Grafräknare för alla

Texas Instruments utbildningskvällar maj 1997

Ett antal exempel på hur du kan använda grafräknare i undervisningen

Dagens grafiska miniräknare är avancerade små apparater. Det som för några år sedan bara kunde utföras av ganska kraftfulla dator-program kan nu utan vidare utföras med de nya räknarna. På de följande sidorna ger vi några tips om var i matematikkurserna användning av räknare kan komma in och bli användbara verktyg för intressant matematik. Vi har koncentrerat oss på exempel som kan förekomma på de inledande matematikkurserna på gymnasiet.

Det handlar bl a om tåg som bromsar, pilkastning och hur man kan räkna på sannolikheter i spel. Exemplen är ibland hämtade från olika läromedel, matematiktidskrifter och från olika matematiksidor på Internet.

I princip har vi utgått från de funktioner som finns på den räknaren TI-80. De exempel som tas upp och de bilder av räknarens display som förekommer i detta material är gjorda med räknaren TI-83, och det speciella program TI-83 Link, som gör att man kan koppla upp sin räknare till en dator.

Räkna ungefär och exakt

Avrunda pengar

Antag att du köper en dator vid en resa i Tyskland. Du betalar 1880 DEM med ett betalkort. Växelkursen vid köpet var 21,35 DEM för 100 svenska kronor. Vad fick man vid växlingen betala för 1 DEM och vad kostar datorn i svenska pengar? Avrunda till hela kronor.

1 DEM kostar

$$\frac{100}{21,35}\ \text{SEK} \approx 4,68\ \text{SEK}$$

Datorn kostar i svenska pengar $4,68 \cdot 1880$ SEK ≈ 8798 SEK.

Vad är det för konstigt med det här?

Vi gör beräkningen med räknaren.

```
100/21.35
     4.683840749
Ans*1880
     8805.620609
```

Som ni ser har vi *ingångsdata* och *resultatet* av beräkningarna direkt på räknarens skärm. Hur mycket 1 DEM kostar står på andra raden och sedan fortsätter vi beräkningarna med detta värde på rad 3. Resultatet av beräkningarna står sedan på rad 4. Ni ser att vi får resultatet 8806 kr. På grund av att vi gjorde en avrundning när vi beräknade vad 1 DEM kostar så förstorades sedan felet i avrundningen 1880 gånger när vi beräknade vad datorn kostade.

Med de nya räknarna kan man direkt fortsätta beräkningarna med ett mycket noggrant delresultat och man får i detta fall ett bättre resultat i beräkningen av priset i svenska kronor.

Eftersom de nya räknarna har en skärm där det ryms flera rader kan man följa sina beräkningar och även se delresultat. På räknaren trycker man i detta fall bara x 1800 vid de fortsatta beräkningarna. ANS är alltid resultatet av den sista beräkningen. Vi ska visa några fler exempel på detta.

Upprepade beräkningar/Sparande

Du sätter in 5000 kr på ett konto där inlåningsräntan är 7 %. Hur stort är det sparade beloppet efter 1 år, 2 år, 3 år...? Vi antar att eleverna kan räkna med förändringsfaktor.

Se på skärmbilden nedan som egentligen förklarar allt.

```
5000*1.07
         5350.00
Ans*1.07
         5724.50
Ans*1.07
         6125.22
```

Eftersom resultatet av den sista beräkningen alltid sparas i minnet (i variabeln ANS) är det bara att multiplicera med 1,07 och sedan trycka på ENTER. Detta kan man upprepa hur länge som helst.

Som ni ser är alla resultat avrundade till 2 decimaler. Med räknaren kan man ställa in detta. Det är bara på skärmen som vi ser resultaten avrundade. Inne i räknaren sker beräkningarna med väldigt många siffrors noggrannhet. Vi behöver då inte vara rädda att förlora i noggrannhet i de fortsatta beräkningarna.

Det finns naturligtvis andra sätt. Ett annat sätt är att betrakta det sparade kapitalet som en exponentialfunktion, $y = 5000 \cdot 1,07^{x}$.

Vid fem på varandra följande årsskiften insättes 5000 kr på ett bankkonto. Hur mycket finns på kontot efter 1 år, 2 år ...? Räntesatsen är hela tiden 6,5 %.

Hoppsan, det här ju matematik som handlar om summan av geometrisk serie. Det ingår ju först i kurs C! OK, det är riktigt, men den nya hjälpmedlen ger ju faktiskt möjligheter att syssla med lite mer realistiska problem.

- Vi börjar med att mata in 5000 på räknaren. Därefter trycker vi på <ENTER>.
- Sedan multiplicerar vi det sist beräknade resultatet med 1,065 och lägger till 5000. Detta är ju vad som sker vid varje årsskifte. Kapitalet räknas upp med 6,5 % och vi sätter in 5000 kr. Sedan trycker vi på <ENTER>igen.
- Resultatet efter 1 års sparande står då till höger på nästa rad. Det blir 10325,00 kr.
- Nu kommer själva grejen. Vi fortsätter genom att bara trycka på <ENTER> så många gånger vi vill. Resultatet kommer på nästa rad till höger. Varje gång vi trycker på EFTER utförs beräkningen

  $(\text{Sista beräkningsresultat}) \cdot 1,065 + 5000$ Se skärmbilden nedan.

```
           5000.00
Ans*1.065+5000
          10325.00
          15996.13
          22035.87
          28468.20
          35318.64
```

Upprepade beräkningar/betala skuld

Låt oss ta ett exempel till där det handlar om att avbetala en skuld istället.
Ett studielån på 100 000 kr avbetalas genom lika stora avbetalningar vid varje årsskifte. Hur stor är den återstående skulden varje år om skulden räknas upp med 4,5 % varje år och de årliga inbetalningarna är 12000 kr?

Följande skärmbild ger en samlad bild av inmatningar och resultat. Efter 4 år är den återstående skulden 67913,57 kr.

```
100000
         100000.00
Ans*1.045-12000
          92500.00
          84662.50
          76472.31
          67913.57
```

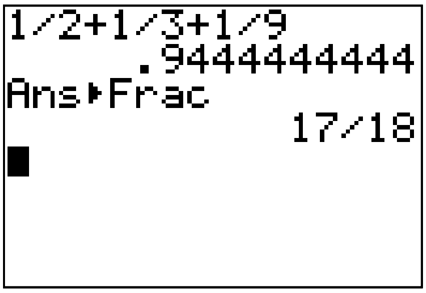
Om vi fortsätter att trycka på ENTER ser vi att efter 10 år är skulden 7838,43 kr. Det tar alltså ca 10 år att betala denna studieskuld.

