Simposio Latinoamericano Integración de Tecnología en el Aula

9 al 11 de Julio 2009
Guadalajara, Jalisco
México

TALLER: "GEOMETRÍA Y MODELOS MATEMÁTICOS EN LA TI-84 PLUS"

MARCO BARRALES VENEGAS
COLEGIO ALEMÁN de CONCEPCIÓN
mbarrale@dsc.cl

INTRODUCCIÓN

El presente taller tiene por finalidad analizar, de manera práctica y con la ayuda del entorno gráfico de la TI-84 Plus, actividades didácticas del aprendizaje de la geometría, aplicada a situaciones reales.

La Geometría es una ciencia formativa que nos ayuda a razonar. Está presente en la naturaleza y es utilizada en diversas actividades del hombre. Puede ser muy atractiva si se logra hacerla próxima a los alumnos; pero, también puede ser muy difícil, si predomina en su enseñanza la abstracción.

La geometría plana y espacial constituye un bloque de contenidos muy importantes en la enseñanza Básica y Media tanto por el interés intrínseco de los conocimientos propuestos como para sentar las bases de estudios posteriores. Gran parte de estos contenidos pueden ser introducidos y enseñados con la ayuda de la tecnología de las calculadoras Texas Instruments, especialmente con el modelo Voyage 200 y TI-84 Plus, que contiene el programa Cabri Geometry y Cabri Junior respectivamente, que permite dibujar figuras planas y manipular las construcciones dinámicamente.

Calculadora Gráfica TI-84 Plus Silver Edition

Algunas teclas básicas

[ON] Enciende la calculadora. [OFF] Apaga la calculadora. Pulsar [2nd]/[OFF]

[STO] →Almacena variables.

[X,T,θ,n] Permite introducir la variable X, T, θ, n directamente.

[(-)] Para números negativos.

[QUIT] Para regresar a la pantalla principal. Pulsar [2nd]/[QUIT]

[CLEAR] Para limpiar la pantalla principal.

[DEL] Borra el carácter en la posición del cursor.

[ENTER] Ejecuta la instrucción.

La función secundaria de cada tecla está impresa encima de ella en color azul/celeste. Si se pulsa la tecla azul [2nd], se activará para la siguiente pulsación el carácter de la palabra impresa en azul/celeste encima de cada tecla, por ejemplo, para acceder al menú [CALC], se tiene que pulsar la tecla [2nd] y luego la tecla [TRACE].

La función alfabética de cada tecla está impresa encima de ella en color verde. Si se pulsa la tecla verde [ALPHA], se activará para la siguiente pulsación el carácter alfabético impreso en verde sobre cada tecla, por ejemplo, para introducir la letra B, se tiene que pulsar la tecla [ALPHA] y luego la [APPS].

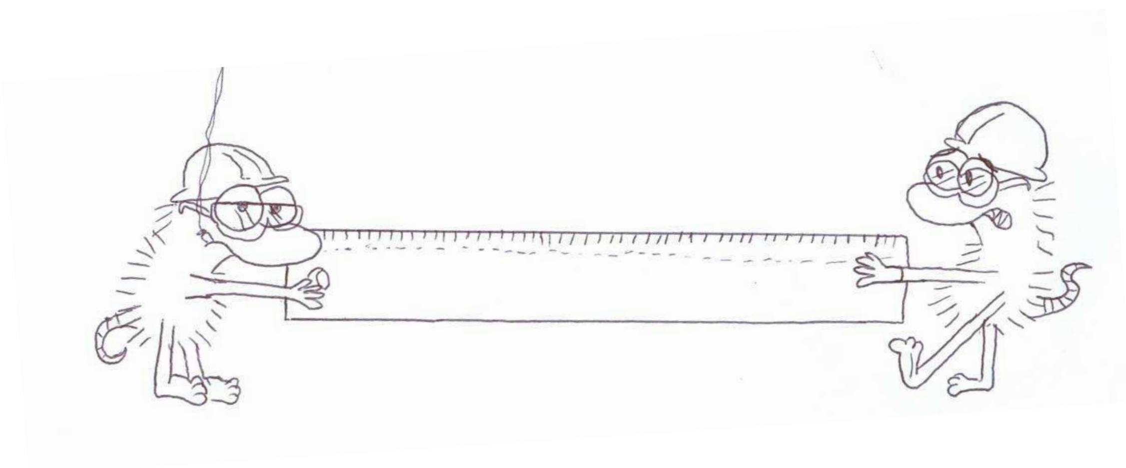
[Y=] Para ingresar funciones.

[STAT] Para ingresar lista y calcular regresiones.

[APPS] Aplicaciones.

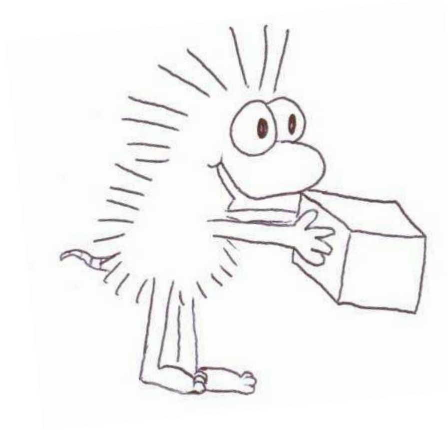
[GRAPH] Para representar funciones.

