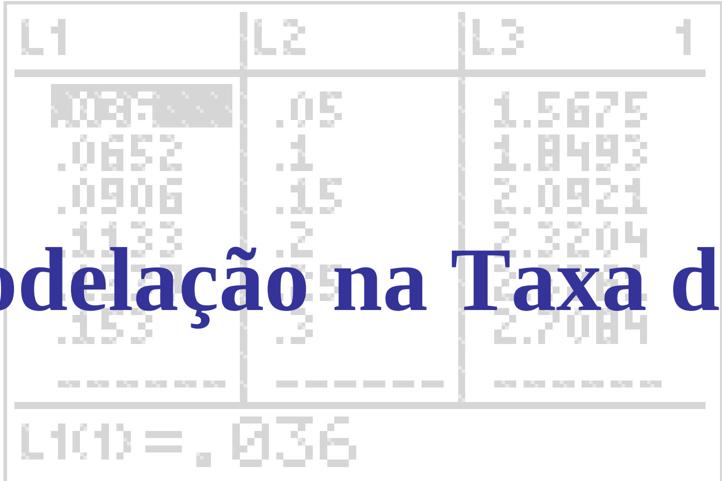
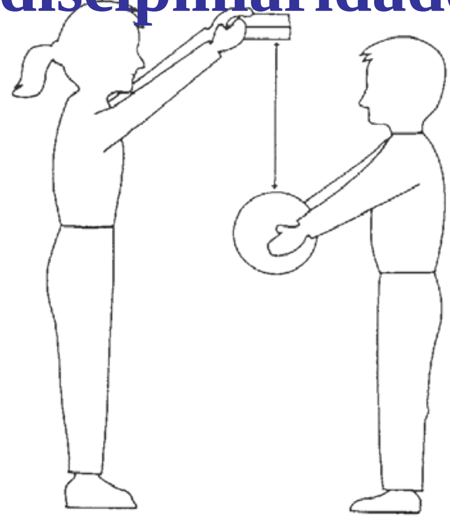
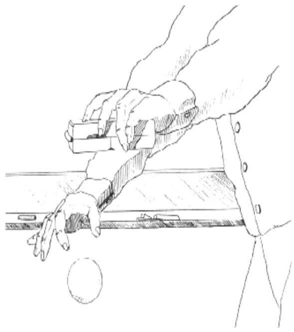
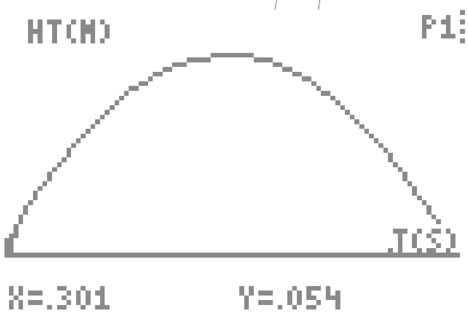
Modelação na Taxa de Variação

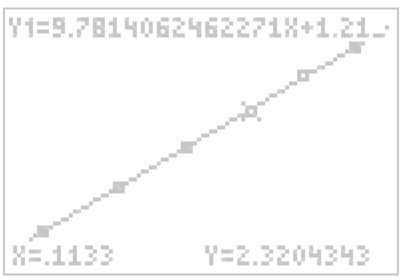


E interdisciplinaridade Matemática/Física









Abel Eça – E. S. Amares

Raul Aparício – E. S. Ermesinde

Caro colega, nos novos programas do ensino secundário não é difícil encontrar referências, directas ou indirectas, à interdisciplinaridade Matemática/Física.

Por exemplo, o programa de matemática B afirma que :

"*Do mesmo modo, para um móvel que não se desloque a velocidade constante mas com aceleração constante (tal como a queda de um objecto sob influência da gravidade e ignorando a resistência do ar) o estudante deve encontrar, como modelo matemático apropriado, a função quadrática. Os estudantes devem compreender o significado de uma velocidade negativa. O sensor de movimento permite boas experimentações para estas situações.*"

No programa de matemática A é referida por diversas vezes a necessidade e a vantagem da interdisciplinaridade com diferentes disciplinas, não sendo normal não se fazer com a disciplina de Física.
No programa de 11º ano de matemática A é referido o tratamento da taxa de variação média e apontada a metodologia a seguir, e no mesmo ano lectivo o programa de Física refere diversas experiências a tratar obrigatoriamente, entre as quais se encontra uma referente À queda livre e outra relativa ao lançamento de uma bola de basquetebol.
Neste contexto propomos-lhe uma exploração das seguintes actividades.