Räknaren kan arbeta exakt

Med räknaren kan man göra exakta beräkningar på tal i bråkform. Låt oss säga att vi ska beräkna

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

Om vi gör detta på räknaren får vi resultatet 0,94444... . genom att använda en funktion som heter FRAC (Frac = FRACTION) så kan vi direkt få ett exakt resultat i bråkform. Se skärmbilden nedan.

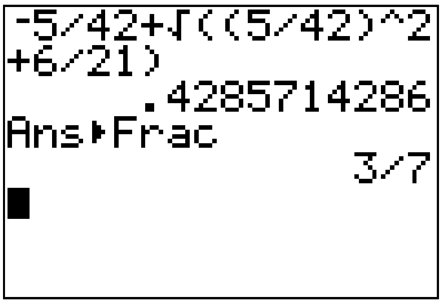


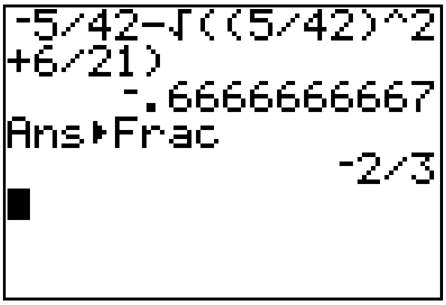
På TI-80 finns ett antal funktioner som handlar om förenkling av bråk. Man kan t ex direkt få resultat i blandad form.

Vi löser nu en andragradsekvation exakt med räknaren.

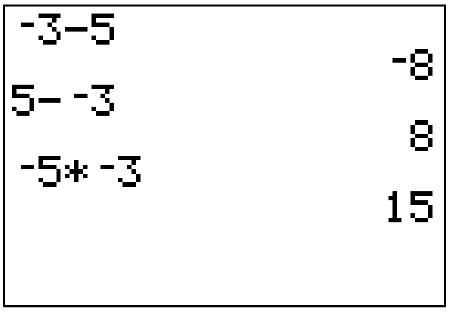
Lös andragradsekvationen $21x^2+5x-6=0$.

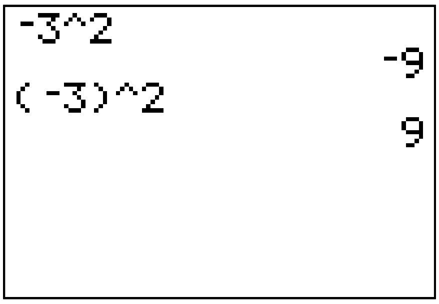
De båda lösningarna till denna andragradsekvation kan vi se på skärmbilderna nedan.





Observera skillnaden mellan det kortare och längre minustecknet. Det kortare, markerat (-) på räknarens tangentbord, är det vi använder för att skriva negativa tal. Det längre, markerat med – på tangentbordet är operatorn för subtraktion. Titta på skärmbilderna nedan.





Funktionsbegreppet

I de flesta skolor finns idag program som kan rita linjer och kurvor samt utföra olika beräkningar på inmatade funktioner. Under senare tid har grafiska miniräknare övertagit datorprogrammens roll. Även på yrkesinriktade gymnasieprogram tycker vi att du som lärare då och då ska låta eleverna använda grafräknare.

Vi har på de följande sidorna valt att ta upp olika exempel där det finns ett *matematiskt samband*. Flera av sambanden är *inte linjära*.

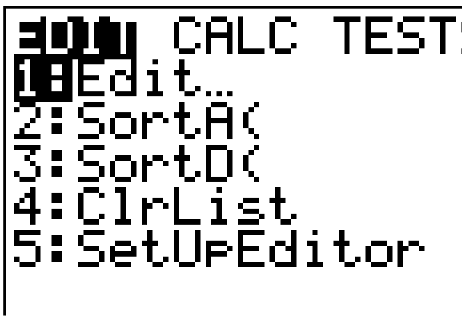
Vill ni låta eleverna träna på räta linjer, så kan ni med fördel välja några av de exempel på linjära funktioner som finns i läromedlet. Låt eleverna variera *k*-värdet och sedan se motsvarande räta linje för de samband som uttrycker en proportionalitet. De bör då själva upptäcka att linjerna blir brantare när *k*-värdet ökar. Ta tid på er att förklara vad detta betyder i de olika sammanhangen. Ta också upp samband där det finns en fast del som kan varieras.

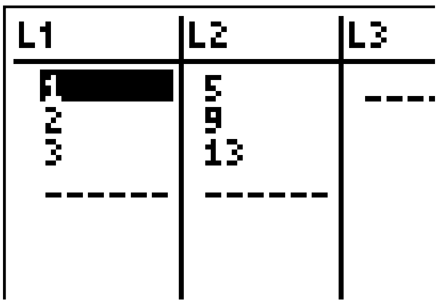
Att se mönster

Titta på figurerna nedan.

Här handlar det om att se *mönster*. Vi visar nu hur man kan ha hjälp av en räknare för att snabbt visualisera sambanden. I uppgiften gäller det att hitta sambandet mellan figurnummer och antalet stickor.

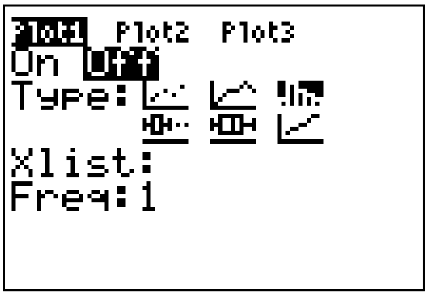
Tryck på <STAT>. Då kommer menyn till vänster upp. Om man nu väljer alternativ 1 får man upp räknarens "kalkylblad". Se bilden till höger. Vi har i den första kolumnen matat in figurnummer och i den andra antalet stickor.

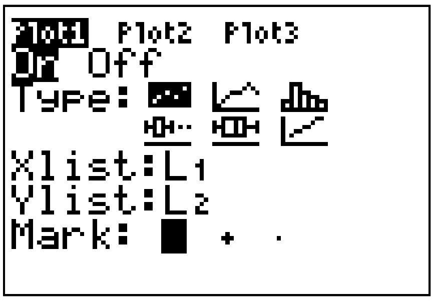




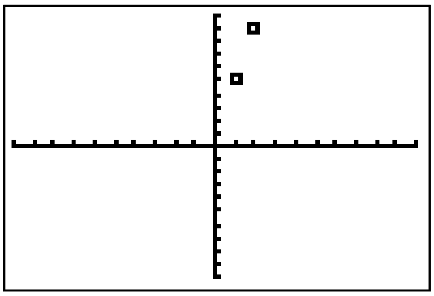
Nu ska vi rita upp våra data i ett xy-diagram. Se nästa sida.

