Los problemas de optimización son tan antiguos como la humanidad misma y se presentan tanto en el ámbito social como en el económico. En el entorno educativo cada vez existe mayor interés por estudios de procesos de variación y cambio, y en particular, la mediación de tecnologías computacionales, gráficas y algebraicas ofrecen nuevas estrategias para la solución de situaciones problemáticas.

En este taller trabajaremos en el nuevo ambiente tecnológico de la calculadora TI-Nspire (graficas de funciones, geometría dinámica, hoja electrónica, etc.), pero sobre todo, mostraremos las múltiples representaciones, dinámicamente vinculadas, que alientan diferentes enfoques para la resolución de problemas de optimización.

Nuestro taller se encamina en la dirección planteada por Cantoral (1991): "*en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una didáctica del cálculo basada más en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos mediante acercamientos fenomenológicos por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se*".

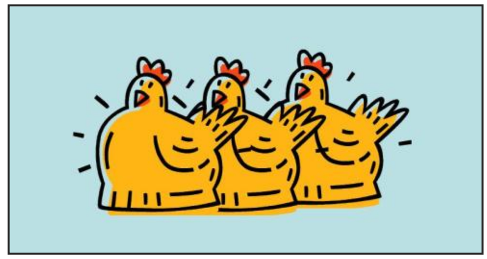
Si bien es importante, para la comprensión de los conceptos matemáticos, distinguir entre un objeto matemático y su representación (Carrión y Arrieta, 1998), reconocemos que es a través de ellas que es posible construir significados sobre la noción matemática, pues los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la apreciación, las representaciones y los sistemas de representación son elementos importantes en el estudio de la comprensión en Matemáticas.

Duval (1993) enfatiza la importancia de la representación en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Un registro está constituido por signos (símbolos, íconos o trazos), denominados medios de representación semiótica. Los conceptos matemáticos utilizan signos para identificarse mediante una representación, sin embargo, es común que en la escuela estas representaciones se confundan con el objeto matemático; por ejemplo, pensar que la función es una fórmula de ciertas características.

En la enseñanza de la Matemática los problemas de optimización frecuentemente se usan para introducir conceptos matemáticos en los diferentes niveles educativos. Un ejemplo se encuentra en el nivel medio superior y superior donde se resuelven problemas de optimización como una aplicación del Cálculo, pero el procedimiento seguido se reduce a la aplicación de un procedimiento rutinario, algorítmico, que involucra la resolución de ecuaciones.

Nuestro taller pretende proporcionar una manera de obtener resultados de forma "experimental", con lo cual se aspira a convertir el salón de clase en un pequeño laboratorio, donde se "reconstruyen" las condiciones de los problemas planteados y se generan modelos para que éstos que a su vez ayuden a encontrar la solución correspondiente.

EL PROBLEMA DEL GALLINERO



Romualdo tiene un rancho muy extenso y quiere construir un gallinero para la crianza de sus gallinas. Edmigio, su yerno le ha regalado **40** metros de malla para gallinero.
Romualdo desea que, usando todo el material disponible, su gallinero tenga una forma rectangular y de la mayor área posible.
¿Cuáles deben ser las dimensiones del gallinero de Romualdo?

Representación Corporizada

Tienes a tu disposición una cadena de **40** clips. Cada clip representa un metro de la cerca de Romualdo. Con este material puedes hacer varias configuraciones del gallinero. Recuerda que el gallinero tiene forma rectangular. A continuación, y auxiliándote de los clips, completa la tabla de abajo:

Longitud Lado 1	Longitud Lado 2	Perímetro	Área

En base a lo anterior, ¿Cuál es la decisión que debe tomar Romualdo?

Otra representación corporizada.

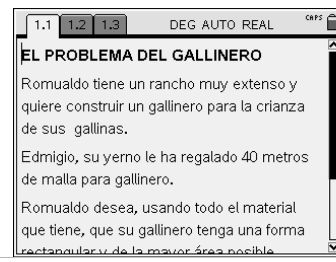
Ahora usaremos la ***TI-nspire*** para simular la posibilidad de tener varias configuraciones de gallineros. Sigue las instrucciones que se te indican.