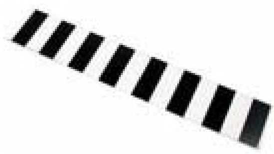
Queda livre

Dizemos que um objecto está em queda livre quando a única força que age sobre ele é a força gravitacional da terra.

Quando o objecto em queda livre está perto da superfície da terra, a força gravitacional é quase constante. Como resultado, um objecto em queda livre cai a uma aceleração constante. Esta aceleração normalmente é representada por o símbolo *g*.

Nesta experiência, terá a vantagem de usar um cronómetro muito preciso chamado Photogate , que não é mais do que uma célula fotoeléctrica.

O Photogate tem uma fonte de luz infravermelha que o atravessa de um lado ao o outro. Sempre que colocar um corpo opaco, esta luz é bloqueada. Deixa-se cair uma régua de plástico transparente com barras pretas uniformemente espaçadas (*picket fence*). Quando a régua atravessar o Photogate, o CBL medirá o tempo de um bloqueio provocado pelas barras pretas. Esta medição acabará quando as oito barras atravessarem o Photogate. Com esta medição de tempo, o programa calculará a posição, a velocidade e a aceleração para este movimento e os respectivos gráficos serão exibidos.



OBJECTIVOS

Obter experimentalmente o valor da aceleração de gravidade.

Estudar a função quadrática e a taxa de variação.

MATERIAIS

CBL 2 (ou LabPro)

Photogate

Calculadora gráfica TI84 Plus (ou TI83 Plus)

Régua com barras (Picket Fence)

Aplicação VST Apps (pode obter em *http://www.vernier.com/calc/software/vstapps.html*)

PERGUNTAS PRELIMINARES

1. Analise a sua régua. A distância do inicio de uma barra preta ao inicio de outra é de 5cm.
Que informação adicional precisará para determinar a velocidade da régua?

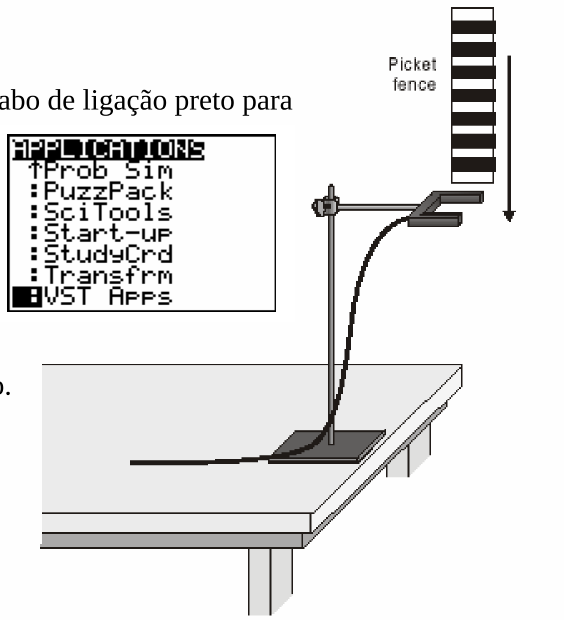
2. Se um objecto se move com aceleração constante, qual é a forma de seu gráfico de velocidade-tempo?

3. Considera que a velocidade inicial de um objecto tem que ver com sua aceleração?

PROCEDIMENTO

1. Coloque o Photogate tal como é mostrado na figura 1.

2. Ligue o Photogate ao canal DIG/SONIC do CBL 2. Use o cabo de ligação preto para ligar o CBL à Calculadora.



3. Ligue a calculadora e inicie a aplicação VST Apps.
Seleccione a opçãpo DATAGATE
Prima CLEAR para reiniciar o programa.

4. Configure a calculadora para cronometragem de movimento.
- a. seleccione SETUP
- b. Seleccione MOTION da PHOTOGATE MODES.
- c. Seleccione VERNIER PICKET FENCE .
- d. Seleccione OK

5. Seleccione START .

6. Espere até ouvir o bip do CBL. Segure o topo da régua e passe-a pelo Photogate, e deixe-a cair na vertical. Surge na calculadora a informação de que os dados estão a ser transferidos. Se esta informação se mantiver por mais do que cerca de 5 segundos prima a tecla STO para que a transferência seja concluída.

