$t \approx 4,2$$

Cilla måste alltså vänta i ca 4 minuter. Nedan har vi ritat lösningskurvan med en TI-83.



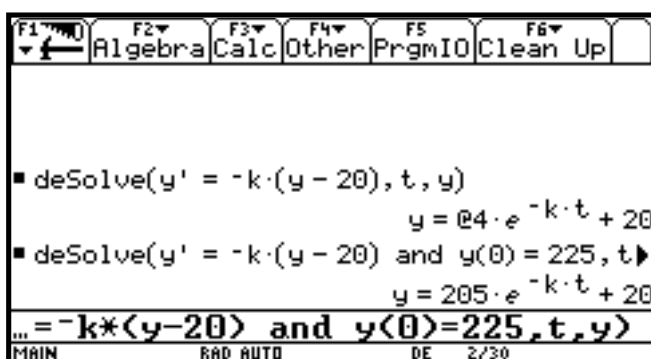
Bilden visar lösningskurvan $y = 205e^{-0.455t} + 20$.

Vi ska nu försöka lösa denna ekvation exakt. Vi går till räknarens grundfönster.

Under $\text{\textcircled{O}}$ Calc finns ett nytt verktyg DeSolve. Se nedan.



Vi trycker alltså bara på c. Då inkopieras instruktionen DeSolve till inmatningsraden. Nu ska vi skriva in vår differentialekvation. Vi skriver den först utan några begynnelsevillkor



Primecknet får man genom att trycka 2 ". Efter själva ekvationen skriver man sedan ett kommatecken och därefter den oberoende variabeln, ett kommatecken till och till sist den beroende variabeln. Man avslutar med en parentes.

På raderna längst ner har vi även lagt in ett begynnelsevillkor. Det gör man här med instruktionen `and y(0) = 225`. Man måste ha med mellanslag mellan ord och instruktioner. Se skärmbilden ovan.

Numeriska lösningsmetoder

Nu ska vi titta lite på räknarens funktioner för *numeriska* lösningar av differentialekvationer. Här kommer en uppgift tagen ur en annan lärobok.

En fallskärmshoppare som hoppar från ett flygplan gäller att han/hon till en början påverkas av en nedåtriktad kraft. Kraften, som ger föremålet en accelererad rörelse, är resultanten till föremålets tyngd och den bromskraft som orsakas av luftmotståndet.

Enligt kraftlagen kan vi skriva $mv' = mg - kv^2$, om vi antar att bromskraften är proportionell mot hastigheten i kvadrat. m är massan hos fallskärmshopparen och g är tyngdaccelerationen.. Konstanten k beror på ett antal olika variabler, t ex lufttryck och form och storlek hos det fallande föremålet.

Ekvationen ovan kan skrivas $v' = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$. Av ekvationen kan vi se att när v ökar

blir v' allt mindre. Accelerationen blir noll (konstant hastighet) när $g = \frac{k}{m} \cdot v_{\max}^2$.

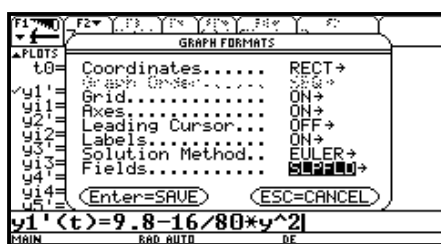
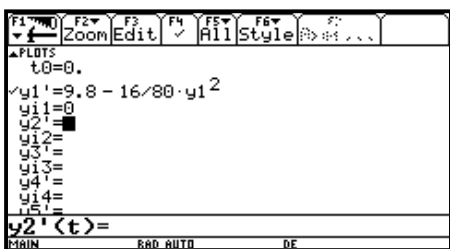
Om vi löser ut v_{\max} får vi $v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Vi antar nu att hopparens och fallskärmens sammanlagda massa är 80 kg, begynnelsehastigheten 0 km/h och värdet på konstanten 16 kg/m.