[ZOOM] y [WINDOW] Para modificar la pantalla de las graficas.

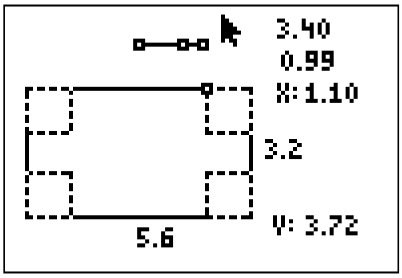


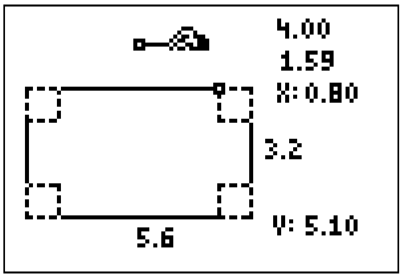
ACTIVIDADES

1.**Volumen**. Con una cartulina rectangular de 56 por 32 cm. se quiere construir una caja abierta cortando en cada esquina un cuadrado y doblando los lados hacia arriba. Encontrar el lado del cuadrado que debe cortarse para que el volumen de la caja sea máximo. Determinar el modelo y graficar la situación para determinar el máximo volumen.

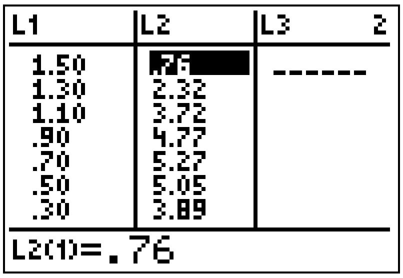


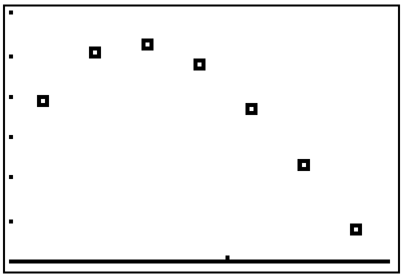
a) Se realiza la construcción geométrica en la aplicación Cabri Jr.



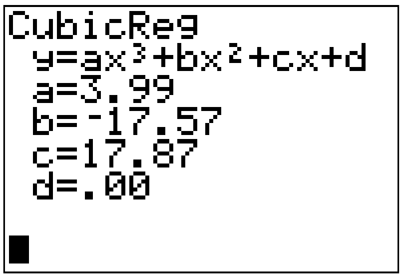


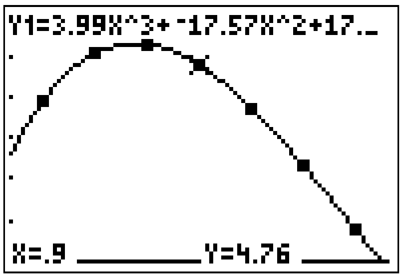
b) Se transfiere los valores del tamaño del lado del cuadrado a restar en cada esquina y el volumen de la caja al modificar el valor con la ayuda de la geometría dinámica a una tabla de valores y se representan los datos.



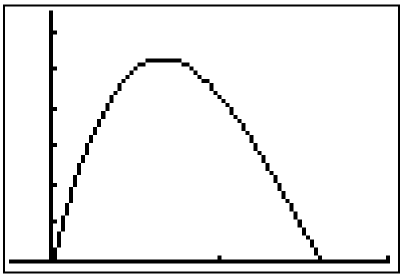


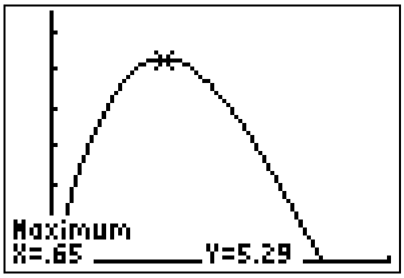
c) Al observar los datos probamos un modelo que mejor se ajuste a la información en base a una regresión. Para nuestro ejemplo probamos una regresión cúbica y lo graficamos para observar el ajuste entre el modelo y los puntos.





d) En el ambiente grafico calculamos el máximo del modelo cúbico.



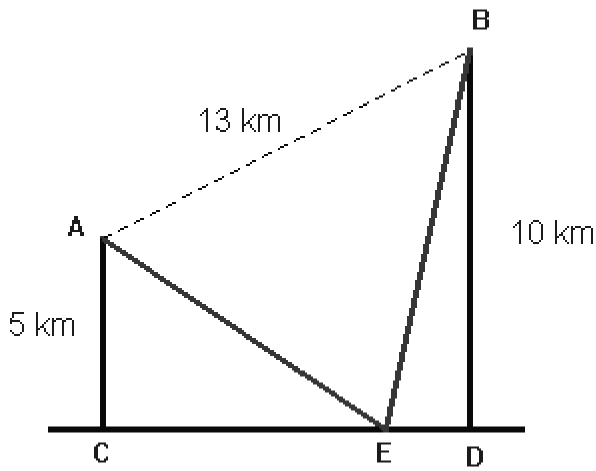


Por lo tanto si el tamaño del lado del cuadrado es de 6,5 cm el volumen máximo de la caja es de 5.290 cm^3.