7. Prima ENTER para ver o gráfico distância-tempo.
Prima ENTER para voltar ao Menu Select Graph

8. Mova o cursor para VELOCITY e prima ENTER para ver o gráfico velocidade tempo.
O declive de um gráfico tempo velocidade é uma medida de aceleração. Se o gráfico de velocidade é aproximadamente uma linha de declive constante, a aceleração é constante.

a. Prima ENTER
b. Seleccione ANALYZE depois de voltar a MAIN SCREEN
c. Seleccione CURV FIT
d. Seleccione LINEAR (VELOCIDADE TEMPO)
e. Registe o declive da regressão linear
f. Prima ENTER para ver a recta de regressão
g. Para voltar ao menu principal, prima ENTER, e então seleccione RETURN.

Se pretende abandonar o trabalho com as opções do software (VST Apps) e funcionar livremente com as listas e funções deve abandonar o programa seguindo as instruções de saída. Depois de obter a informação de que as listas L1, L2, L3 e L4 estão com dados de Tempo, Distância, Velocidade e Aceleração, respectivamente; deve pressionar ENTER sucessivamente e sair definitivamente da aplicação seleccionando QUIT.

Questões:

1) Descreva em palavras a forma do gráfico de distância tempo .
2) Descreva em palavras a forma do gráfico de velocidade tempo. Como o relaciona em relação ao gráfico de distância / tempo?
3) Determine a taxa de média de variação por análise do gráfico de distância tempo. Interprete o seu significado.
4) Faça o mesmo para o segundo gráfico.
5) Encontre o valor da velocidade instantânea ao fim de um segundo utilizando o gráfico de velocidade / tempo. Que representa?

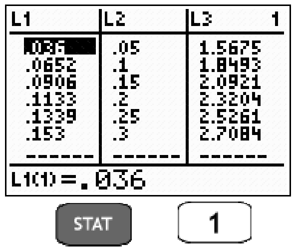
6) a) Pela análise do gráfico distância / tempo é pertinente questionarmo-nos sobre o modo como variou a velocidade, isto é se a velocidade se manteve (à mesma taxa). Com a calculadora gráfica teste uma conjectura para explicar tal situação e explique o que representa tal taxa no contexto da situação real e no contexto geométrico.

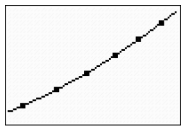
b) Pretendemos agora saber qual foi a velocidade no instante **0.1133** . Trata-se de calcular a taxa instantânea de variação ou mais simplesmente a taxa de variação nesse instante explicando o que representa tal taxa no contexto da situação real e no contexto geométrico.

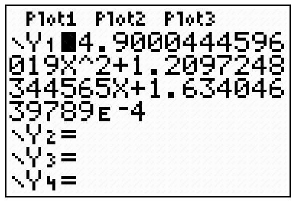
.Indicações para a resolução da questão seis

a) Depois de fazer a experiência ou passar os dados para a calculadora pode procurar uma função modelo para a distância percorrida.

Recorde que em L1 estão registados os valores de tempo, em L2 de distância (cumulativa entre o início de uma barra e o início da barra seguinte), em L3 de velocidade e em L4 de aceleração.







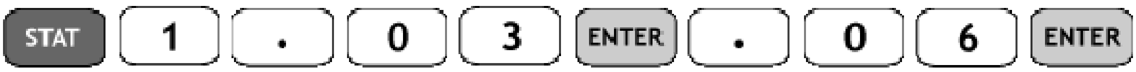
De seguida vamos utilizar o espaço das listas com os dados recolhidos, pelo que pode ser do interesse do utilizador guardar as listas iniciais antes de as apagar.

Como exemplo mostra-se como se pode gravar a lista L1, com o nome T.

Em primeiro lugar deve voltar À janela inicial da calculadora.