Vi börjar med att ställa in rätt grafformat. Detta gör vi genom att trycka på 3. Se skärmbilden nedan. Glöm inte att trycka på • .

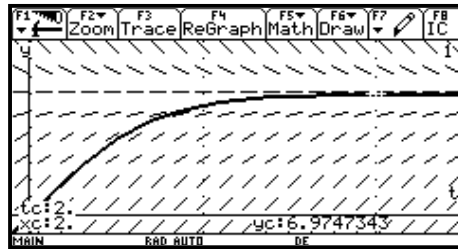
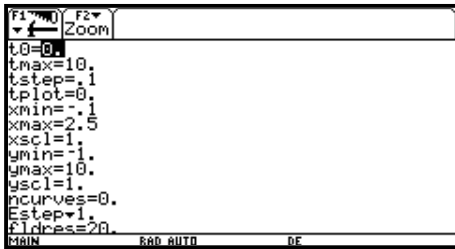


Öppna nu #-editor. Nu skriver vi in differentialekvationen enligt skärmbilden nedan. Startvärdet är (0, 0). Sedan öppnar vi startrutan Graph Format genom att trycka på • . Vi ställer in enligt skärmbilden nedan till höger.



Vi ska alltså använda Eulers metod och vi ska visa ett riktningfält (SLPFLD).

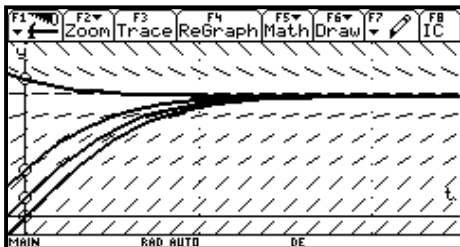
Sedan ska vi ställa in fönstret ordentligt. Fönsterinställningen nedan till vänster blir rätt bra! Sedan trycker vi på • %. Nu ritas först riktningfält och sedan lösningskurva ut. Steglängden är 0,1 och vi ritar lösningskurvan mellan 0 och 2,5 sekunder.



Vi ser att det numeriskt beräknade värdet för $t = 2$ är 6,97. Med Runge-Kuttas metod får vi för $t = 2$ värdet 6,98. Man kan också pröva effekten av att minska steglängden. Värdena stämmer bra med den *exakt* beräknade maximala hastigheten som är

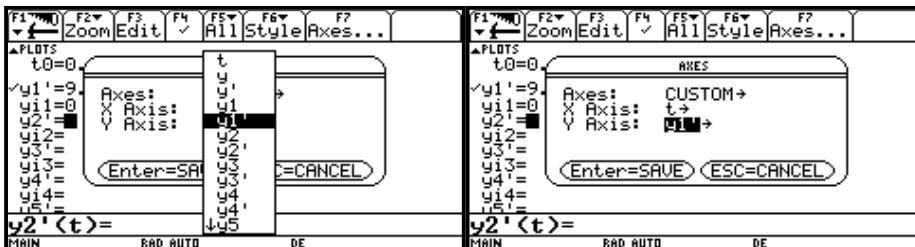
$$\sqrt{\frac{80 \cdot 9,8}{16}} \text{ m/s} = 7 \text{ m/s.}$$

Med ä har du tillgång till ett interaktivt verktyg för begynnelsevillkor. Du kan helt enkelt markera begynnelsevillkoren grafiskt och få fler lösningskurvor utritade.

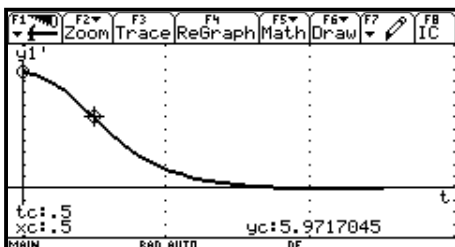


Om du stänger av allt ritande av fält kan du i #-editor ställa in axlarna för att visa olika typer av samband som gäller för differentialekvationen.

