

# Análisis de estabilidad de sistemas mediante el plano fase

Raúl Baeza Ornelas.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente.

9-11 Julio 2009. Guadalajara, Jal., México.

## Resumen

Se muestra la forma de aprovechar las capacidades gráficas y simbólicas de la calculadora TI Voyage200 para analizar sistemas físicos representados por sistemas de ecuaciones diferenciales. Se estudia el comportamiento de las soluciones de interés en relación con la estabilidad del sistema y se da una introducción al fenómeno del caos.

## Introducción

Los cursos de ecuaciones diferenciales pueden beneficiarse ampliamente con el uso de análisis gráficos y numéricos, la mayoría de los textos en la actualidad enfatizan la importancia de este enfoque y proponen el uso de programas de computadora como auxiliares, combinando los aspectos cuantitativos y cualitativos, sin embargo, la puesta en práctica suele complicarse debido a que no contamos con computadoras en los salones de clases tradicionales. La calculadora Voyage 200 proporciona la capacidad de calcular soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, también puede graficar los campos de pendientes y de direcciones (plano fase).

Para capturar un sistema de ecuaciones necesitamos ajustar el modo gráfico, presionamos **[MODE]** y a continuación seleccionamos el modo gráfico **6:DIFF EQUATIONS**, aceptamos presionando **[ENTER]**. Entramos al editor de ecuaciones presionando **[Y=]**. La variable independiente es  $t$  y las variables dependientes se llaman  $y_1, y_2, \dots, y_{99}$ . Por ejemplo, el sistema:

$$x' = 2x + y$$

$$y' = x - 5y$$

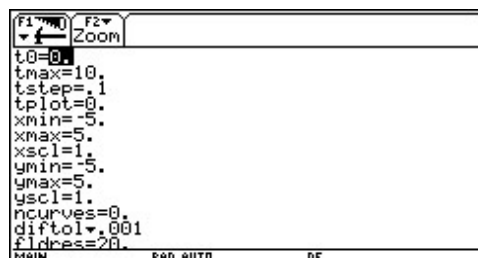
debe escribirse:

$$y1' = 2 * y1 + y2$$

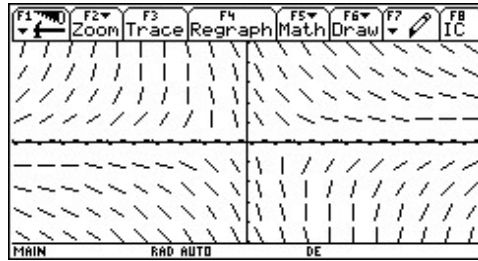
$$y2' = y1 - 5 * y2$$

para representar el plano fase ajustamos en **[F1] 9:Format...** **[ENTER]**, abrimos las opciones de **Fields...** presionando **[▶]** y ahí seleccionamos **2:DIRFLD**. Obtenemos la gráfica con **[2nd][GRAPH]**.

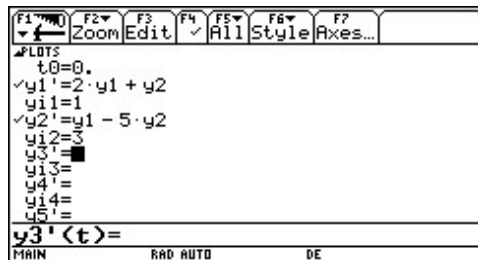
Probablemente la gráfica no sea muy representativa del comportamiento del sistema, para tener una mejor perspectiva ajustamos los parámetros de la ventana con **[2nd][WINDOW]** y los modificamos según se muestra



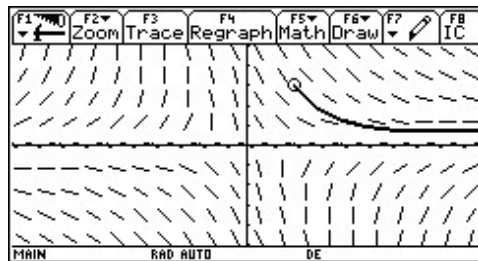
y ahora sí veremos una gráfica en la cual se observa un punto crítico del tipo punto silla en (0,0)