Abriendo el Documento.

Pulsa , para tener acceso a la pantalla de **INICIO** (**Home**).

Pulsa 7, para abrir la carpeta **Mis Documentos**, después abre la carpeta **RELME2009** , y seleccionas el archivo: **GALLINERO.tns**

Te aparece la primera página del primer problema.

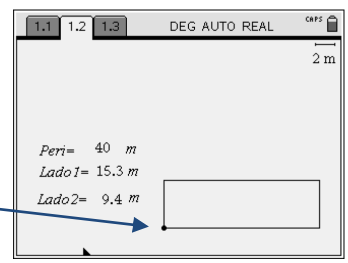


El diagrama del Gallinero se presenta en la página **1.2**

Observa que, además del rectángulo, aparecen las medidas de los lados, del perímetro y del área del gallinero.

Observa también el punto negro en uno de los vértices del gallinero.

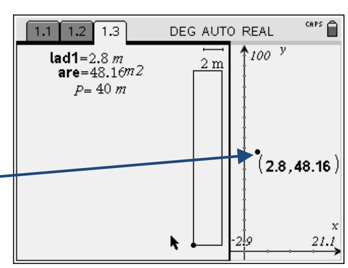
Usando las flechas del **NavPad** desplaza el punto negro hacia la izquierda y hacia la derecha. Observa como se modifican las medidas.



En base a lo anterior, ¿Cuál es la decisión que debe tomar Romualdo?

Representación mediante grafo cartesiano.

En la página **1.3** la pantalla se ha dividido en dos partes. En la parte izquierda se encuentra el gallinero con sus correspondientes medidas. Observa que ahora dos medidas, la longitud del lado 1 y el área del rectángulo se han almacenado en dos variables: ***lad1*** y ***are***. Estas medidas se han **vinculado** con las coordenadas del punto del plano cartesiano en la parte derecha de la pantalla.



Desplaza el punto negro sobre el vértice del rectángulo y observa como también se desplaza el punto (y sus correspondientes coordenadas) por el plano cartesiano.

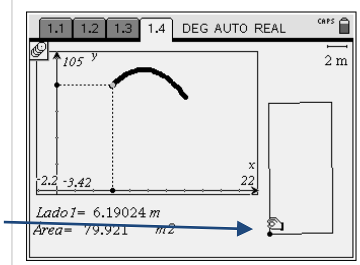
¿Qué tipo de curva parece ser?

¿Puedes asociar algunos de los valores de la tabla de arriba con los valores de las coordenadas de los puntos?

En la página **1.4** tenemos una nueva representación del problema; la idea es generar la curva como una sucesión de los puntos mencionados anteriormente.

Antes de desplazar el punto negro del rectángulo debes de realizar esto:

Pulsa menu 5 3: **Representación Geométrica.**
Ahora, usando las flechas del ***NavPad*** desplaza el punto negro hacia la izquierda y hacia la derecha.
Observa como se genera el gráfico.



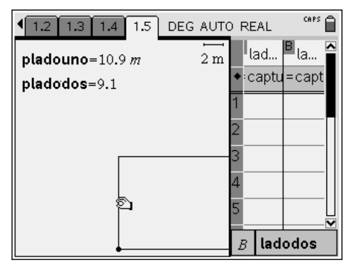
Representación mediante Tabla

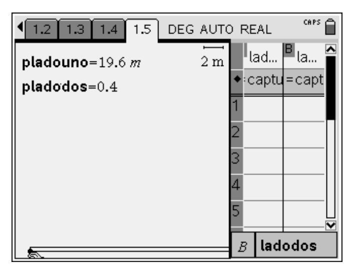
Ahora expresaremos la solución mediante una tabla de valores.

