Investigação e Modelação na aula de Matemática

Círculo de Estudos
ccpfc/acc – 19941/00

Eduardo Cunha
www.educunha.net
Escola Secundária de Barcelos
2000/2001

Módulo 2:

Estudo de Funções - calculadora gráfica.

T I 83 - Plus

Centro de Formação
Associação de Escolas do Concelho de Barcelos

1. A perseguição.

Numa floresta assiste-se a uma perseguição de uma raposa a um coelho. Quando a raposa vê o coelho este tem 14 metros de avanço. Vamos imaginar que tanto a raposa como o coelho correm a uma velocidade constante, sendo de 10 ms a velocidade da raposa e de 8 ms a do coelho.

a) Represente graficamente as funções a seguir indicadas, onde *c* traduz a fuga do coelho e *r* a perseguição da raposa (espaço percorrido em função do tempo).

Hipótese 1:	Hipótese 2:	Hipótese 3:
$c(t) = 10t$	$c(t) = 14 + 10t$	$c(t) = 14 + 8t$
$r(t) = 14 + 8t$	$r(t) = 8t$	$r(t) = 10t$

b) Qual das situações traduz o problema? Apresente uma justificação utilizando uma tabela.

c) Será que a raposa tem hipóteses de apanhar o coelho? Quando?

2. Domínios planos.

Represente os seguintes domínios planos na calculadora:

a) $2y + 1 > 0$;

b) $x + y < 2$

c) $y - x^2 > 1$

d) $2x + y - 2 > 0 \wedge 2x^2 + 3y < 1$;

e) $2x - 1 < y < 2x + 3 \vee y > x^2$;

f) $y^2 + x^2 < 4$

3. Funções definidas por troços.

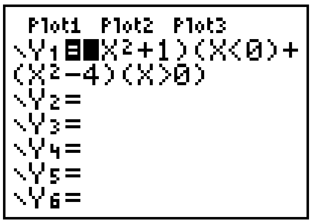
a) Considere a função *f*, definida em IR por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4 & se \quad x > 0 \end{cases}$.

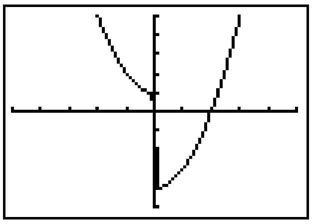
Indique o conjunto dos zeros de *f*

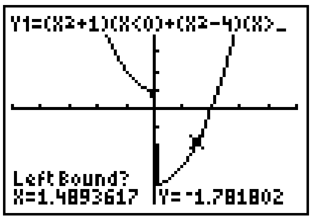
(A) {-2, 2} (B) {-2, -1, 2} (C) {2} (D) {-1, 2}

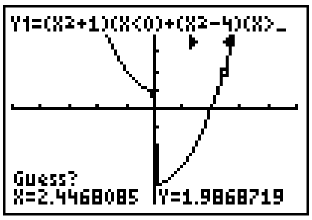
(Exame 1999, 2ºfase)

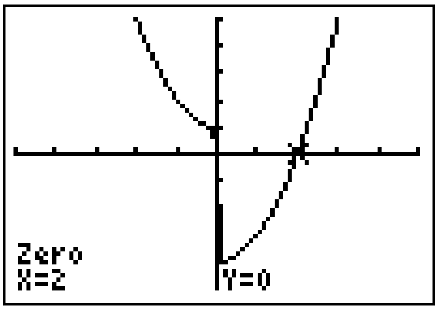
Resolução:











A resposta correcta é a (C).

b) Considere a função $f : IR \to IR$, definida por: $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^{x+1} & se \quad x \le 0 \\ \dfrac{x + sen\, x}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$.

b.1) Estude a função f quanto à continuidade.
b.2) Mostre que f admite um único máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e determine-o.
b.3) Seja r a recta de equação y = 1. Mostre que existe infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

(Exame 1999, 1ªfase – 1ªchamada)

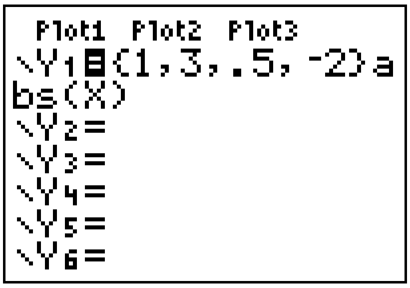
4. Função módulo – família de funções.