Tryck på \# Axes. Där ställer du först in Axes:CUSTOM. Sedan väljer du ur en lista vilka variabler som ska gälla för x - resp y -axeln.



Kurvan nedan visar t.ex. hur accelerationen ($y1'$) beror av tiden.



System av differentialekvationer

Nu ska vi titta på ett exempel på ett system av första gradens differentialekvationer. Förutom lösningskurvor för de båda differentialekvationerna ska vi se hur man genom att ställa om axlarna på ett intressant sätt.

Det handlar här om den *biologiska modellen* jägare/bytte med rävar och harar. Modellen uppställdes första gången av den amerikanske biologen Lotka och den italienska matematikern Volterra på 1920-talet.

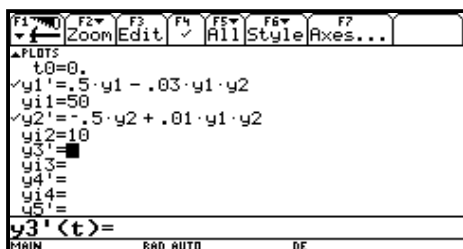
Ekvationssystemet kan skrivas

$$x' = ax - bxy$$

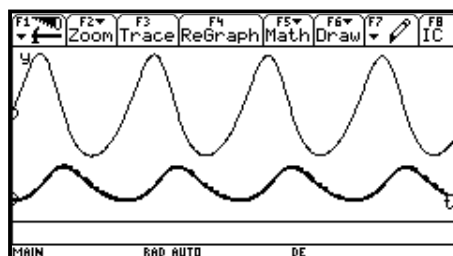
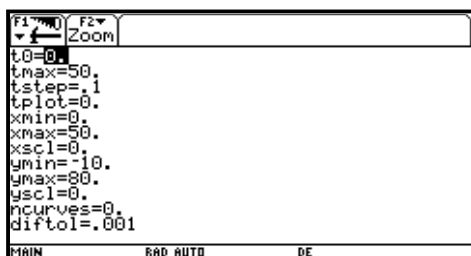
$$y' = -cy + dxy$$

där x är antalet harar och y är antalet rävar.

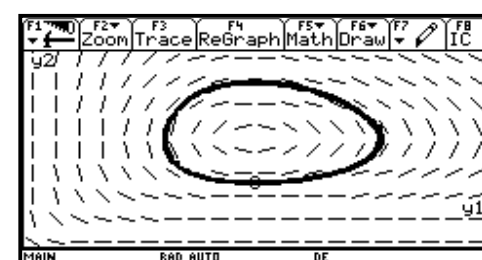
Vi matar alltså in ekvationerna i vår editor med värden på parametrarna a , b , c och d och lägger också in startvärden. Vi använder Runge-Kuttas metod.



Lösningsskurvorna ser du till höger nedan. Den tjockare kurvan är antalet rävar och den tunna antalet harar. Det inställda fönstret ser du till vänster.



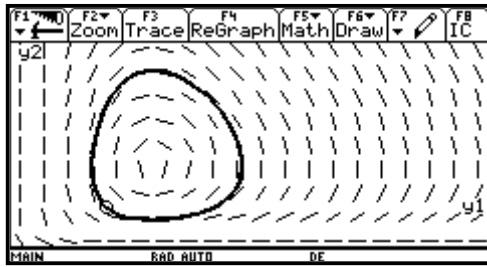
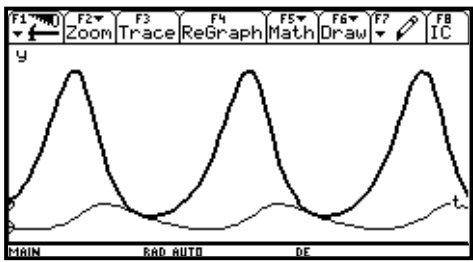
En liten förändring av startvärden och parametrar i modellen kan över tid ge helt andra förändringar av bestånden av harar och rävar. Om vi nu ändrar till Dirfld under Field (tryck \bullet) ska vi se på en annan bild av utvecklingen. Vi ställer först om axlarna genom att trycka \hat{a} när vi är i editorn för inmatning av ekvationer. Glöm inte att trycka på \bullet för att spara inställningen.