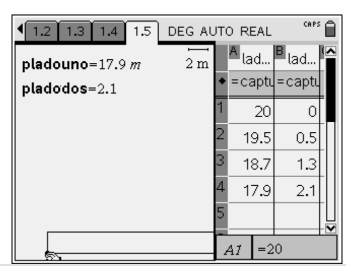
En la página **1.5** la pantalla se ha dividido en dos partes, la parte de la izquierda ya es conocida por ti.

La parte de la derecha es una tabla, similar a la del programa EXCEL. En ella ya se tienen las ordenes que nos permiten *capturar* los valores generados por la simulación que se encuentra en la parte izquierda de la pantalla.
En el primer renglón se encuentran definidos los nombres de las primeras dos columnas. La **columna A** se denomina **ladouno** y la **columna B** se denomina **ladodos**.
En el segundo renglón tenemos las ordenes que nos permiten ir llenando las columnas **A** y **B**: **capture**('**pladouno**,0) y **capture**('**pladodos**,**0**), el **0** se refiere a que se van a capturar los datos en forma manual. El **1** es para captura automática.

Ahora desplaza el punto negro hasta que el rectángulo se convierta en una línea horizontal.
Enseguida desplaza ligeramente, hacia la derecha, el punto negro, pulsa ctrl . . Repite esto y observa como se van llenando las dos columnas en la tabla.



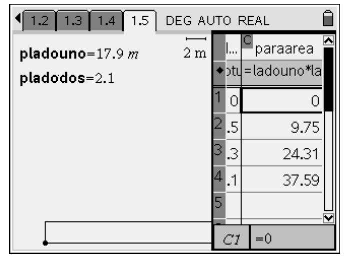




Ahora debemos de calcular el valor del área correspondiente a cada uno de los pares de valores obtenidos.

En el primer renglón de la columna **C** escribimos el nombre **paraarea**.
En el segundo renglón de la columna c escribimos la fórmula que nos permite calcular el valor del área: **ladouno*ladodos**

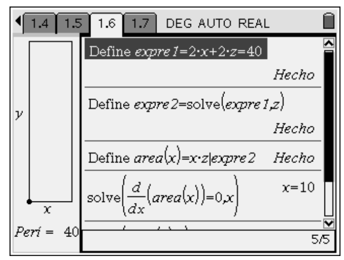
Puedes observar que la columna **C** tiene ahora los valores del Área.



Representación Simbólica

Mediante la aplicación **Calculadora** de la ***TI-Nspire CAS*** también podemos resolver el problema.
Hacemos uso de las ordenes **define**, **solve** y **derivada** para encontrar los puntos críticos y el máximo pedido.

En la página **1.6** mostramos las órdenes empleadas.



Para finalizar el problema **1** regresaremos a la página **1.3** y nos colocamos en la parte derecha de la pantalla.

Pulsamos ctrl G para visualizar la línea de entrada de funciones (si es que no es visible).
Escribe la función construida en el apartado anterior; **area(x)** y pulsa enter .

Observa como se traza el gráfico correspondiente.

Puedes pulsar ctrl G nuevamente para ocultar la línea de entrada de funciones.

Ahora puedes pasarte a la parte izquierda de la pantalla y desplazar el punto negro en el vértice del rectángulo.

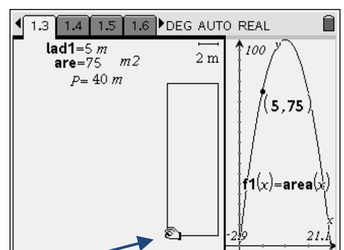
Observa que ocurre en la parte derecha de la pantalla.