Para calcular una trayectoria sobre el plano fase debemos indicar las condiciones iniciales. Existen varias formas de hacerlo, la principal es desde el editor de ecuaciones. En el primer renglón aparece una línea que dice  $t0=0$ , el valor puede modificarse para indicar en que punto se aplicarán las condiciones del tipo  $y1(t0)=b_1, y2(t0)=b_2$ , etc., en este caso vamos a dejar el valor por defecto. Para establecer las condiciones  $y1(0)=1, y2(0)=3$  escribimos  $y1=1$  y  $y2=3$  quedando



Ahora regresamos a la venta gráfica para ver la trayectoria junto con el plano fase. La trayectoria se dibuja con línea gruesa y un pequeño círculo marca el punto inicial:

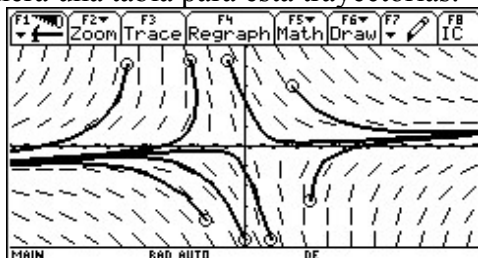


Las trayectorias se calculan con el método de Euler o de Runge-Kutta, los datos pueden verse en la tabla, presionamos  [TABLE]

t	y1	y2				
0.	1.	3.				
.1	1.491	1.917				
.2	1.997	1.3				
.3	2.563	.9684				
.4	3.228	.8159				
.5	4.03	.7814				
.6	5.011	.8307				
.7	6.217	.9472				
t=0.						

También se pueden obtener trayectorias seleccionando condiciones iniciales de manera interactiva. En la ventana de gráfica presionamos [F8] y nos movemos con las flechas de posición hasta el punto en el cual queremos generar la trayectoria, al ubicarnos presionamos [ENTER]. La principal desventaja de este

método consiste en que no se genera una tabla para esta trayectorias.



El sistema descrito es inestable, lo cual se podría observar fácilmente a partir de los valores propios de la matriz del sistema, ya que es un sistema lineal. El problema se vuelve más complicado cuando tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, en este caso incluso la determinación de los puntos críticos puede ser complicada ya que se debe resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales.

## El péndulo

Normalmente se analiza el modelo del péndulo linealizado, ya que puede resolverse con facilidad. Al utilizar una herramienta de cómputo se puede trabajar con el modelo no lineal y buscar soluciones

numéricas. Comenzamos con el caso ideal  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$  en donde  $\theta$  es el ángulo del brazo del péndulo respecto a la vertical,  $L$  es la longitud del brazo y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Debemos reescribir la ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden, usamos  $\frac{g}{L} = 1$  :

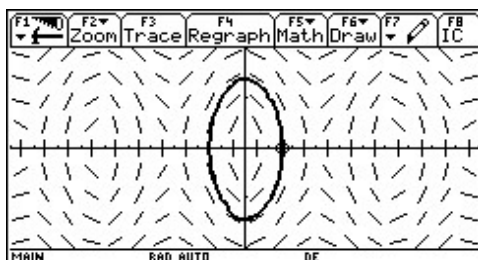
$$y1' = y2$$

$$y2' = -\sin(y1)$$

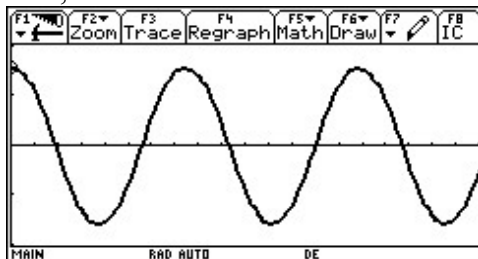
el plano fase muestra puntos críticos en el eje horizontal cada múltiplo de  $\pi$ , estos son centros estables.

