

# **Uso de tecnología para el aprendizaje de aspectos relevantes en el razonamiento geométrico: exploración, conjetura y estructura de validación matemática**

Lourdes Guerrero M.

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

[lguerrero@fismat.umich.mx](mailto:lguerrero@fismat.umich.mx)

## **Resumen**

Se presenta una propuesta de enseñanza basada en actividades cuyo propósito es favorecer el aprendizaje de aspectos relevantes del razonamiento geométrico, haciendo énfasis en la potencialidad que tiene el software de geometría dinámica para promover el desarrollo, no sólo de la exploración y el planteamiento de conjeturas, sino también habilidades y capacidades para realizar demostraciones formales a través de su estructura.

## **Introducción**

En educación matemática, tanto a nivel escolar como a nivel de la investigación, se está dando mucha importancia a actividades que tiene que ver con los procesos de exploración, de planteamiento y justificación de conjeturas, sobre todo por la posibilidad que nos ha brindado la tecnología para explorar y descubrir invariantes de manera dinámica e interactiva.

En este contexto, en las nuevas propuestas educativas (SEP, 2007; NCTM, 2000) se plantea que los estudiantes deben desarrollar capacidades de argumentación con el fin de poder exponer y defender sus ideas y resultados, suponiendo que dichas capacidades favorecerán en el futuro los procesos de demostración matemática. De hecho, la comunicación verbal actualmente se retoma, como una de las competencias básicas que deben desarrollar todos los estudiantes a lo largo de sus estudios hasta el nivel bachillerato (SEP, 2007).

No hay duda del papel significativo de la argumentación en el aula; y sin embargo, el hacer énfasis en los procesos de argumentación discursiva parece estar subyugando la importancia de una de las formas de validación fundamentales en matemáticas: la demostración formal.

En el presente trabajo, se exponen los avances de un proyecto de investigación cuya finalidad es promover el aprendizaje de la demostración matemática de estudiantes de bachillerato, por medio de actividades interactivas usando software de geometría dinámica. Las actividades se basan en el diseño de Tanguay (2005; 2007), el cual a su vez sigue una orientación teórica propuesta por Duval (1995; 1991).

## **Probar y demostrar en matemáticas**

Varios investigadores (Duval, 1991, 2000; Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1988; Harel 2007; Tall, 1999) han dedicado esfuerzos al estudio de las formas de validación en

matemáticas, tratando de caracterizarlas y determinar su impacto, tanto en el pensamiento y razonamiento matemático, como en el aprendizaje y desarrollo mismo de las matemáticas.

Particularmente, Duval (1991, 2000) señala que en principio parecería que la argumentación y la demostración forman un continuo: argumentar, explicar, demostrar; sin embargo, en el fondo hay un distanciamiento profundo entre ellas, tanto de carácter lógico como de carácter cognitivo. Señala que "*Pasar de la argumentación a un razonamiento válido implica un descentramiento específico que no se favorece por la discusión o por la interiorización de una discusión*" (Duval, 2000). La argumentación no abre una vía de acceso a la demostración y, por tanto, ambas requieren de aprendizajes específicos por parte de los estudiantes.

Balacheff (1988), considera que la interacción social tiene una importancia relevante, ya que a través de ésta es que los estudiantes pueden la plantear argumentos para convencerse unos a otros. Esta interacción resulta ser una vía para favorecer la toma de responsabilidades de los estudiantes sobre sus actividades y producciones (Larios, 2000). Sin embargo, no considera a la argumentación como una vía hacia la demostración, ya que éstas tienen objetivos distintos. Mientras que la demostración es un razonamiento válido, la argumentación no tiene esos vínculos de validez, sino de pertinencia; es decir, la demostración, a través de la Lógica, busca determinar el valor de verdad de una afirmación con respecto a un sistema lógico deductivo; la argumentación, utilizando una lógica coherente, busca la credibilidad y el convencimiento de otra persona o personas.