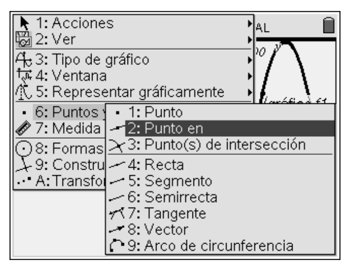
Ahora seleccione ***punto en***: menu, 6, 2:**Punto en**

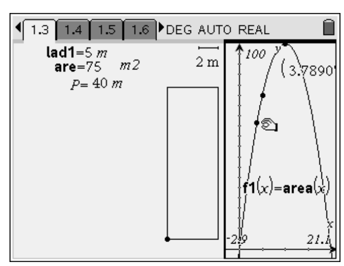
Colóquese sobre la curva y pulse

Pulse esc para salir del modo '**Punto en**'. Agarra el punto y desplázalo a lo largo de la curva $\mathbf{f_3}(x)$.

Observa que ocurre cuando te acercas al máximo.



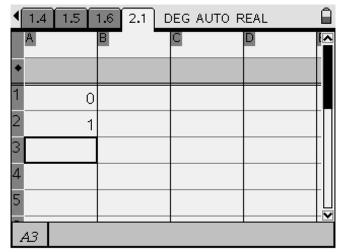




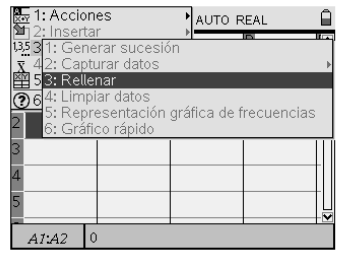
Ajuste de curva. Método 1.

Ahora te presentamos otra forma de resolver el problema mediante lo que se denomina el ajuste de curva.

Abre el problema **2**, se presenta su primera página, la **2.1.**

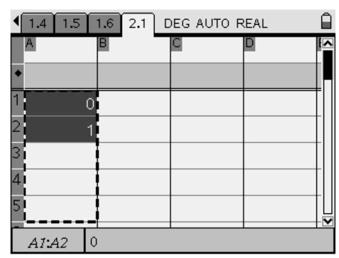


Observa que tienes a tu disposición una hoja de datos.



La tabla que obtuviste al trabajar con los clips nos da una idea de cómo llenar la hoja de datos.

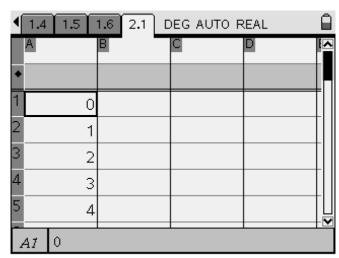
La primer columna la creamos de la siguiente manera:
Ubícate en la celda **A1**, pulsa **0** y enter .
Te encuentras ubicado en la celda **A2**, pulsa **1** y enter .



Ahora ubícate de nuevo en la celda **A1**, pulsa shift ▼ (flecha hacia abajo del NavPAd).

Las celdas **A1** y **A2** han quedado "sombreadas".

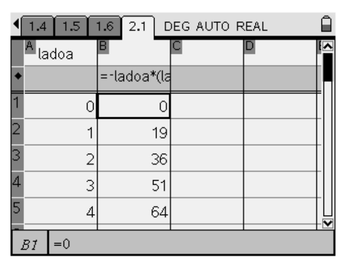
Pulsa menu, 3, 3:**Rellenar .**



Observa que las celdas **A1** y **A2** aparecen con un rectángulo en su alrededor. Mediante ▼ desplaza el cursor hasta la celda **A21**.

Las primeras **21** celdas de la columna **A** toman los valores consecutivos **1**, **2**, **3**, ….. hasta llegar a **20**.

Le asignamos un nombre a la columna **A**: **ladoa.**



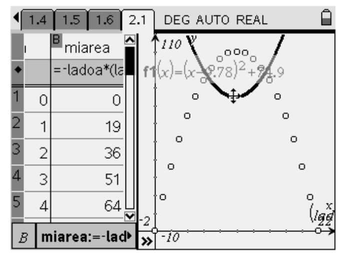
Le asignamos un nombre a la columna **B**: **miarea**.

Para calcular los valores del área del rectángulo, escribimos una fórmula en el segundo renglón de la columna **B**:
- ladoa *(**ladoa – 20**) y pulsamos enter.