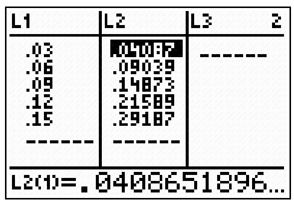
De seguida:

Introduza em L1 (lista 1), valores de tempo tempos começando em .03 até .15 com um incremento de .03, com o objectivo de vir a determinar a taxa média de variação.



etc…

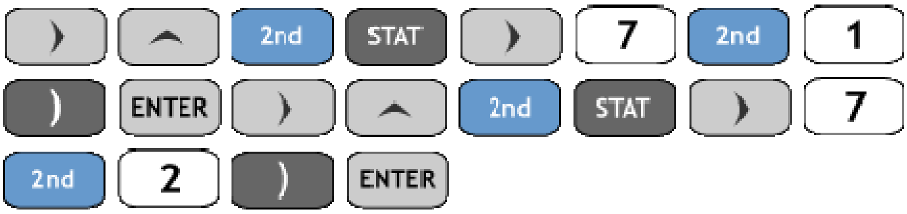
Calcule as imagens dos objectos em lista 1 através da função modelo. Se está com o cursor no 1º elemento da lista 1, faça:

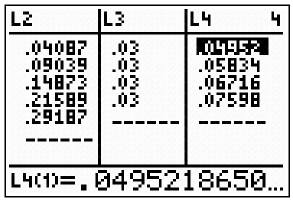


Calcule as diferenças entre os valores de posição e coloque-as na lista 4

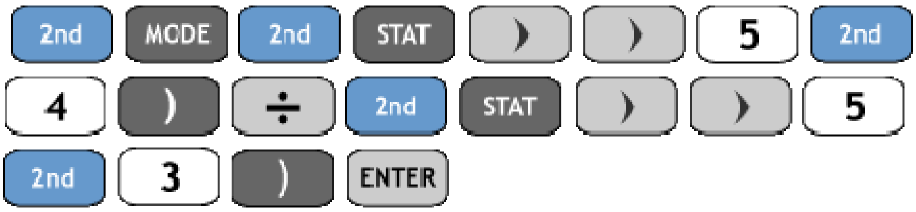
Repita o processo para calcular a diferença entre os tempos.

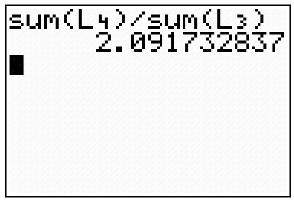
Obtém assim nas listas 3 e 4 as diferenças.



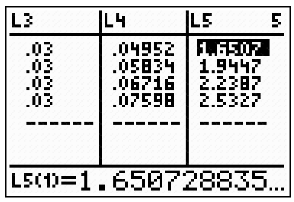


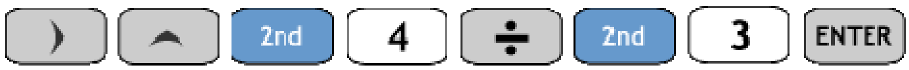
Dividindo a soma dos valores da lista 4 pela soma dos da lista 3 deverá obter a taxa média de variação, que no contexto da situação é a velocidade média nas 15 primeiras centésimas de segundo.





Tendo em conta o enunciado na questão 6, pode ter interesse analisar a taxa média de variação nos sucessivos intervalos de tempo. Para tal pode ser construída uma nova lista (lista 5) que resulta dos correspondentes quocientes dos valores da lista 4 pelos da lista 3

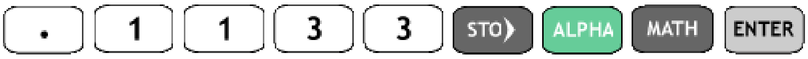




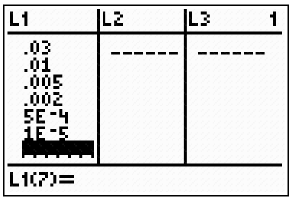
Geometricamente a taxa média de variação em cada um dos intervalos de tempo que se possa considerar é o declive da recta (secante) que passa pelos pontos de coordenadas (L1(i),L1(i+n)) e (L2(i),L2(i+n)), com i e n a variarem em intervalos de números naturais óbvios. Se n = 1, e i variar de 1 a 4, estes valores são os que constam na lista 5.

b) Pretendemos agora calcular a velocidade ao fim de 0.1133 segundos.

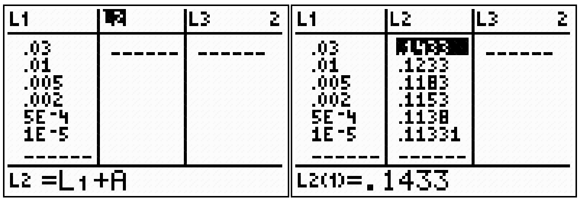
Trata-se de calcular a taxa de variação no ponto 0.1133. Comecemos por colocar o valor 0,1133 na posição de memória A, a fim de simplificar futuramente a sua utilização.