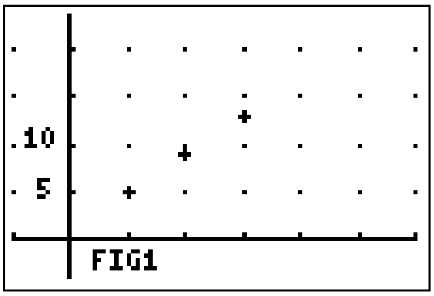
Vi går till menyn för statistiska plottningar, <STAT PLOT>, och väljer alternativ 1. Se vänstra bilden nedan. Nu ska vi göra inställningar i detta fönster som passar för de data vi ska representera i diagramform. Se bilden till höger nedan.





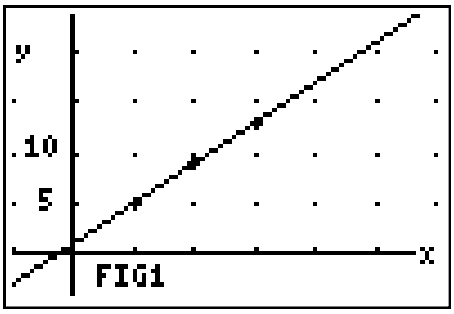
Nu kan vi trycka på <GRAPH>. Då får vi diagrammet nedan till vänster. Vi se bara 2 punkter i diagrammet. Fönstret var inställt i s.k. standardformat och nu vill vi ställa om det för att det ska passa för de data vi har. Det kan göras på flera sätt. Antingen genom att använda ett speciellt zoomnings-verktyg, *Zoomstat*, i zoom-menyn eller genom att manuellt ställa in fönstret. Vi väljer det senare alternativet.

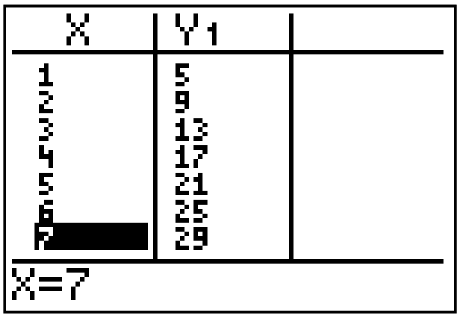




Efter en stunds diskussion om hur punkterna ligger kan man mata in olika funktionssamband och se om man träffar “rätt“. Det kan man göra direkt i funktionseditorn, <Y=>. Plottning av statistiska data och plottning av funktioner kan visas på samma skärm.

Vi vill betona att ett prövande bör utgå från det som är viktigast, nämligen att just “se mönster“ i figurerna.

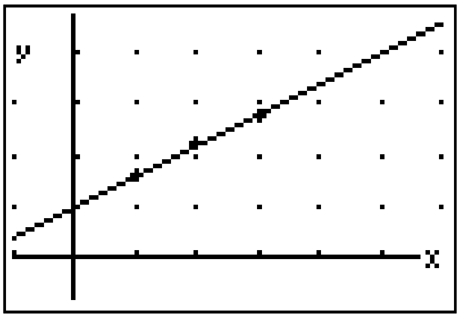


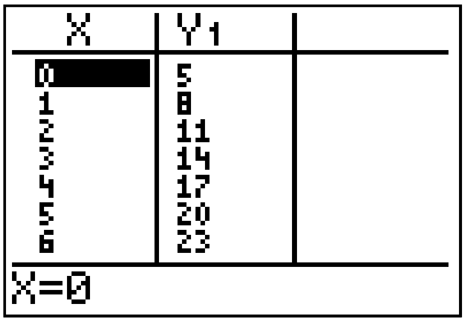


Man kan också ta fram en värdetabell på räknaren och kontrollera att det stämmer för högre figurnummer.

Nästa uppgift är kanske inte alldeles lätt. Här kan man resonera på olika sätt.

Man kan t ex tänka sig en “figur 0“, som består av två ihopsatta trianglar. Den figuren har 5 stickor. Sedan ökar antalet stickor med tre för varje figur. Formeln blir då $S = 5 + 3 \cdot x$. Med en värdetabell kan man kontrollera att det stämmer.





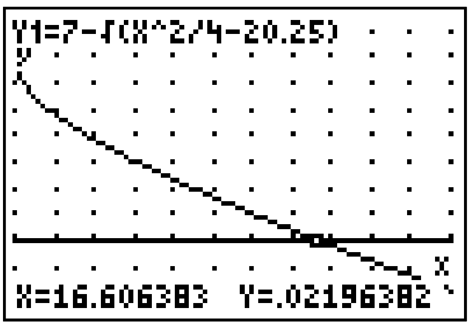
X	Y1	
0	5	
1	8	
2	11	
3	14	
4	17	
5	20	
6	23	

X=0

Hänga upp en lampa

Här kommer en uppgift som handlar om en lampa som hänger i en lina mellan två hus. Sambandet mellan linans längd och höjden över gatan visas i grafen nedan. Man ser då att kurvan skär x-axeln för x _ 16,6. Vilken situation motsvarar detta i verkligheten? En sådan fråga kan man ställa till eleverna. Det viktiga i detta sammanhang är att förstå problemet, införa variabler och ställa upp ett samband mellan variablerna.

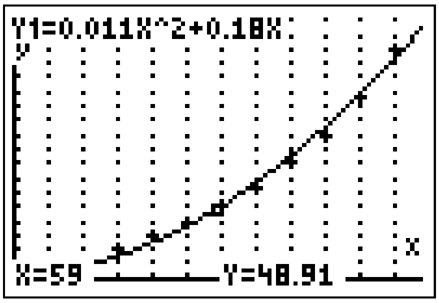
För att beräkna ett uttryck för hur lampans höjd beror av linans längd måste man använda Pythagoras sats. När man väl har fått ordning på uttrycket för sambandet mellan längd på linan och höjd över gatan kan man ta till räknaren.