Observa como la columna **B** se ha llenado con los valores del área.

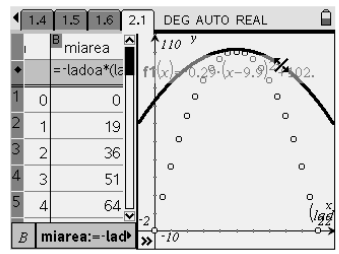
Desplaza el cursor hacia el vértice de la parábola recién construida, hasta que el cursor cambie a ✣ .

Pulsa ctrl y desplace la curva hacia el vértice de la parábola de puntos y pulse esc.



Desplace el cursor un poco hacia la derecha del vértice de la parábola recién construida, hasta que el cursor cambie a ↗.

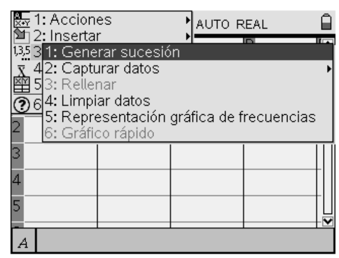
Pulsa ctrl y desplace la curva buscando que tome la forma que le señalan los puntos, y pulse esc.



La curva solución obtenida tiene la misma representación algebraica que la obtenida en la página **1.6** ?

Ajuste de curva. Método 2.

La regresión es una técnica estadística utilizada para inferir datos a partir de otros y hallar una respuesta de lo que puede suceder. Se utiliza para simular la relación existente entre dos o más variables.



Por lo tanto se puede emplear para construir un modelo que permita predecir el comportamiento de una variable dada.

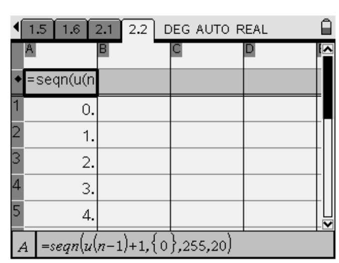
Abre la página **2.2.**

Observa que tienes a tu disposición una hoja de datos.

La tabla que obtuviste al trabajar con los clips nos da una idea de cómo llenar la hoja de datos.

La primer columna la creamos de la siguiente manera:
Ubícate en la celda que se encuentra por arriba de la celda **A1**, pulsa menu 3 1: **Generar sucesión**.

Aparece la pantalla de la derecha: completa lo que se te pide y pulsa enter.



Las primeras **21** celdas de la columna **A** toman los valores consecutivos **1**, **2**, **3**, ….. hasta llegar a **20**.

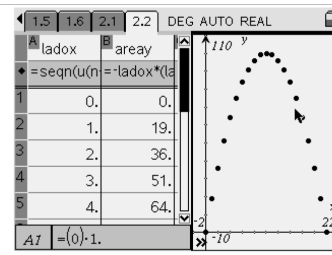
Los valores del área del rectángulo, en la columna **B**, se calculan como en la página **2.1**.

Le asignamos un nombre a la columna **A**: **ladox**.

Le asignamos un nombre a la columna **B**: **areay**.

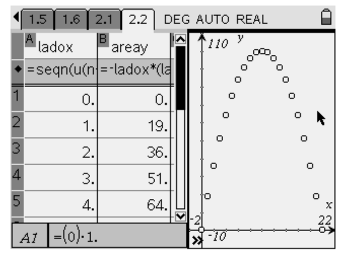
El siguiente paso es graficar los datos de la tabla:

Trabajaremos con dos ventanas en la misma página:
Pulsa ctrl 🏠 5 2 2 **:Diseño 2**.



Mediante ctrl tab ubícate en la nueva ventana, pulsa menu y selecciona 2: Añadir Gráficos y Geometría.

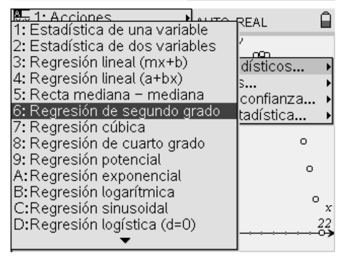
Al igual que en la página 2.1, creamos el grafico de dispersión del conjunto de valores de la tabla.