Harel y Sowder (1998) llaman esquema de prueba de una persona a "*lo que constituye la persuasión y comprobación en dicha persona*" (p. 245). Distinguen tres categorías de esquema de prueba resultantes de sus investigaciones con estudiantes de nivel superior: esquemas de prueba de convicción externa (ritual, autoritaria y simbólica); esquemas de prueba empíricos (inductivo, perceptual); y, esquemas de prueba analíticos (transformacional y axiomático); es en este último en donde se incluye a la demostración formal como una forma de prueba.

Tall (1999) también señala que la prueba formal es sólo una entre muchos tipos de pruebas; describe diferentes formas de probar que pueden ser apropiadas dependiendo del contexto y del estado del desarrollo cognitivo del estudiante: Incluye por ejemplo, las *pruebas de acción*, como aquellas que requieren de una actividad física (y que pueden ser apropiadas para los niños pequeños), las *pruebas visuales* involucrando imágenes gráficas, las *pruebas aritméticas* o de comprobación, las *pruebas algebraicas* o de demostración por manipulación, las *pruebas euclidianas* como aquellas en donde se traslada una prueba visual a una representación verbal, y las *pruebas formales*, que abarcan todas aquellas demostraciones lógicas basadas en axiomas y encadenamientos deductivos.

En el presente trabajo, tomamos como base teórica el trabajo de Duval (1991, 1995, 2000). Así mismo, consideramos que la exploración, planteamiento de conjeturas y la posibilidad de usar diferentes tipos de pruebas matemáticas, son aspectos tan importantes del quehacer matemático como lo es el aprendizaje de la demostración. Debido al distanciamiento entre argumentación y demostración, identificado en la investigación de Duval (1999), es fundamental diseñar actividades que puedan mostrar al estudiante una vía para el aprendizaje de la demostración matemática. En particular, debemos proporcionarles

oportunidades para que comprendan la estructura de la demostración deductiva haciendo énfasis en la organización ternaria de la inferencia (ver figura 1).

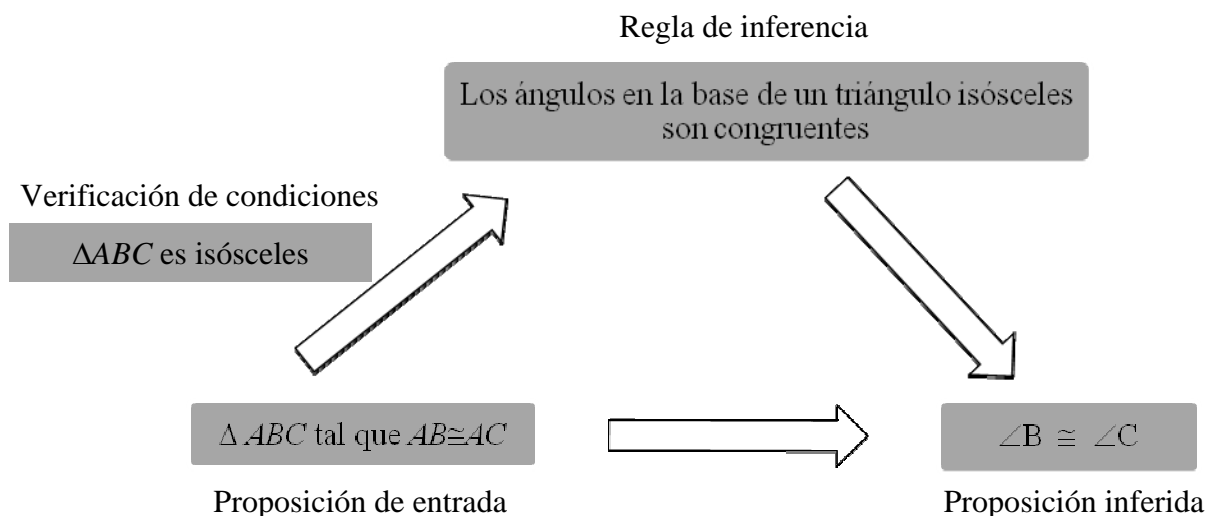


Figura 1. Estructura ternaria de una inferencia

### Materiales de aprendizaje

Las actividades diseñadas fueron dirigidas bajo los siguientes cuestionamientos:

- 1) ¿Qué actividades pueden ayudar a los estudiantes a cumplir los requerimientos de una prueba formal?
- 2) ¿Dichas actividades fomentan la necesidad de ir de la verdad de proposiciones a la validez de inferencias?
- 3) ¿En qué grado contribuyen a lograr el dominio sobre la estructura deductiva y sobre el uso de las reglas lógicas necesarias para el razonamiento formal?

En particular, se creó una secuencia de actividades, que fue implementada en dos grupos de estudiantes de bachillerato (estudiantes entre 15 y 17 años). Los resultados (Tanguay; 2007) muestran que las tareas favorecen el entendimiento de los estudiantes con relación a la estructura de la demostración en geometría. La estructura de las actividades, que se describe enseguida, favorece diferentes formas de trabajo en los estudiantes. Éstos pueden proceder de “atrás para adelante”, de lo menos evidente a lo más evidente; una forma de trabajo común en el quehacer matemático.

### Estructura de las actividades

Las actividades propuestas involucran tres tipos diferentes de recursos en la construcción de una demostración:

- 1) El enunciado verbal de un teorema geométrico.



#### 4) Justificaciones

- 1) Transitividad de una igualdad: Si  $x = y$  y  $y = z$  entonces  $x = z$
- 2) Un punto sobre la mediatriz de todo segmento  $PQ$ , necesariamente está a la misma distancia de los extremos  $P$  y  $Q$ .
- 3) Un punto a la misma distancia de dos puntos  $P$  y  $Q$  necesariamente está sobre la mediatriz del segmento  $PQ$ .
- 4) Definición de *mediatriz* de  $PQ$ : es la única recta que pasa por el punto medio de  $PQ$  y que hace un ángulo recto con la recta  $PQ$ .

Figura 4. Algunas justificaciones

#### 5) Construcción geométrica

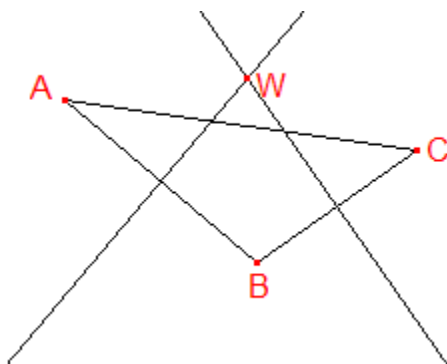


Figura 5. Construcción geométrica del teorema

### Actividades con uso de software de geometría dinámica

Hemos considerado que, al incorporar a estas tareas las capacidades dinámico-interactivas proporcionadas por el software de geometría dinámica, podemos generar un ambiente en el que los estudiantes tengan oportunidades de aprender a producir demostraciones formales a través de la interacción y exploración con los objetos.

En particular las actividades a producir deben hacer énfasis en la organización deductiva de las demostraciones; particularmente en: a) la estructura local ternaria de las inferencias, b) el papel que juegan las reglas en un proceso de deducción; y, c) en resaltar la forma no lineal de las inferencias en la estructura global de la demostración.

En las siguientes figuras se presentan las actividades diseñadas en Cabri-Geometre. Primeramente se han diseñado dos macros para la construcción de estructuras básicas, denominada BasicStruct1 y BasicStruct2, con las que es posible diseñar los diagramas (ver figura 6 y figura 7).