Här har vi nu antalet harar på x -axeln och antalet rävar på y -axeln. Vi får en bana i det s.k. *fasplanet*. Banan kallas ofta för ett *fasporträtt*. Det ger en annan bild av hur populationen utvecklas.

Nedan visas motsvarande diagram över ett annat fall där systemet också hålls i jämvikt. Det ser man speciellt i fasporträttet. Utvecklingen går runt i samma bana hela tiden.

Ekvationerna är här $y\bullet1 = -y1 + 0.01y1\bullet y2$, $y\bullet2 = 3y2 - y1\bullet y2$ med startvärden 2 för $y1$ och 5 för $y2$.

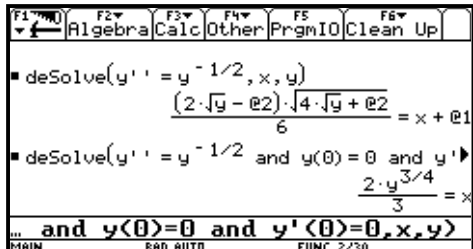


Andra ordningens ekvationer

Med räknaren kan man även lösa ett stort antal ekvationer av andra ordningen *exakt*. När man matar in y'' får man trycka två gånger på y' för skriva andraderivat. Vi går direkt på ett exempel:

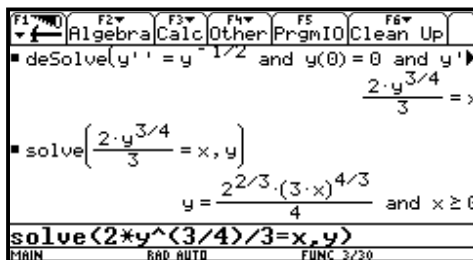
Vi ska lösa ekvationen $y'' = y^{-1/2}$.

Vi går till grundfönstret och skriver enligt skärmbilden nedan.



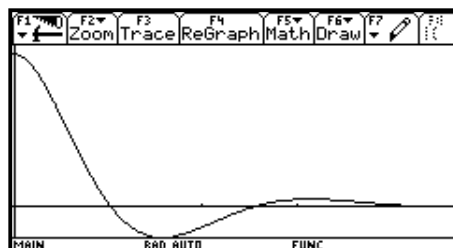
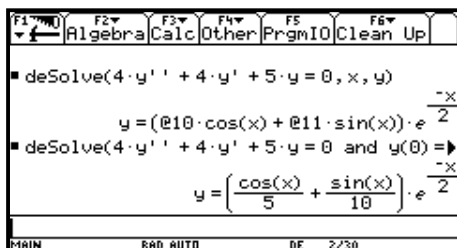
Det första uttrycket, där vi inte angav några begynnelsevillkor, ser ganska besvärligt ut. Med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$, som skrivs and $y(0)=0$ and $y'(0)=0$, får vi ett uttryck som ser något lättare ut.

Eftersom vi vill att y ska uttryckas explicit ska vi lösa ut y . Även om det är ganska enkelt att göra "för hand" låter vi räknaren göra detta.



Ett nytt exempel. Vi söker den lösning till differentialekvationen $4y'' + 4y' + 5y = 0$ där $y(0) = 1/5$ och $y'(0) = 0$.

I skärmbilden nedan har vi först tagit ut den allmänna lösningen. Därefter har vi lösningen med begynnelsevillkoren. Till höger har vi också ritat lösningen för $0 \leq x \leq 3\pi$.