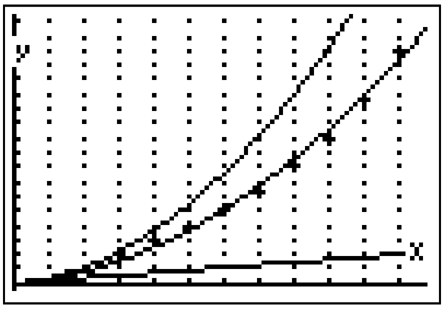
Bromsa en bil

Nedan visas ett diagram för stoppsträckan hos en bil vid olika hastigheter. Detta är ett exempel där man kan använda en *matematisk modell.*
Modellen är att stoppsträckan består av bromssträcka och reaktionssträcka. Bromssträckan är proportionell mot hastigheten i kvadrat och reaktions-sträckan direkt proportionell mot hastigheten. Modellen blir $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$, där y är stoppsträckan och x hastigheten. a och b är proportionalitets-konstanter.

Med räknare har vi räknat vi på den här modellen och resultatet blir $y = 0,011x^2 + 0,18x$. Se figuren nedan.



I figuren på nästa sida har vi även ritat hur reaktionssträckan ökar och en tänkt funktion för stoppsträckan vid vinterväglag. Det finns mycket ni kan diskutera utifrån dessa grafer. T ex kan man be eleverna att försöka beräkna reaktionstiden och hur mycket stoppsträckan ökar från sommarväglag till vinterväglag.



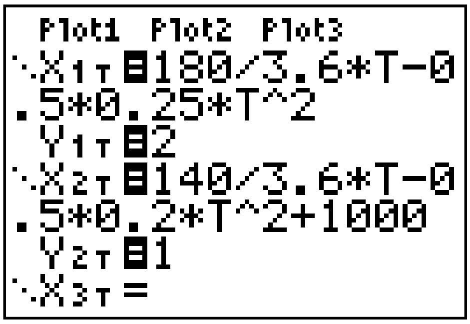
Visa själva rörelsen - inte sambandet

Istället för att visa hur bromssträckan beror av hastigheten kan man tänka sig att försöka visa *själva rörelsen,* dvs hur inbromsningen går till. Då kan man använda sig av funktioner i parameterform, där x och y båda beror av en parameter t som i detta fall är tiden.

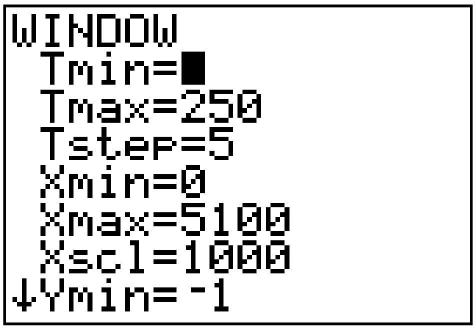
Vi tänker oss nu att vi har två tåg. Det ena tåget har hastigheten 180 km/h och får vid inbromsning en retardation på 0,25 m/s^2. Det andra tåget har hastigheten 140 km/h, ligger 1 km framför och får en retardation på 0,20 m/s^2.

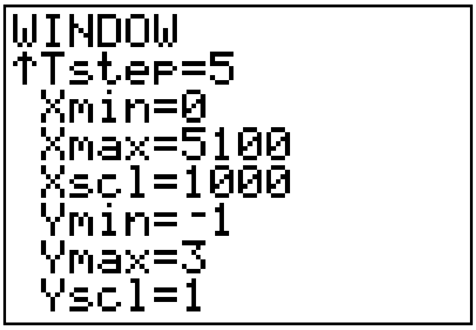
I och för sig var man i det ursprungliga problemet, hämtat från ett fysikläromedel, bara ute efter att beräkna bromssträckan, men det kan vara intressant att se hur tågen bromsar in. Det är faktiskt möjligt att visualisera detta. Det samband vi kan använda oss av är $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, som visar hur lång sträcka tåget gått under tiden t. a är i detta fall retardationen, dvs vi får ett negativt tecken framför den sista termen i formeln.

Så här ställer vi in ekvationseditorn. Vi låter rörelserna ske efter linjerna y =2 resp y = 1.



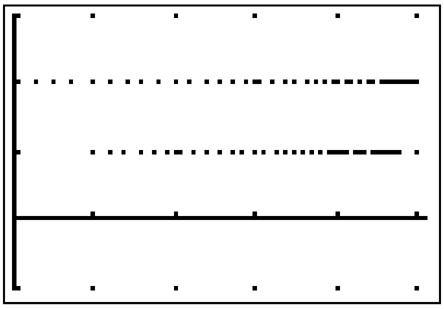
Här är fönsterinställningen. Vi ritar våra “kurvor“ med inställningen DOT, dvs prickade kurvor.

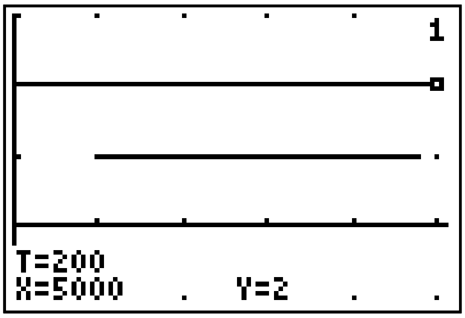




Nu trycker vi på <GRAPH>. Det tar ett par sekunder att rita upp rörelsen och vi hinner se att det långsammare tåget blir omkört. Pricklinjerna gör att vi kan se att tågen bromsar in. Det blir tätare och tätare mellan prickarna. Avståndet mellan varje prick motsvarar hur långt tågen hinner på 5 sekunder. Se vänstra bilden nedan.

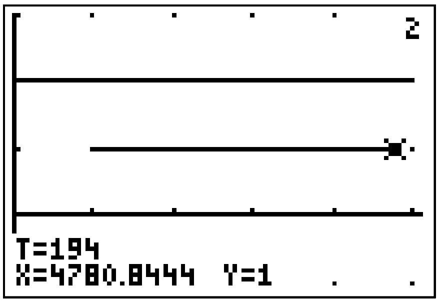
Om vi nu trycker på <TRACE> kan vi följa tågens rörelse. Bilden till höger nedan visar när det snabbare tåget har stannat. Det har gått 200 sekunder och inbromsningssträckan är 5000 meter. Vi har nu ställt in Tstep till 1. Därför ser linjerna heldragna ut.