La siguiente gráfica muestra el plano fase y la trayectoria correspondiente a las condiciones iniciales

$$\theta(0) = \pi/2, \theta'(0) = 0$$



para ver la posición con respecto al tiempo cambiamos la configuración del tipo de gráfica en el menú de formato en el editor de ecuaciones, seleccionamos FLDOFF



Para el caso del péndulo ideal tenemos soluciones periódicas. Si agregamos un término de amortiguamiento para considerar los efectos de la fricción el modelo resultante es

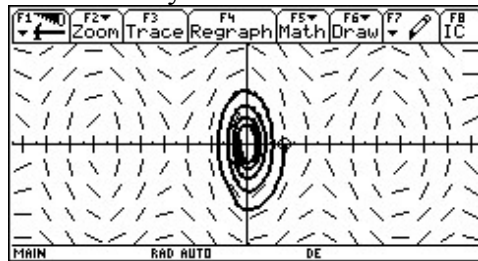
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

y el sistema correspondiente, con  $c=0.1$  es:

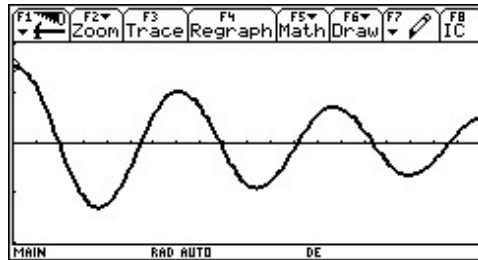
$$y1' = y2$$

$$y2' = -0.1 * y2 - \sin(y1)$$

El plano fase es parecido al caso ideal, pero si aplicamos las mismas condiciones iniciales que en el caso anterior veremos que los puntos críticos ya no son centros sino espirales estables.



la gráfica de la solución es:



Analice el comportamiento del péndulo variando las condiciones iniciales.

## Modelos de poblaciones

En [1] se presentan diversos tipos de modelos que describen la interacción entre dos especies, por ejemplo:

Modelo depredador-presa 
$$\begin{aligned} x' &= -\alpha x + b x y \\ y' &= \beta y - c x y \end{aligned}$$

Sobrepoblación 
$$\begin{aligned} x' &= -\alpha x - a x^2 + b x y \\ y' &= \beta y - c x y - d y^2 \end{aligned}$$

Cooperación 
$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + b x y \\ y' &= \beta y + c x y \end{aligned}$$

Competencia 
$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - a x^2 - b x y \\ y' &= \beta y - c x y - d y^2 \end{aligned}$$

### Actividad

1. Analice el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2x^2 - xy \\ y' &= 2y - xy - 2y^2 \end{aligned}$$

Determine los puntos de equilibrio y observe el comportamiento de las poblaciones descritas por este modelo.

2. Repita el análisis para el sistema:

$$x' = 2x - x^2 - 2xy$$

$$y' = 2y - 2xy - y^2$$

3. ¿Qué tipo de interacción describen los sistemas?
4. ¿Que diferencias observa en cada situación?
  
5. Analice la interacción de poblaciones descrita por:
 
$$x' = 0.2x - 0.005xy$$

$$y' = -0.5y + 0.01xy$$

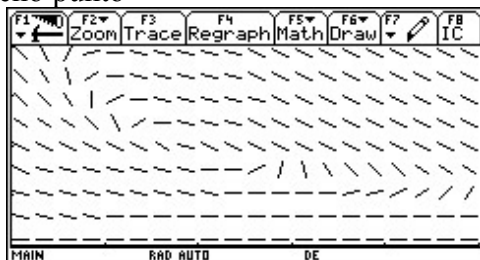
## Reacción química autocatalítica

En [1] sección 5.1 se presenta un ejemplo de reacción autocatalítica modelada por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden. Puesto que las oscilaciones se presentan sólo entre los dos reactivos intermedios podemos analizar el plano fase formado por estas dos y sus correspondientes soluciones en tiempo.