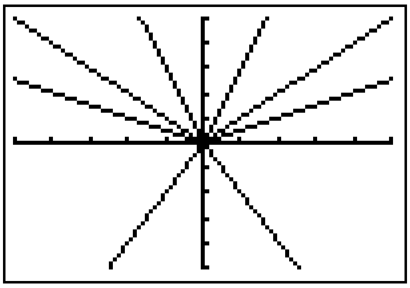
Estude as seguintes famílias de funções:

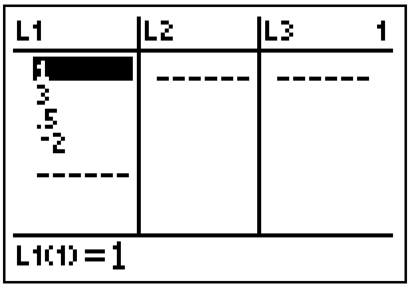
a) f(x) = a |x| para a∈ {1, 3, 0.5,-2}; **b)** f(x)=|x + a| para a∈ {1, 3, 0.5,-2} ; **c)** f(x)=|x|+ a para a∈ {1,3,0.5,-2}.

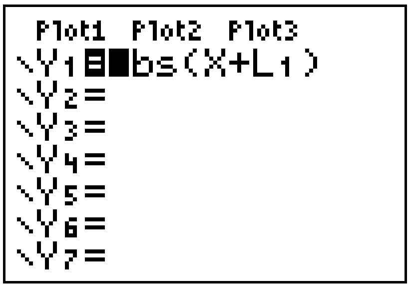
d) Obtenha as famílias anteriores por transformação da função f(x) = | x | .

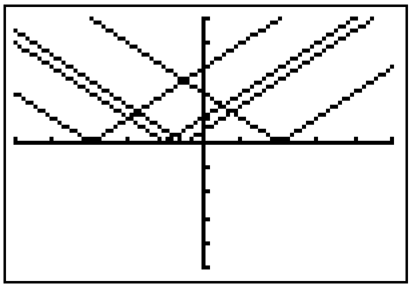
Resolução:







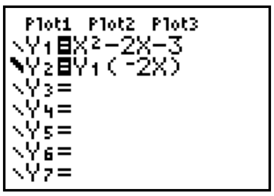


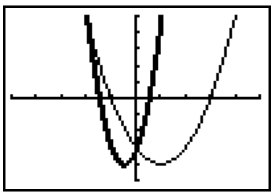
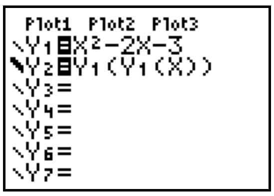


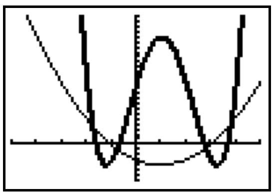
5. Função Composta – transformações de funções.

Sendo f uma função dada, como podemos obter o gráfico das funções g(x) = f(–x), g(x) = – f(x), g(x) = f(x + a) , g(x) = f(x) + b , g(x) = f(ax) e g(x) = f(f(x)) .

a) Partindo da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ obtenha a representação gráfica das seguintes funções:
a1) g(x) = f(–2x) ; **a2)** g(x) = – f(x) ; **a3)** g(x) = f(x – 3) ; **a4)** g(x) = f(f(x)).





b) Usando a definição de função inversa verifique que a função f(x) = ln x é inversa de $g(x) = e^x$.