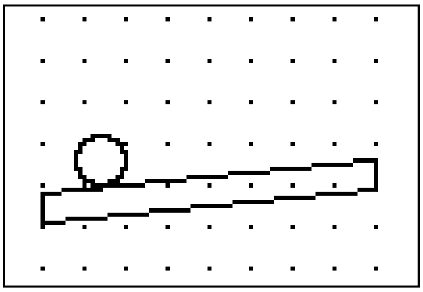
Hur långt har det andra tåget hunnit efter 200 sekunder?

Om vi placerar Tracemarkören vid det andra tåget och “backar tiden“ lite ser vi att detta tåg tycks stanna efter 194 sekunder. Inbromsningssträckan blir 4781 meter.



Om vi ställer in grafritningen på “spårning“ (finns på TI-83) så kan vi också se hur båda tågen tycks vända. Detta har nu inget med verkligheten att göra. Snarare är det ett “grafiskt bevis“ på att hastighet och acceleration har både storlek och riktning.

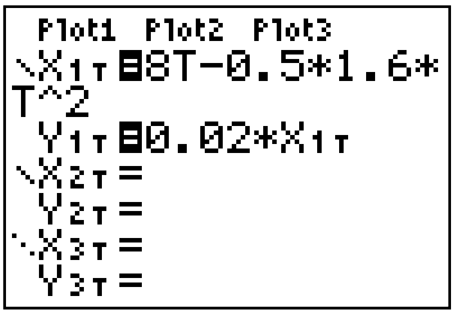
Följa en boll



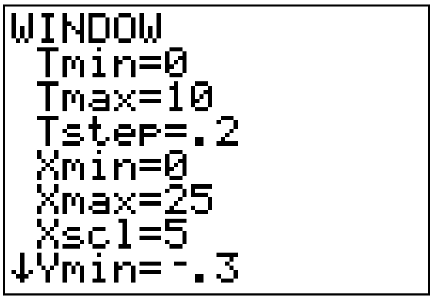
I nästa exempel ska vi dock se hur vi kan få en boll att vända i sin rörelse. Här simulerar vi ett lutande plan. Det ursprungliga problemet bestod i att beräkna retardationen om begynnelsehastigheten var 8 m/s och bollen återkom till utgångspunkten efter 10 sekunder. Härur kan man beräkna att retardationen blir 1,6 m/s^2.

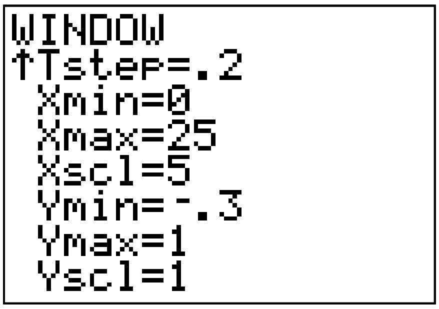
Ekvationen X_{1T} = 8*T – 0,5*1.6*T^2 är ju själva rörelsen. Med Ekvationen Y_{1T} = 0.02*X_{1T} fuskar vi lite och lägger in ett lutande plan.

Ekvationseditorn syns nedan.

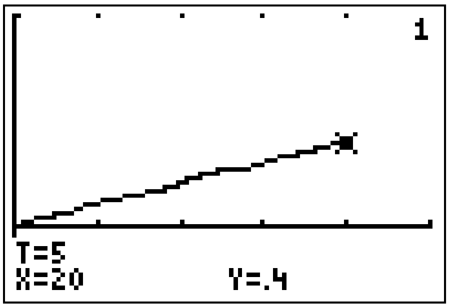


Fönsterinställningarna syns nedan.

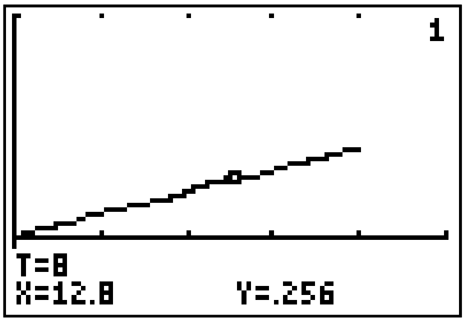


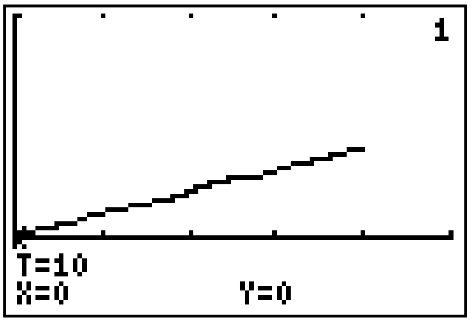


Nu trycker vi på <GRAPH>. På ett par sekunder ritas grafen upp. Vi trycker sedan på <TRACE> och följer rörelsen upp längs det lutande planet. Vi ser att bollen stannar efter 5 sekunder. Den har då hunnit 20 meter.



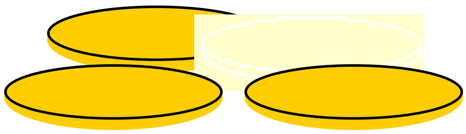
Vi fortsätter nu att följa rörelsen. Se bilderna nedan.





Efter 10 sekunder är bollen ner igen. På TI-83 kan man följa rörelsen genom att spåra. Markören är då en lite boll (partikel). Det blir väldigt illustrativt.

Kasta pengar leder till exponentialfunktioner



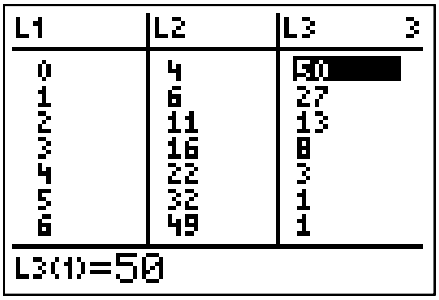
Det här är ett experiment som man kan göra för att visualisera exponentiellt växande och avtagande. Vi föreslår att ni gör detta experiment i slutet av studierna av exponentialfunktioner. De kommer förhoppningsvis att upptäcka att de funktioner de genom experimenten kommer fram till visar sig vara av samma typ som de sysslat med tidigare.

För detta experiment gäller det att samla ihop lite småpengar. Man behöver ca 50 mynt för att kunna genomföra experimenten. Det går naturligtvis lika bra med ngt annat som har en fram- och en baksida.

Experimentet börjar med att man kastar fyra mynt på bordet och räknar antalet krona man får. Får man t ex två krona lägger man två mynt till sina tidigare fyra och kastar nästa gång sex mynt. Så här håller man på tills pengarna tar slut.