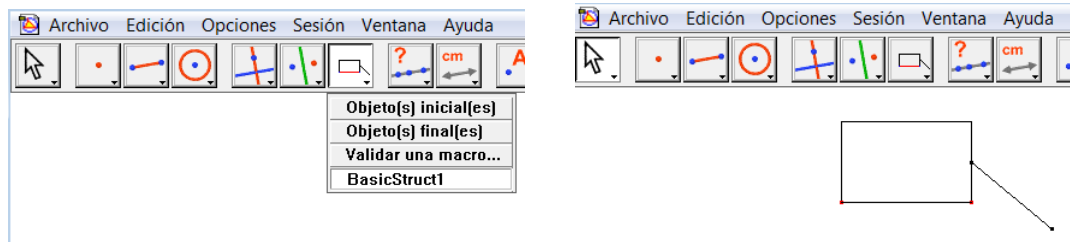


Figura 6. Ejecución de la macro BasicStruct1

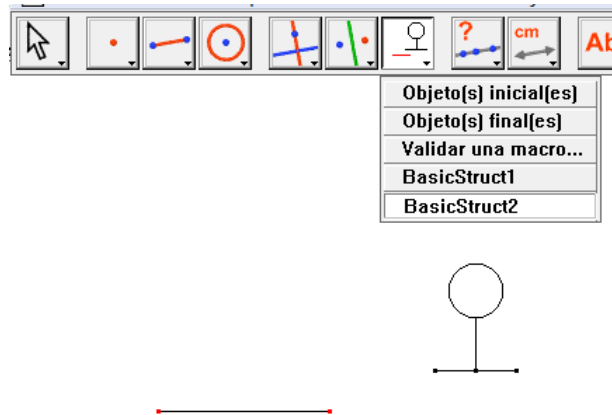


Figura 7. Ejecución de la macro BasicStruct2

Las proposiciones han sido diseñadas mediante botones que pueden ser desplazados por la pantalla para poder colocarlos en las casillas que le correspondan de acuerdo con la actividad planteada (ver figura 8).

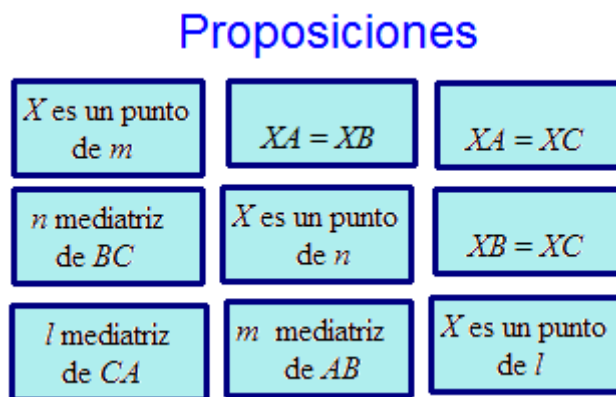


Figura 8. Construcción de proposiciones dinámicas en Cabri Geometre

Así mismo, las justificaciones se seleccionan de una lista que incluye botones con números asociados (ver figura 9).

## Justificaciones

- 1 Transitividad de una igualdad: Si  $x = y$  y  $y = z$  entonces  $x = z$
- 2 Un punto sobre la mediatriz de todo segmento  $PQ$ , necesariamente está a la misma distancia de los extremos  $P$  y  $Q$ .
- 3 Un punto a la misma distancia de dos puntos  $P$  y  $Q$  necesariamente está sobre la mediatriz del segmento  $PQ$ .
- 4 Definición de *mediatriz* de  $PQ$ : es la única recta que pasa por el punto medio de  $PQ$  y que hace un ángulo recto con la recta  $PQ$ .

Figura 9. Construcción de justificaciones dinámicas en Cabri Geometre

En la actividad, el estudiante también cuenta una construcción geométrica parcial que permite visualizar el trabajo durante la construcción de la demostración. (ver figura 10).