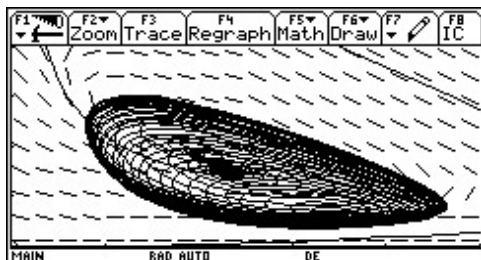
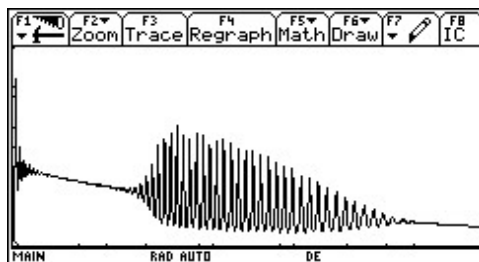
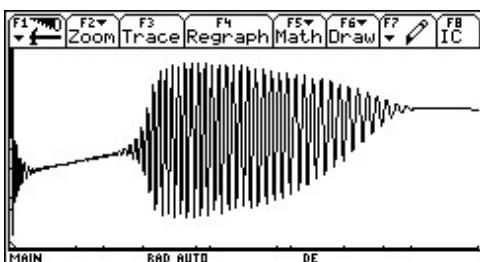
$$x' = e^{-.002t} - 0.08x - xy^2, x(0) = 0$$

$$y' = 0.08x - y + xy^2, y(0) = 0$$

El plano fase aparenta tener un punto espiral, pero el análisis de las soluciones en el dominio del tiempo revela la naturaleza de dicho punto



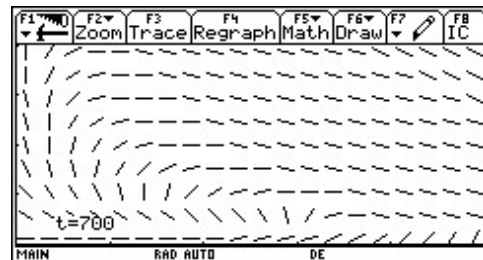
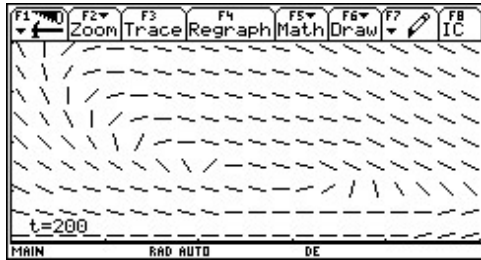
Este caso es un ejemplo de la necesidad de ajustar la ventana gráfica para observar la región de interés, ya que las oscilaciones pronunciadas inician hasta cerca de  $t=200$ .



Es importante notar que para obtener estas curvas con la precisión adecuada se utilizó un tamaño de paso de 1, con valores de tiempo de 0 a 700, por lo que la calculadora tarda un tiempo considerable en

producir las gráficas.

La razón por la cual aparenta haber un punto de equilibrio falso en el plano fase es porque el sistema no es autónomo, por lo que el plano fase varía con el tiempo. La calculadora Voyage200 permite obtener el plano fase para sistemas no autónomos para distintos valores de  $t$ , el primer caso se trazó con  $t=0$ . Para ajustar el valor deseado debemos modificar el valor de la variable  $dtime$  en la pantalla [WINDOW]. Si analizamos el plano fase con  $t=200$  y  $t=700$  veremos variaciones en la posición del punto de equilibrio tal como lo sugieren las gráficas de las soluciones.



Claramente se observa como el punto de interés se ha desplazado hacia abajo y a la derecha.

## Introducción al Caos

La ecuación forzada de Duffing  $m x'' + c x' + k x + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t$  sirve para modelar un sistema masa-resorte-amortiguador considerando los efectos no lineales del resorte (ver [2] sección 6.5). En el caso típico todas las constantes son positivas pero algunos sistemas, como una masa en la punta de un filamento metálico, quedan descritos por la misma ecuación pero con una constante de restitución negativa.