I det andra experimentet gör man tvärtom. Man börjar med 50 mynt, kastar dessa och räknar hur många krona man får. Sedan tar man bort dessa mynt och fortsätter med de man har kvar.

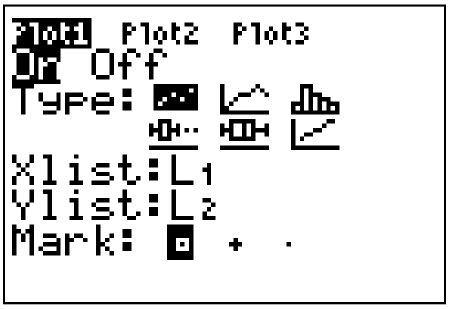
Här är protokoll från två experimentserier Vi har matat in våra data i räknarens statistikeditor. Först tycker vi på <STAT> och sedan väljer vi 1:Edit så vi kan göra våra inmatningar.

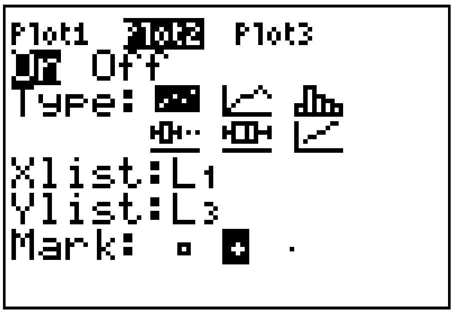


L1	L2	L3 3
0	4	50
1	6	27
2	11	13
3	16	8
4	22	3
5	32	1
6	49	1

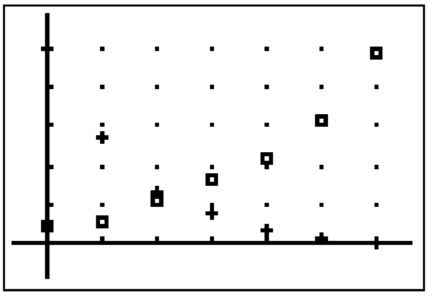
L3(1)=50

Sedan ritar vi våra data i ett xy-diagram (*scatter*). Vi trycker på först <STAT PLOT>. Vi ser till att vi inte har några funktioner markerade i ekvationseditorn (Y=). Därefter gör vi inställningarna för diagramritningen. Se bilderna nedan som gäller för båda serierna.

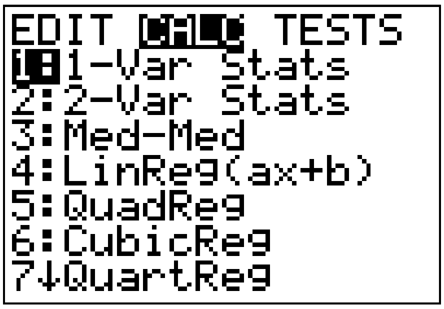


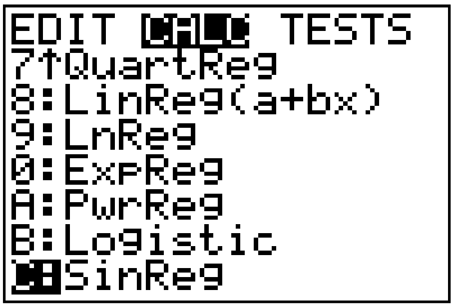


Nu vet vi inte vilken fönsterinställning vi har så vi trycker på knappen <ZOOM> och väljer alternativet Zoomstat, som betyder att fönstret anpassas efter våra data. Se diagrammet på nästa sida.

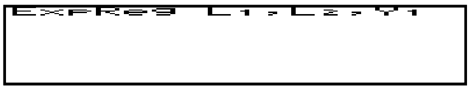


Vad ska vi nu göra? Jo, kan vi titta på några samband som passa våra datamängder. Vi trycker på <STAT> och väljer sedan alternativ CALC. Det finns många alternativ att välja på.

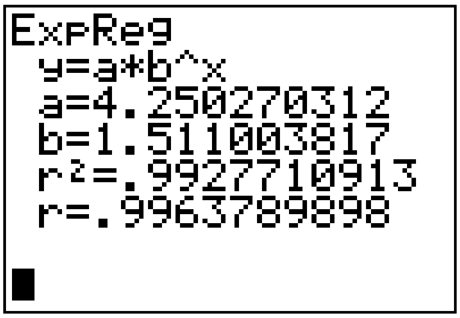


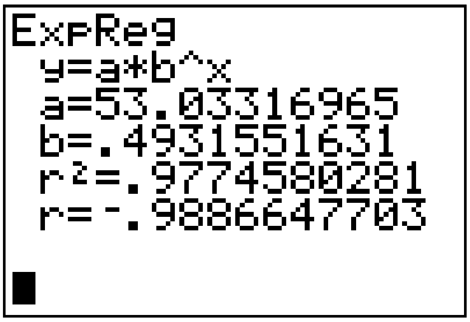


Vi väljer alternativ 0:Expreg och tycker på <ENTER>. Då kommer vi tillbaka till grundfönstret och det står ExpReg på skärmen. Vi skriver nu in enligt syntaxen *x-data, y-data, regressionsekvation.* Y1 nedan kan kopieras till grundskärmen från variabellistorna, som man kommer åt genom att trycka på <VARS>.



Sedan trycker vi på <ENTER>. Vi gör likadant med den andra experimentserien. Här ligger våra data i L_1 och L_3. Resultatet av dessa beräkningar syns i det högra fönstret nedan.





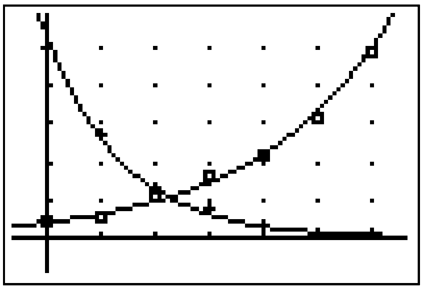
Nu gäller det att tolka resultaten från beräkningarna.

– Vad betyder a och b i ekvationerna ovan?

– Varför blir värdena på b ungefär 1,5 resp ungefär 0,5.

– Hur hänger det ihop med experimenten?

Ritar vi nu våra diagram med datapunkter och de beräknade funktionerna kan det se ut som nedan.



Detta experiment kan naturligtvis utföras utan pengar. Kasta pengar kan man ju göra med räknarens slumptalsgenerator. I ett senare exempel visar vi detta.