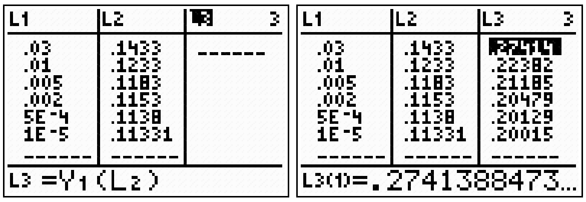
Introduzir na lista 1, valores tendentes para zero iniciando em 0.03, por exemplo



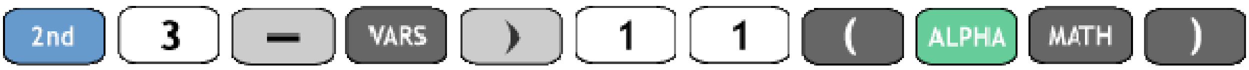
Adicionar em L2, o valor .01133 (em A) aos elementos de L1

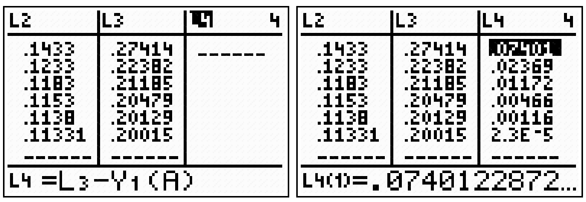


Calcular as imagens de L2



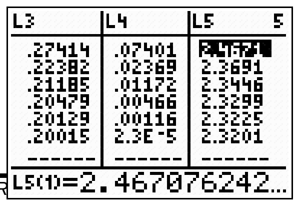
Cálculo de Y_1(L2)- Y_1(.1133), ou seja, os acréscimos na variável y.

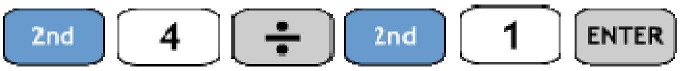




Cálculo de (Y_1(A+h)-Y (A))/h

Dividir os valores da lista 4 pelos da lista 1





Podemos observar que à medida que h tende para zero, a TMV tende para um valor muito próximo de 2.32

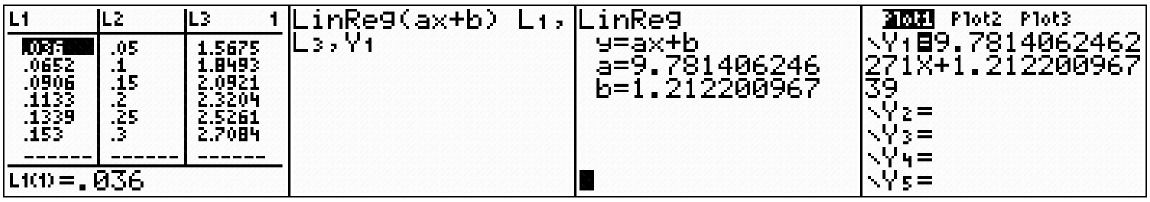
Nada mais fizemos que considerar intervalos sucessivos cada vez mais pequenos e próximos de 0.1133 e calcular a taxa média de variação nesses intervalos. Afinal determinamos o limite da taxa média de variação no [0.1133, 0.1133 +h], quando h tende para zero.

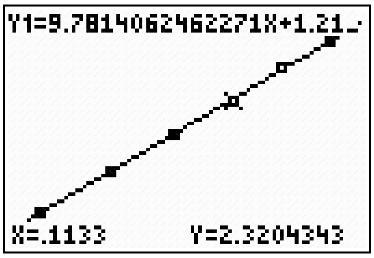
Isto significa que estamos a considerar os declives das sucessivas secantes, cada vez mais próximas da recta tangente, e a observação da estabilização desses declives à volta de 2,32 permite-nos concluir qual é um valor razoável para o declive da recta tangente à curva em x = **0.1133**

Podemos dizer que a taxa instantânea (limite das taxas médias quando h tende para zero) é a derivada da função no ponto (**0.1133**, Y_1 (**0.1133**))

Vamos utilizar os valores recolhidos na experiência relativos à velocidade, e observar o valor da velocidade instantânea em 0,1133, que se espera seja muito próximo de 2,32.

Para tal, teremos de encontrar o modelo da função que relaciona o tempo e a velocidade.