6. Derivadas – monotonia e concavidade.

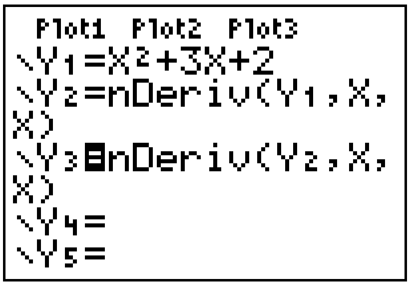
a) Dada a função $f(x) = x^2 + 3x + 2$,

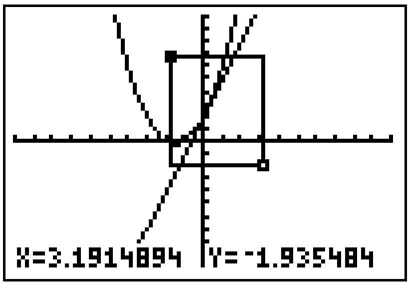
a1) calcule, depois de a representar graficamente, o mínimo e o máximo, se existirem; a imagem do 2 e o(s) objecto(s) cuja imagem é 4.

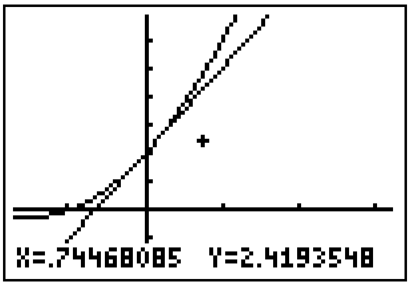
a2) desenhe num mesmo referencial o gráfico de f e da sua primeira derivada. Relacione-os.

a3) desenhe num mesmo referencial o gráfico de f e da sua segunda derivada. Relacione-os.

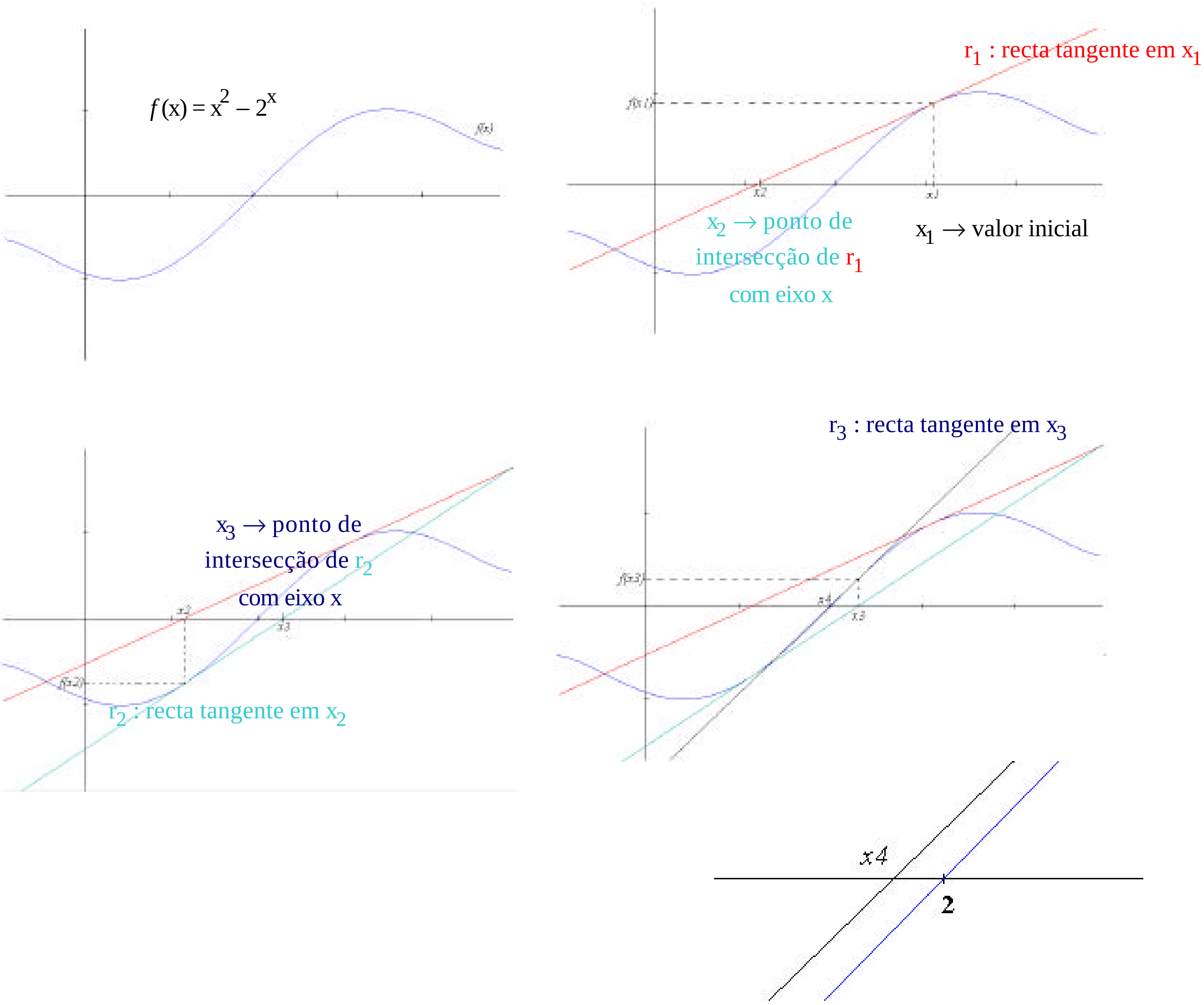
a4) esboce a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0. Determine a sua equação.