Para visualizar los puntos; pulsa menu 4: **Ajustar datos**.

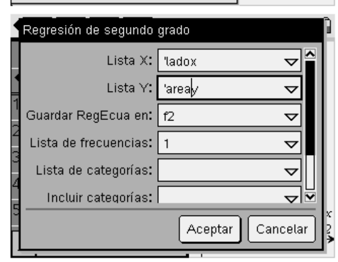
Al igual que en la página 2.1, modificamos la presentación de los puntos para facilitar el ajuste de la curva.

Construimos la función de regresión:



Mediante ctrl tab ubícate en la ventana de la Hoja de datos, pulsa menu 4 1 6: **Regresión de segundo grado**.

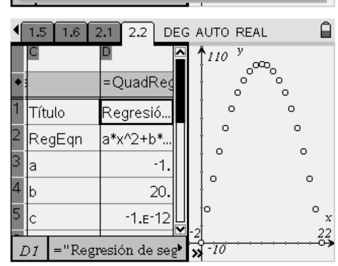
Aparece una ventana como la de la derecha:



Completemos los primeros dos renglones con las variables definidas antes: **ladox** para la lista X y **areay** para la lista Y.

Pulsa Aceptar .

En la ventana de la Hoja de datos, en las columnas C y D, aparecen una serie de valores que usaremos en la regresión.



La función es de la forma $ax^2 + bx + c$, donde

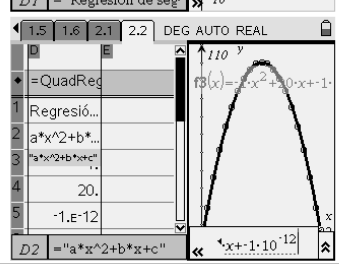
$a= -1$, $b=20$ y $c= -1 \times 10^{-12}$.

Mediante ctrl tab ubícate en la ventana de la Hoja de datos.

Pulsa menu 3 1: **Función**.

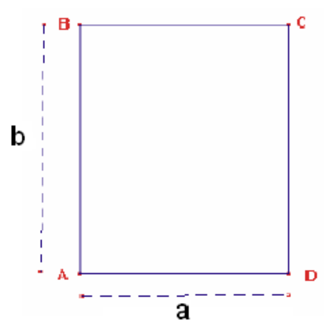
Introduce la función.

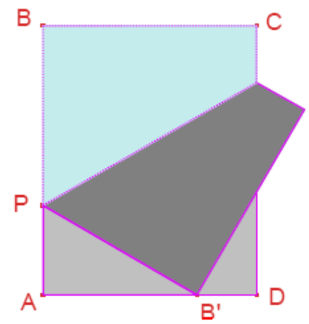
Observa el resultado.



EL PROBLEMA DE LA HOJA DOBLADA

Tenemos una hoja de papel rectangular (tamaño carta) ABCD de lados a= 8.5 pulgadas y b= 11 pulgadas.
Doble la hoja de manera que el vértice B "caiga" sobre el lado opuesto AD en el punto B´ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto donde se dobla el lado AB). Hallar las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea máxima.





Representación Corporizada

Tienes a tu disposición una hoja tamaño carta. Puedes hacer varias dobleces a la hoja. A continuación, y auxiliándote de la hoja, completa la tabla de abajo:

Longitud Lado AB´	Longitud Lado AP	Área del Triángulo

En base a lo anterior, ¿Cuál sería una solución óptima (aproximada) al problema?

Otra representación corporizada.

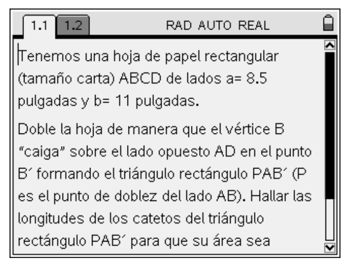
Ahora usaremos la ***TI-nspire*** para simular la posibilidad de tener varios posibles dobleces de la hoja. Sigue las instrucciones que se te indican.