Vi tycker dock att det är bättre att göra detta på riktigt. Det tar lite längre tid men vi tror att man tjänar in detta genom att eleverna då få större chans att begripa vad dom egentligen har gjort.

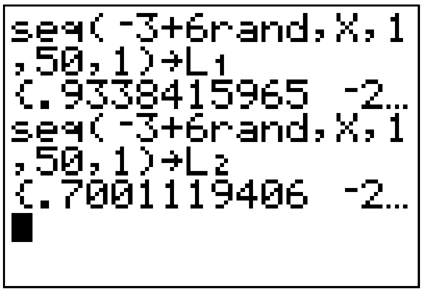
Det går säkert att hitta på fler försök som leder till andra exponential-funktioner.

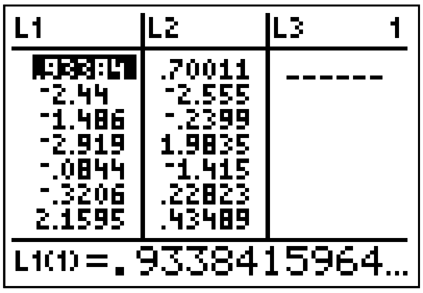
Statistik och sannolikhetslära

Kasta pil

Nu ska vi kasta pil 50 gånger genom att skriva in några instruktioner direkt från grundfönstet. Instruktionerna visas i den vänstra bilden nedan. Instruktionerna *seq*, som skapar en talföljd, resp *rand*, som skapar slumptal i intervallet 0 till 1, hämtas från olika menyer och kopieras till grundfönstret.

Listorna L_1 och L_2 inspekteras genom att man går till statistikediorn. Man trycker på <STAT> och därefter på <EDIT>. Se högra bilden nedan.

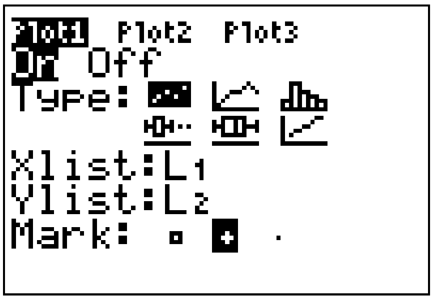


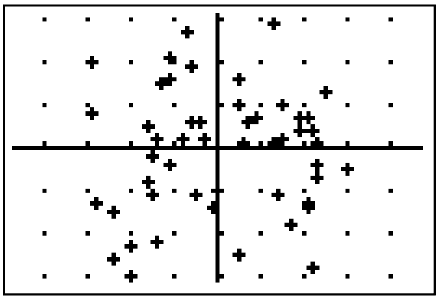


Nu ska vi rita ett diagram och se var våra slumptal ligger i ett koordinatsystem.

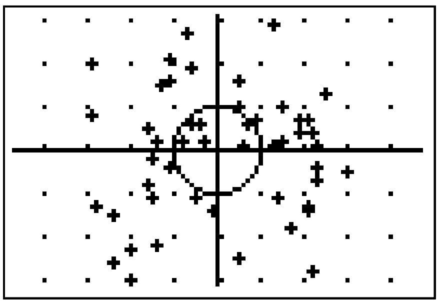
Instruktionern seq(-3+6rand,X,1,50,1) betyder att vi alstrade en talföljd som består av 50 slumptal mellan –3 och 3. Detta har vi nu gjort i två listor. Det betyder att listorna kan vara *x*- och *y*-koordinater i ett koordinatsystem. Vi ritar upp ett sådant och väljer Zdecimal, som skapar ett ortonormerat system.

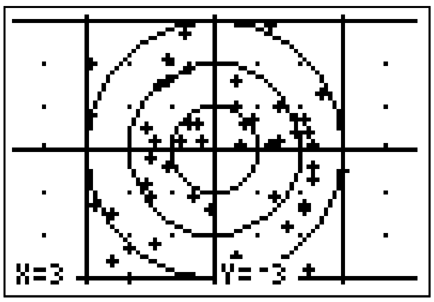
Vi sätter sedan på plottningen, väljer diagramtyp, var listorna för *x*- och *y*-koordinaterna finns osv. Se vänstra bilden nedan. Sedan kan vi rita vårt diagram. Se högra bilden nedan.





Nu skriver vi in instruktionen Circle(0,0,1) i grundfönstret. Instruktionen Circle hämtas från menyn <2nd><DRAW>. Då händer följande: en cirkel med centrum i origo och med radien 1 ritas upp. Matar vi in instruktioner även för cirklar med radierna 2 resp 3 så att vi får en bild enligt figuren till höger nedan.





Försök nu att räkna antalet pilar som hamnar i den innersta cirkeln, mittenringen och i den ytte ringen.

Vi antar att följande regler gäller:

5 poäng för en pil i innersta cirkeln
3 poäng för pil i mittenringen
1 poäng för pil i den yttersta ringen

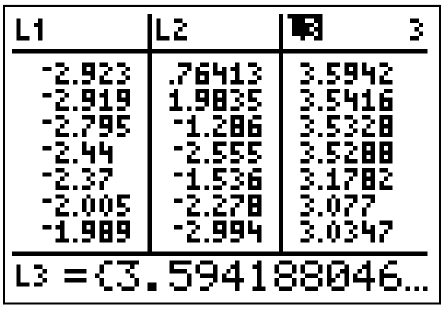
Hur stämmer ovanstående poängsiffror med de teoretiska sannolikheterna?

Det finns många frågor att ställa omkring den här uppgiften. Man behöver inte så mycket matematiskt bagage för att ge sig i kast med denna uppgift.

För att snabbt komma åt våra data utan att behöva räkna träffarna i själva diagrammet kan man göra följande:

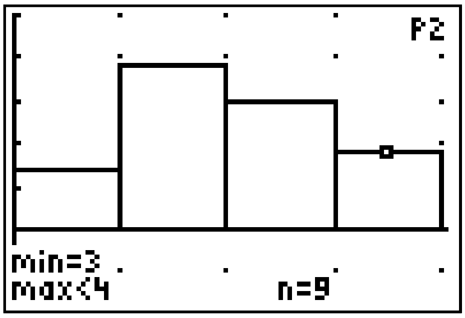
Skapa en tredje kolumn L_3 med formeln $L_3 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$

Då "mäter" vi avståndet från origo till varje träff. Sedan kan vi sortera dessa data för att lättare kunna räkna dem. Data större än 3 betyder att tavlan missas osv. Se högra bilden på förra sidan. Histogrammet till höger har vi skapat utifrån data i kolumn L_3.