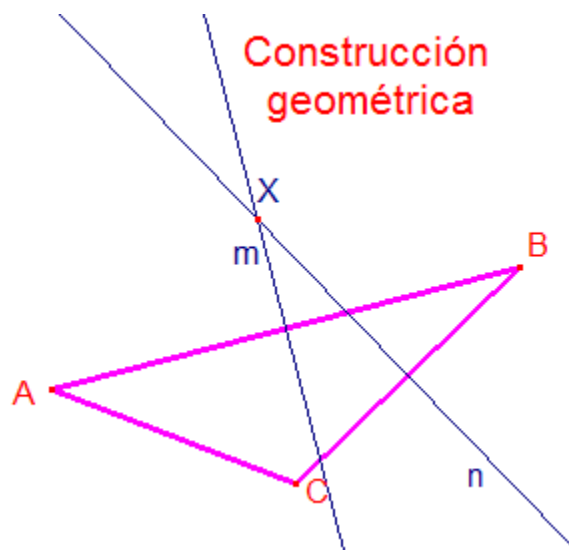


Figura 10. Construcción geométrica en Cabri

## Conclusiones

¿Qué pueden aportar los instrumentos tecnológicos al aprendizaje de las matemáticas? Es la pregunta fundamental que se quiere responder en este trabajo, aportando una propuesta para promover aspectos relevantes del pensamiento geométrico.

La importancia social, cultural y económica que actualmente tienen los medios de comunicación así como la necesidad de buscar formas de enseñanza que se adecúen a los actuales ambientes de desarrollo de los jóvenes, hacen que las tecnologías de la información y comunicación (TIC), sean herramientas de trabajo fundamentales. Por ello es necesario proponer y generar materiales de aprendizaje que hagan uso efectivo de estas herramientas.

Las actividades diseñadas han mostrado ser importantes para promover en los estudiantes la organización deductiva de una demostración. Particularmente, en planes de estudio de bachillerato, en los que la demostración formal aún tiene un fuerte peso como parte de los contenidos curriculares (como es el caso de Canadá y Francia), se ha evidenciado que con este tipo de actividades los estudiantes pueden llegar a realizar demostraciones muy complejas.

A lo largo de las diferentes reformas educativas en nuestro sistema escolar, en la geometría en particular y en las matemáticas en general, se ha dado un peso menor a los procesos de demostración, en comparación con otros países, promoviendo en su lugar, las actividades de manipulación y exploración como medios para plantear conjeturas, que pueden ser justificadas mediante procesos diferentes a los de demostración formal.

Aún cuando las formas de validación del conocimiento matemático están cambiando, la demostración formal y el rigor matemático no sólo buscan probar y validar resultados, buscan también promover formas de razonamiento cada vez más sofisticadas. Si bien en el bachillerato, es posible que el nivel de rigor matemático esté mediado por procesos de exploración, debe incluirse lo suficiente para lograr el entendimiento y el convencimiento. Un argumento presentado con suficiente rigor, puede convencer a un mayor número de estudiantes (Hanna, 2007).

Las actividades que se están diseñando permitirán al profesor contar con recursos para dar oportunidades a sus estudiantes de desarrollar habilidades relacionadas con la organización deductiva en geometría, así como de realizar exploraciones a través del uso de software de geometría dinámica.

### **Bibliografía**

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. No. 18 (2), pp.147-176.
- Duval, R (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), (pp. 233-261).
- Duval, R (1995). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), (pp. 233-261).
- Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2 (pp.135-170).
- Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. En: P. Boero (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 3–16). Sense Publishers.
- Harel, G., Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A.Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Harel, G. (2007) Students' Proof Schemes Revisited. En: P. Boero (Ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*. (pp. 65 - 78). Sense Publishers, USA.

- Larios, V. (2000). "Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática". Tesis de maestría en Docencia de las Matemáticas, UAQ,
- National Council of Mathematics Teachers. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston Va. USA.
- SEP (2007). *Plan de Estudios 2006*. Secretaría de Educación Pública, México.
- Tall, D. (1999) The Cognitive Development of Proof Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World, vol, 4*, 117-136. Reston, Virginia NCTM. ISBN 0-87353-473-5
- Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. 10, pp. 55-93.
- Tanguay, D. (2006) Comprendre la structure déductive en démonstration. *Envol*, Vol. 134, France.
- Tanguay, D. (2007) Learning proof: from truth towards validity. *Proceedings of 10<sup>o</sup> Conference on RUME*, San Diego, California, USA.