A convicção é realmente muito forte de que a velocidade instantânea em 0,1133 e o limite referido anteriormente são o mesmo, e em termos geométricos observamos que os declives das rectas tangentes ao gráfico da função tempo-distância são as velocidades instantâneas nesses momentos e imagens da função tempo-velocidade. Esta metodologia pode ser utilizada na relação entre a função tempo-velocidade e a função tempo-aceleração, esperando neste caso um valor de cerca de 9,8 para qualquer momento, o que pode ser previsível ao observarmos o declive da recta correspondente à função modelo anteriormente determinada.

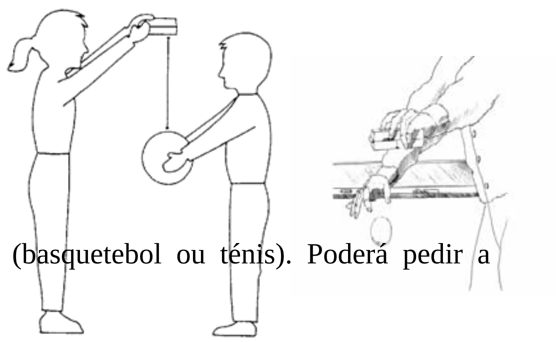
De seguida, vamos utilizar outro tipo de experiência, que nos permite também obter a aceleração da gravidade e todo um trabalho análogo ao que foi aqui realizado.
Além de realizarmos uma experiência nova, vamos aproveitar para referir a possibilidade de um trabalho com observação das rectas secantes e tangente e não só com a observação numérica de declives e velocidade.

BOLA SALTITANTE

Função explorada: **Quadrática**

Conceitos da vida real tais como queda livre e objectos saltitantes, gravidade, e aceleração constante são exemplos de funções parabólicas. Esta actividade investiga os valores da altura, do tempo e do coeficiente *A* na equação quadrática, $Y = A(X - B)^2 + C$, que descreve o comportamento de uma bola saltitante.

Quando um objecto é largado, só actua sobre ele a gravidade (se desprezarmos a resistência do ar). Logo *A* depende da aceleração da gravidade, $-9{,}8\,m/s^2$.



INSTRUÇÕES:

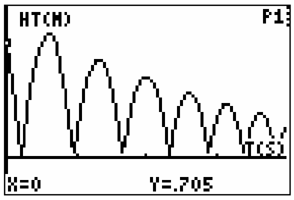
1. Para a realização desta actividade necessita de uma bola (basquetebol ou ténis). Poderá pedir a colaboração de uma pessoa para o auxiliar na experiência.
2. Corra o programa RANGER na calculadora (dentro da aplicação CBL/CBL).
3. No MAIN MENU escolha APPLICATIONS. Escolha METERS.
4. No menu APPLICATIONS escolha BALL BOUNCE. Aparecem no visor as seguintes instruções: "Se preferir separe o cabo do CBR (ou CBR2). Segure a bola a *0,5 metros* do CBR conforme figura, ENTER ".
5. Carregue em ENTER na calculadora.
6. Aparecem no visor as seguintes instruções: “Carregue em TRIGGER no CBR para começar. Repita se desejar, e em seguida ligue o cabo ao CBR e carregue em ENTER”.

7. Uma pessoa segura a bola com os braços estendidos. A outra segura no CBR (podendo desligar o cabo se desejar, o que é mais cómodo).

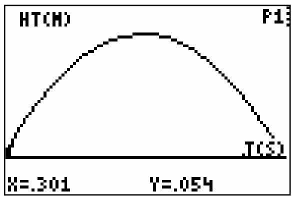
8. Carregue em TRIGGER no CBR. Quando a luz verde começar a piscar, a segunda pessoa larga a bola, e afasta-se desta (se a bola se mover para o lado, manter o CBR sempre por cima da bola, mas com o cuidado de não alterar a distância do CBR ao solo).

9. Ouve-se um tinir enquanto os dados estão a ser recolhidos. No final, se desligou o CBR, ligue-o à calculadora e carregue em ENTER. Analise o traçado obtido. Se o traçado não for aceitável, repita a experiência carregando em ENTER e escolhendo a opção REPEAT SAMPLE no menu seguinte.