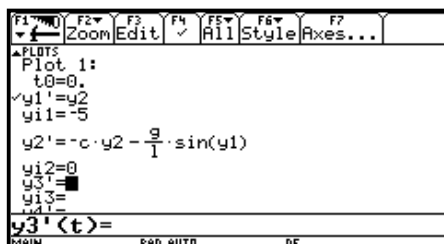
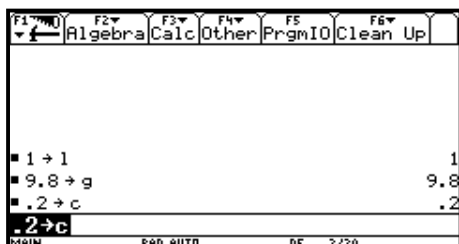
På sista sidan visar vi hur man löser en andra ordningens ekvation som man inte kan lösa exakt. Då får vi ta till en numerisk metod. När man skriver in ekvationer av andra ordningen måste man skriva in den som ett system av första ordningens ekvationer. På nästa sida visar vi med ett exempel om pendelrörelse hur man skriver in ett sådant system.

En standardmodell för rörelsen hos en pendel med dämpning är

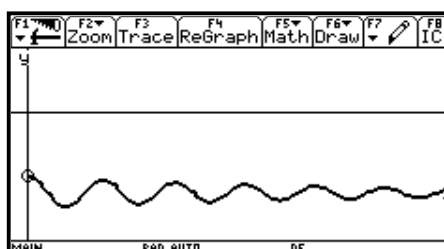
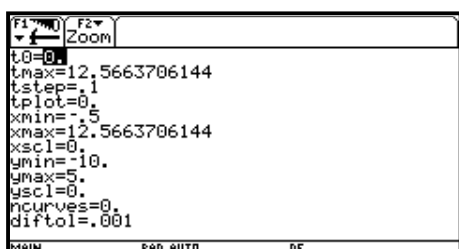
$$y''(t) = -Cy'(t) - \frac{g}{l} \sin y(t)$$

Utslagsvinkeln är y radianer, C är konstant som beror på friktion och luftmotstånd, g är tyngdaccelerationen och l är pendellängden. Om pendellängden är l m är den sträcka pendelns vikt rör sig $l \cdot y$ m.

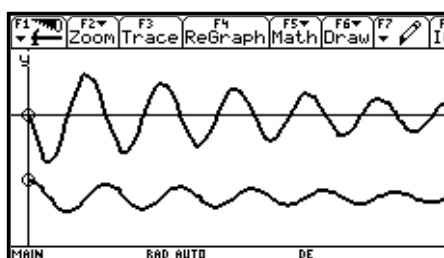
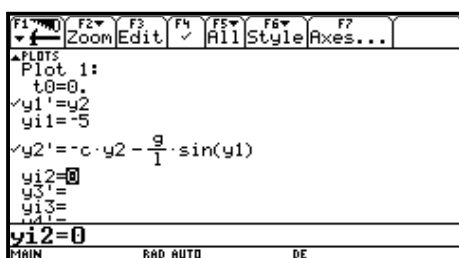
Först tilldelar vi C , g och l värden. Se nedan till vänster. Sedan matar vi in våra ekvationer som ett system av första ordningens ekvationer. Vi matar också in begynnelsevärden. Se skärmbilden till höger. Observera hur man skriver in en andra ordningens ekvation med $y1$ och $y2$.



Vi använder Runge-Kuttas metod med $tstep = 0.1$. Se fönsterinställningen nedan till vänster. Till höger ser vi lösningskurvan.



Genom att markera (görs med \ddot{U}) både $y1'$ och $y2'$ kan du rita både lösningskurvan och dess derivata. Se nedan.



Genom att ställa om formatet till $DirFld$ (tryck $\bullet \ddot{U}$) kan man rita ett *fasporträtt* i fasplanet. Se vänstra figuren nedan. Om vi i ekvationen tar bort den dämpande faktorn ($y2' = -g/l \cdot \sin(y1)$) får vi fasporträtt som som går runt i samma bana. En tolkning kan vara att energin i systemet bevaras.