Abriendo el Documento.

Pulsa (⌂), para tener acceso a la pantalla de **INICIO** (**Home**).

Pulsa ⟨7⟩, para abrir la carpeta **Mis Documentos**, después abre la carpeta **RELME2009** , y seleccionas el archivo: **LA_HOJA_DOBLADA.tns**

Te aparece la primera página del primer problema.

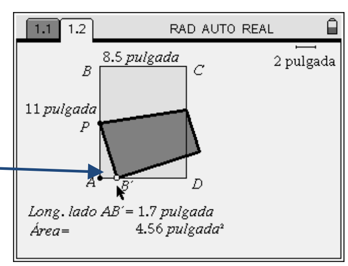


Un diagrama representando la hoja se presenta en la página **1.2**.

Observa que, además del rectángulo, aparecen las medidas de uno de los lados y el área del triángulo.

Observa el punto blanco en uno de los vértices del triángulo.

Usando las flechas del **NavPad** desplaza el punto blanco hacia la izquierda y hacia la derecha. Observa cómo se modifican las medidas.

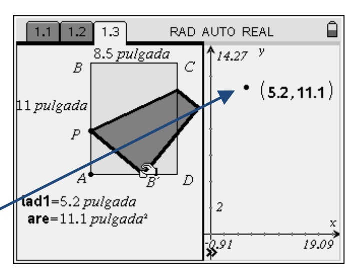


En base a lo anterior, Cuál sería una solución óptima del problema?

Representación mediante grafo cartesiano.

En la página **1.3** la pantalla se ha dividido en dos partes. En la parte izquierda se encuentra la hoja con sus correspondientes medidas. Observa que ahora dos medidas, la longitud del lado AB´ y el área del triángulo se han almacenado en dos variables: ***lad1*** y ***are***.

Estas medidas se han **vinculado** con las coordenadas del punto del plano cartesiano en la parte derecha de la pantalla.



Desplaza el punto negro sobre el vértice del triángulo y observa como también se desplaza el punto (y sus correspondientes coordenadas) por el plano cartesiano.

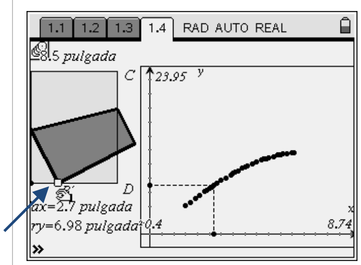
¿Qué tipo de curva parece ser?

¿Puedes identificar o asociar algunos de los valores de la tabla de arriba con los valores de las coordenadas de los puntos?

En la página **1.4** tenemos una nueva representación del problema; la idea es generar la curva como una sucesión de los puntos mencionados anteriormente.

Antes de desplazar el punto blanco del triángulo debes de realizar esto:

Pulsa menu 5 3: **Representación Geométrica**.
Ahora, usando las flechas del ***NavPad*** desplaza el punto blanco hacia la izquierda y hacia la derecha.
Observa cómo se genera el gráfico.



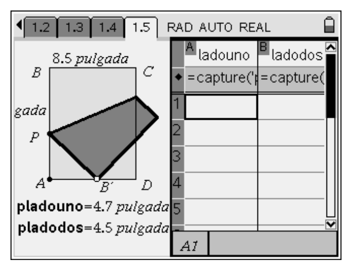
Representación mediante Tabla

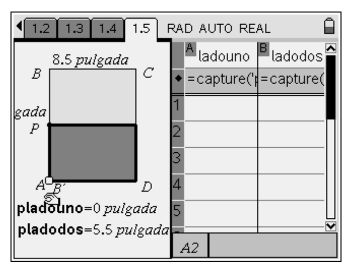
Ahora expresaremos la solución mediante una tabla de valores.