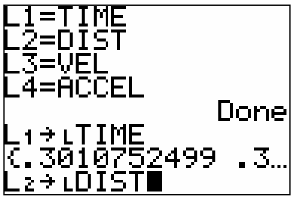
A recolha de dados faz-se para o tempo e a distância, mas o programa calcula também a velocidade e a aceleração. Observe que o BALL BOUNCE roda automaticamente o gráfico correspondente aos dados da distância (altura em relação ao solo).



10. Carregue em ENTER na calculadora. No PLOT MENU, escolher PLOT TOOLS, e depois SELECT DOMAIN. Queremos seleccionar o primeiro salto completo. Mova o cursor para a base do início do salto , e carregue em ENTER. Mova o cursor para a base do fim do mesmo salto, e carregue em ENTER. O traçado é redesenhado, focando um único salto.

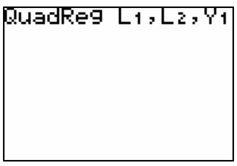


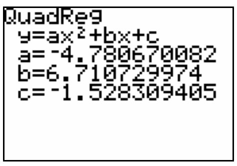
11. Carregue em ENTER para regressar ao PLOT MENU. Escolha MAIN MENU. Escolha QUIT. Os valores obtidos para o tempo, distância, velocidade e aceleração são guardados em listas, $L_1, L_2, L_3 \; e \; L_4$ respectivamente.

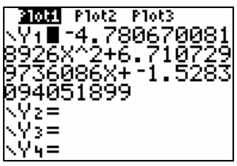


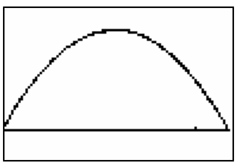
Tendo em conta a possibilidade de voltar a utilizar estas listas de valores, e a necessidade de se irem apagando listas, podemos guardá-las com um procedimento análogo ao referido na experiência anterior.

Neste momento temos o registo de um salto completo da bola, que vamos modelar com uma função quadrática. Note que o valor do coeficiente do termo quadrático é aproximadamente (com menor rigor do que foi obtido a partir da experiência com o photogate) metade da aceleração de gravidade, agora obtido com sinal negativo.





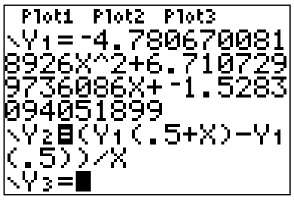




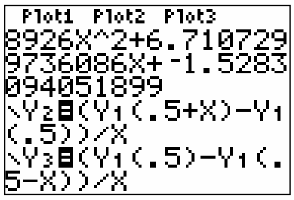
Estudemos agora a velocidade instantânea em 0,5. Vamos recorrer ao estudo dos declives das secantes que passam nos pontos de abcissas 0,5 e 0,5+h, sendo h valores pré-definidas e tendentes para zero.

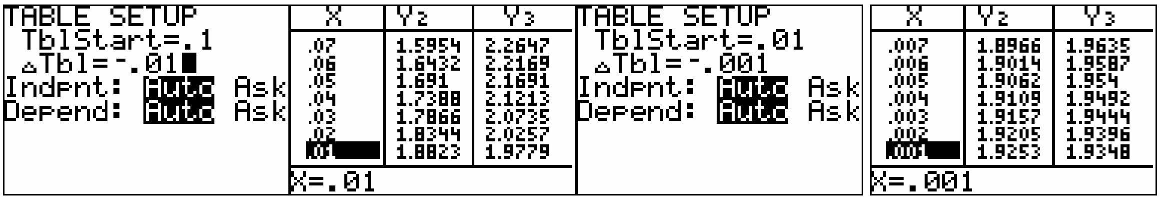
Podemos colocar em Y2 uma expressão dos declives destas secantes.

Neste caso, x representa o valor dos acréscimos h. Nada tem que ver com o valor de x de Y1. O gráfico da função Y2 não tem interesse especial. Poderá retirar dele alguma informação?



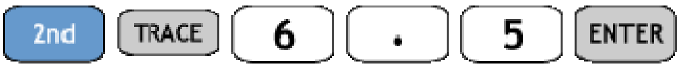
É possível, com muita rapidez, o estudo numérico dos declives das secantes (também para a esquerda de 0.5) recorrendo a uma tabela. Os acréscimos podem ser facilmente refinados.