b) Efectue um programa que, utilizando o Método de Newton, permita resolver equações transcendentes. Por exemplo: $x^2 = 2^x$.



7. Função Logística.

Nas populações dos seres vivos, o modelo exponencial tem limitações, visto que se no início de vida de uma população, a taxa de crescimento pode ser proporcional ao tamanho da população, a partir de certa altura, a taxa de crescimento começa a abrandar, quer por falta de espaço, quer por falta de comida.

Um modelo aceitável para explicar o crescimento de uma população biológica, alongo prazo, passa por admitir que existe uma população máxima (população sustentada). No século XIX, o biologista belga P. F. Verhulst provou experimentalmente que para estas populações a taxa de crescimento é proporcional, quer à população actual, quer à diferença entre a população sustentada e a população actual.

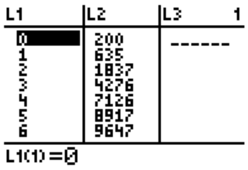
Donde resulta a função logística, $N = \dfrac{M}{1 + C\,e^{-Mkt}}$, em que N é a população actual, M a população sustentada e C uma constante.

Exemplo:

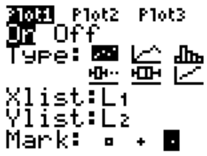
Num lago, uma equipa de biólogos, estudo o crescimento da população de peixes, durante um ano, obtendo os seguintes resultados:

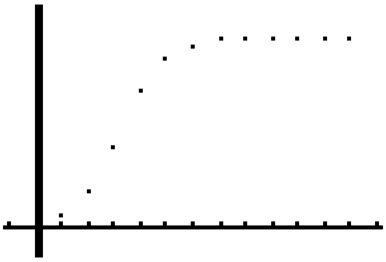
Tempo (em meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº de peixes	200	635	1837	4276	7126	8917	9647	9891	9966	9990	9996	9999	10000

Coloque os dados nas listas 1 e 2.



Defina o gráfico estatístico como diagrama de dispersão.





Observe o gráfico e repare que a curva sofre um crescimento exponencial e depois inflecte e à medida que o tempo aumenta, tende para uma posição de equilíbrio.

a) Sabendo que a função logística é definida por $N = \dfrac{M}{1 + C\,e^{-1{,}2\,t}}$, em que N é a população actual, M a população sustentada e C uma constante, determine os valores de C e de M.

b) Indique com aproximação ao mês e à semana em que intervalo é o crescimento exponencial. (Terá que calcular a 1ª e 2ª derivada e igualando esta a zero determinar o ponto de inflexão)

c) Esboce um gráfico que relacione a função, com a 1ª e 2ª derivada. Comente este gráfico.

d) Compare os valores obtidos com os valores obtidos pela calculadora.