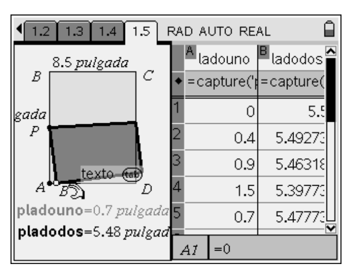
En la página **1.5** la pantalla se ha dividido en dos partes, la parte de la izquierda ya es conocida por ti.

La parte de la derecha es una tabla, similar a la del programa EXCEL. En ella ya se tienen las órdenes que nos permiten *capturar* los valores generados por la simulación que se encuentra en la parte izquierda de la pantalla.
En el primer renglón se encuentran definidos los nombres de las primeras dos columnas. La **columna A** se denomina **ladouno** y la **columna B** se denomina **ladodos**.
En el segundo renglón tenemos las ordenes que nos permiten ir llenando las columnas **A** y **B**: **capture**('**pladouno**,0) y **capture**('**pladodos**,**0**), el **0** se refiere a que se van a capturar los datos en forma manual. El **1** es para captura automática.

Ahora desplaza el punto blanco hasta que el triángulo se convierta en una línea vertical.
Enseguida desplaza ligeramente, hacia la derecha, el punto blanco, pulsa ctrl . . Repite esto y observa cómo se van llenando las dos columnas en la tabla.



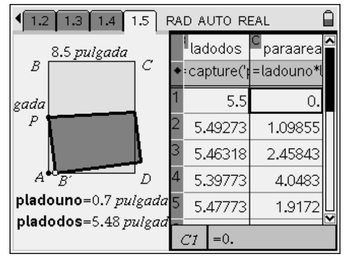




Ahora debemos de calcular el valor del área correspondiente a cada uno de los pares de valores obtenidos.

En el primer renglón de la columna **C** escribimos el nombre **paraarea**.
En el segundo renglón de la columna c escribimos la fórmula que nos permite calcular el valor del área: **(ladouno*ladodos)/2**.

Observa que la columna **C** tiene ahora los valores del área.



Para finalizar el problema regresaremos a la página **1.3** y nos colocamos en la parte derecha de la pantalla.

Pulsamos ctrl G para visualizar la línea de entrada de funciones (si es que no es visible).

Escribe la función que se obtuvo en el pizarrón:
(1/44)(x^3 + 121x) y pulsa enter .

Observa cómo se traza el gráfico correspondiente.

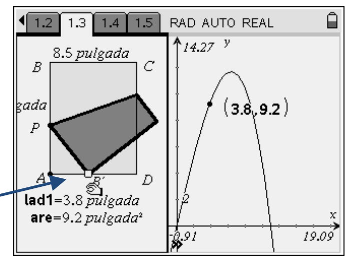
Puedes pulsar ctrl G nuevamente para ocultar la línea de entrada de funciones.

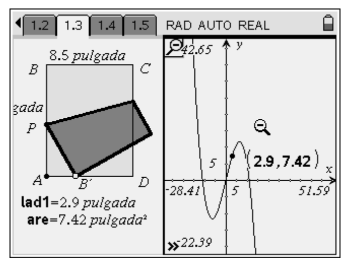
Ahora puedes pasarte a la parte izquierda de la pantalla y desplazar el punto blanco en el vértice del rectángulo.

Observa que ocurre en la parte derecha de la pantalla.

Haciendo uso de la orden V**entana**, nos "alejaremos" para observar la función completa. Ubícate en la parte derecha de la pantalla y pulsa menu 4 4: **Alejar**.

Ubícate en el centro de la pantalla y pulsa . Repite la operación de ser necesario.





Dos proposiciones relacionadas con el mismo problema:

- ¿Con cuál <PAB´ se obtiene el ΔAB´P de mayor área ?
- ¿Cuál es la relación(funcional) entre la altura del triángulo (PA) y la hipotenusa del triangulo(PB´) ?

¡ I N T E N T A R E S O L V E R L A S !