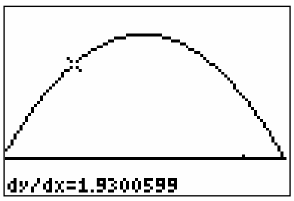


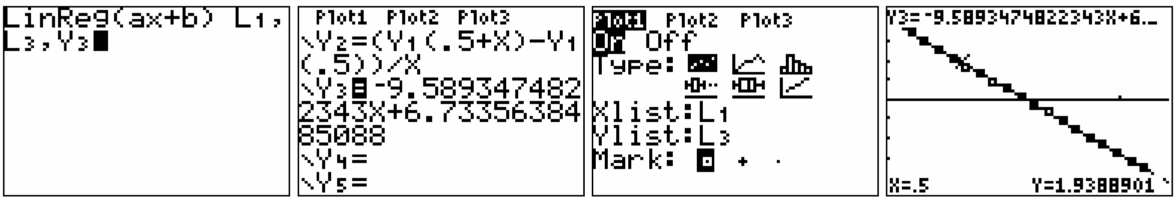


Podemos constatar que os valores dos declives das sucessivas secantes estão a estabilizar à volta de 1,93, o que nos leva a concluir que a velocidade instantânea (declive da tangente) será um valor muito próximo de 1,93.

Vamos verificar este valor, quer recorrendo ao menu CALC, actuando sobre o modelo quadrático, quer recorrendo a um modelo obtido a partir dos dados reais da velocidade.



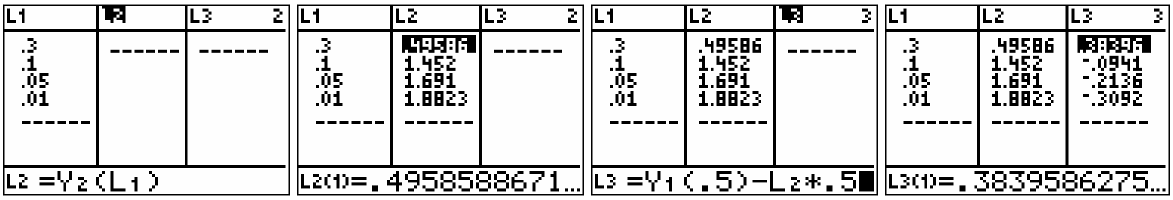




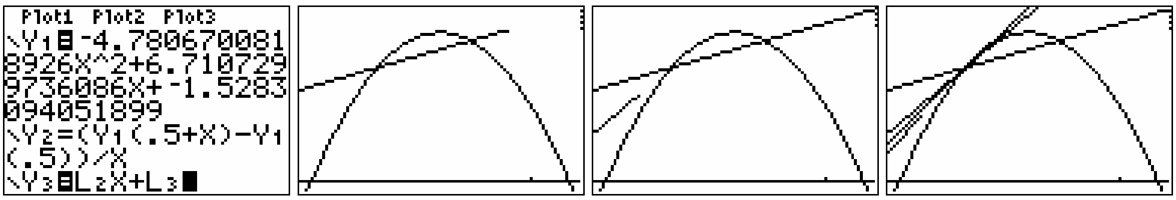
É habitual o professor de matemática tratar este assunto fazendo, no quadro, a representação das sucessivas secantes e provocando a intuição a partir da representação geométrica sobre a aproximação à tangente. Será vantajoso tirar partido da calculadora gráfica e do que foi observado numericamente no sentido de proporcionar ao aluno esse efeito visual. Isto pode ser feito, apesar de ser necessário efectuar alguma álgebra, o que é vantajoso por permitir a completa compreensão do que a calculadora vai mostrar.

Coloquem-se numa lista, L1 neste caso, valores numéricos que correspondem à diferença entre 0,5 e a abcissa do outro ponto de intersecção da secante com o gráfico, e cada vez mais próximos de zero por forma a termos secantes cada vez mais próximas da recta tangente.

Noutra lista, L2, coloquem-se os declives das rectas secantes correspondentes a cada um dos valores de L1. Na lista 3 coloquem-se as ordenadas na origem de cada uma das rectas secantes.



De seguida podemos colocar no editor de funções a família de funções afins cujos gráficos são as sucessivas rectas secantes e podemos traçá-las.



Estes procedimentos têm de ser cuidadosamente tratados, pois doutra forma pode perder-se as suas vantagens didácticas, que se ajustam aos programas oficiais de matemática do ensino secundário. São bastante versáteis, na medida em que se podem alterar a janela de visualização, a função e os acréscimos, sem voltar a ter de se fazer novamente todo o trabalho, havendo sempre algum a fazer.