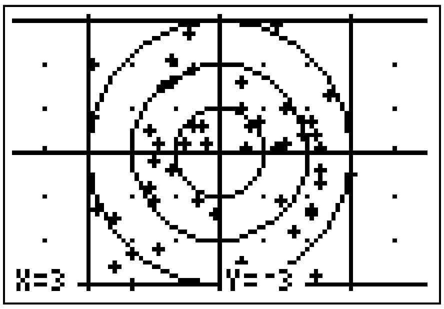
L1	L2	L3
-2.923	.76413	3.5942
-2.919	1.9835	3.5416
-2.795	-1.286	3.5328
-2.44	-2.555	3.5288
-2.37	-1.536	3.1782
-2.005	-2.278	3.077
-1.989	-2.994	3.0347

L3 ={3.594188046...



Man ser att det finns nio "missar", dvs data större än tre.

Nu borde vi kunna räkna ut _ utifrån våra data. Vi tittar på bilden från förra sidan igen.



Nio st kast hamnade utanför den yttre cirkeln och inne i kvadraten med sidan 6.

Den yttre cirkeln har arean $\pi \cdot 3^2$

Detta ger att arean av den yttre cirkeln förhåller sig till kvadratens area som antalet träffar förhåller sig till totala antalet kast:

$$\frac{\pi \cdot 3^2}{6 \cdot 6} = \frac{41}{50}$$ Detta ger _ _ 3,28

En chans på 54,9 miljoner att vinna...eller...?

I ett amerikanskt lotteri vann 1995 en person 77 miljoner dollar i ett lotteri som kallas Powerball. Lotteriet består av två moment. I det första momentet väljs fem vita numrerade bollar ut bland ett visst antal och i det andra försöket väljs en röd boll ut bland samma antal. Vi kan kalla det totala antalet bollar i varje försök för *x*. Bestäm *x* utifrån informationen i rubriken ovan och i texten.

Det här handlar om kombinationer. Det brukar man kanske inte ta upp så mycket i skolkurserna, men att räkna på sannolikheter i olika typer av spel brukar intressera eleverna.

Under knappen <Math> finns ngt som heter PRB, och det handlar om sannolikheter. Vi tittar vad som finns där.

```
MATH NUM CPX PRB
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

Här finns en hel del funktioner för beräkningar av sannolikheter. Här kan man nästa gissa sig till att *nCr* stå för antalet kombinationer och *nPr* för antalet permutationer, dvs när hänsyn tas till ordningsföljden.

På hur många sätt kan man välja ut 3 av de fem siffrorna 1 till 5? Hur många sätt bli det om vi tar hänsyn till ordningen. Vi prövar!

```
5 nCr 3
             10
5 nPr 3
             60
```

Att beräkna antalet kombinationer i detta fall kan eleverna göra “för hand“ om man är lite systematisk. Om det är svårt kan man börja med att välja ut tre av fyra t ex. Utan att närmare gå in på härledningen av formlerna för detta kan man låta eleverna experimentera lite med dessa funktioner.

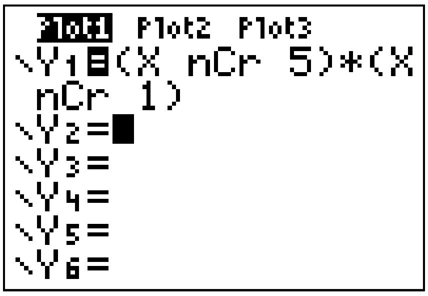
Be dem nu pröva att välja ut 5 av 6, 5 av 7, osv.

```
              1
6 nCr 5
              6
7 nCr 5
             21
8 nCr 5
             56
```

I början av exemplet så kunde man läsa att lotteriet bestod av två moment. Rimligt är då att multiplicera antalet kombinationer i det första försöket med antalet kombinationer i det andra.

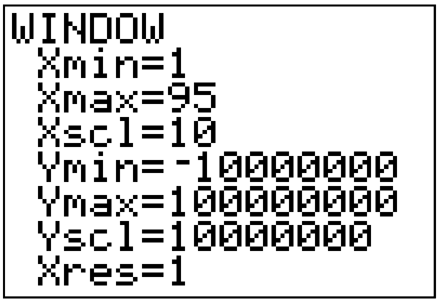
Går det inte att rita upp hur antalet kombinationer ökar när totala antalet att välja bland ökar?

Nu är det så att även uttryck för antalet kombinationer kan ingå i funktionsuttryck och den oberoende variabeln är här totalantalet kulor i de båda momenten. Vi kallade ju det för *x*.

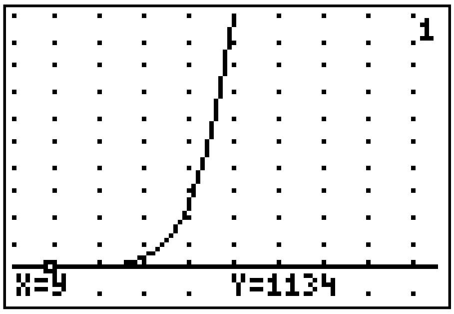


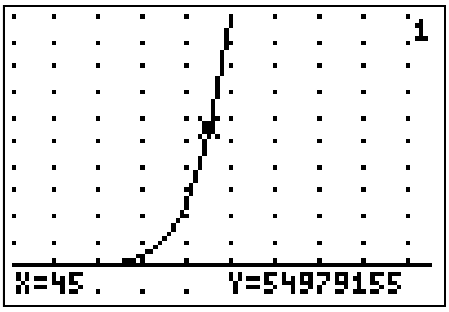
Så här borde det se ut.

Nu ska vi ställa in fönstret, vilket kanske inte är alldeles enkelt. När vi stegar oss fram längs kurvan skulle det vara bra om vi kunde öka *x* med ett varje gång vi trycker på <högerpil>. Nu vet vi att skärmen har 94 pixel i x-led så inställningen nedan är väl ganska bra.



Nu ritar vi kurvan. Vi stegar oss fram med funktionen <TRACE>. När totala antalet bollar är nio st i varje moment finns det mer än 1000 kombinationer. Vi jobbar på med <högerpil> och tittar efter hur stort y blir hela tiden. 54,9 miljoner var det! När $x = 45$ händer det!





Vi ser att *y* blir 54979155. Det är ju exakt eftersom det här är diskret matematik. Avrundat till tre värdesiffror blir 55,0 miljoner. I rubriken stod det 54,9 miljoner, vilket är felaktigt avundat.