Para el sistema lineal, una entrada periódica produce una salida periódica, el cambio en la amplitud de la función forzada sólo afecta la amplitud de la solución. En el sistema no lineal el comportamiento de la solución depende de todos los parámetros; en particular estudiaremos como el cambio en la amplitud de la función forzada afecta de manera considerable a la solución.

### Aplicación

Vamos a resolver el problema de valores iniciales:

$$x'' + x' - x + x^3 = F_0 \cos t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0$$

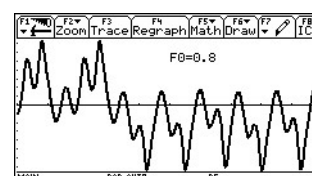
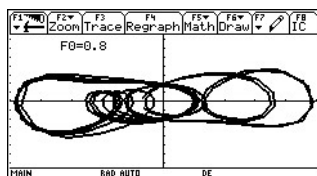
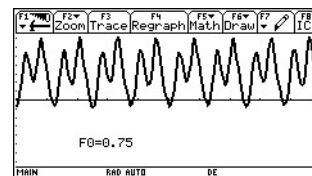
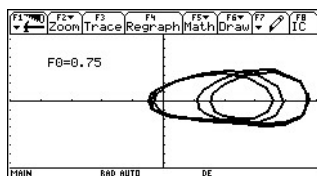
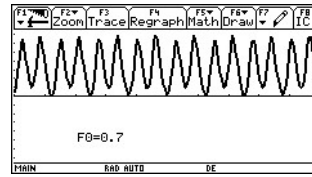
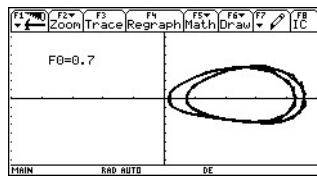
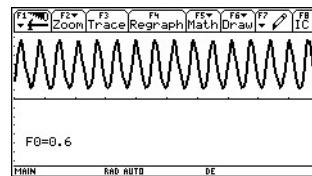
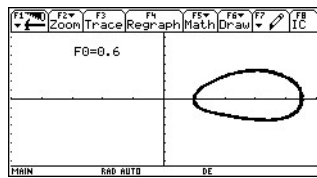
considerando valores de  $F_0 = 0.6, 0.7, 0.75, 0.8$

Para las trayectorias conviene usar ventanas con  $-1.5 \leq x \leq 1.5$ ,  $-1.5 \leq y \leq 1.5$ . Se recomienda aumentar el tamaño de paso y la tolerancia del método numérico para que los cálculos no tarden demasiado. También es conveniente representar gráficamente los valores correspondientes a los tiempos  $100 \leq t \leq 200$  de manera que no aparezca la solución transitoria.

La ventana recomendable para las soluciones es  $100 \leq x \leq 200$ ,  $-1.5 \leq y \leq 1.5$ , asegúrese de ajustar el parámetro  $tplot=100$ .

### Resultados

Para  $F_0=0.6$  la solución es periódica con periodo  $2\pi$ . Para  $F_0=0.7$  la solución es periódica con periodo  $4\pi$ . Para  $F_0=0.75$  la solución es periódica con periodo  $8\pi$ , pero para  $F_0=0.8$  la solución no es periódica sino que se presenta el fenómeno de caos. El caos suele presentarse asociado a la duplicación del periodo.



## Bibliografía

- [1] Borrelli R., Coleman C. (2002). Ecuaciones diferenciales, una perspectiva de modelación, Oxford University Press, México.
- [2] Edwards H., Penney D. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas de valores en la frontera*, Pearson Educación, México.
- [3] Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1999) *Ecuaciones diferenciales*, Thomson, México.
- [4] De Faria E. (2004). Estudio de poblaciones modeladas por ecuaciones diferenciales ordinarias, *Revista Innovaciones Educativas*, 6a edición.
- [5] *Manual TI Voyage<sup>TM</sup>200*. (2005). Texas Instruments.