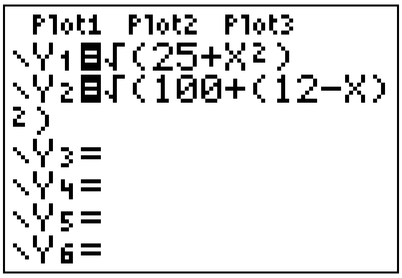
Para justificar el trabajo anterior vamos a buscar la solución en el ambiente simbólico. Asignamos al lado del cuadrado una distancia x. Luego el ancho es $a = 56 - 2x$, el largo $b = 32 - 2x$ y el alto $c = x$.
El Volumen a maximizar es: $V = a \cdot b \cdot c$, es decir $V(x) = (56 - 2x) \cdot (32 - 2x) \cdot x$
Desarrollando la expresión tenemos: $V(x) = 4x^3 - 176x^2 + 1792x$
Derivando el volumen obtenemos: $V'(x) = 12x^2 - 352x + 1792$
Igualando la derivada a cero y resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos los siguientes puntos críticos: $x_1 = 6{,}5$ y $x_2 = 22{,}7$. La solución 2 no pertenece al dominio de la situación problemática.
Reemplazamos el valor crítico en la segunda derivada: $V''(x) = 24x - 352$, $V''(6{,}5) = -196$. Por lo cual el valor $x_1 = 6{,}5$ es un punto de máximo y el volumen máximo es de 5.310,5 cm^3.

2. **La estación nueva**. Las ciudades A y B están al mismo lado de una vía del tren, respectivamente a las distancias de 5 y 10 Km. La distancia en línea recta entre A y B es 13 Km. La compañía de ferrocarriles propone construir una estación E para las dos ciudades y está estudiando el problema: ¿cuál es el lugar óptimo para instalar E? Obviamente se tienen que construir carreteras desde A y B hacia E; el terreno alrededor de las ciudades es muy plano y no hay obstáculos para su construcción. Hay diferentes partes interesadas en el asunto:

1) El deseo de la ciudad A es que E esté lo más cerca de A.
2) La ciudad B quiere que E esté lo más cerca de B.
3) El gobierno de la región quiere que E este equidistante de A y B.
4) La compañía de autobuses quiere que la distancia total a recorrer desde A hasta B pasando por E sea mínima (AE + BE mínima).



Desde el punto de vista matemático la condición 4) es la más interesante. Las dos primeras dan lugar a la exploración de la posición relativa de las ciudades y la línea del tren y pone a los alumnos en la pista del Teorema de Pitágoras.

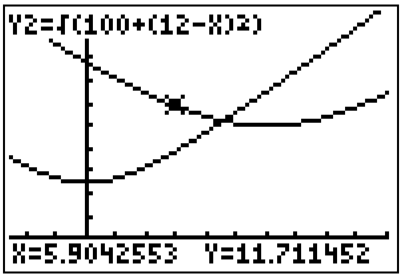


La tercera opción tiene una solución geométrica muy sencilla: la construcción de la mediatriz del segmento AB. Para la resolución analítica se consideran los puntos C y D a lo largo de la línea del tren, pies de las perpendiculares desde A y B.

Se comprueba que CD = 12 Km.

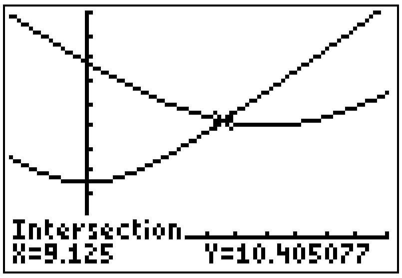
Sea CE=x; AE=Y_1; BE=Y_2.

Definimos con la calculadora: $Y_1 = \sqrt{25 + x^2}\,; Y_2 = \sqrt{100 + (12 - x)^2}$

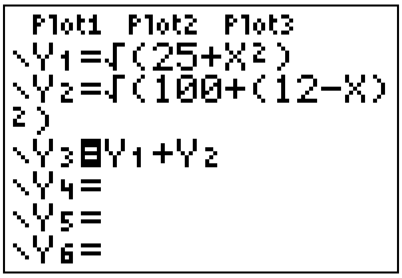


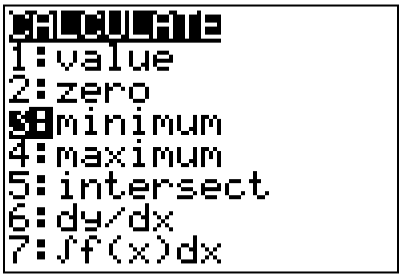
Se representan ambas funciones con [TRACE], seleccionando previamente el [ZOOM] apropiado.

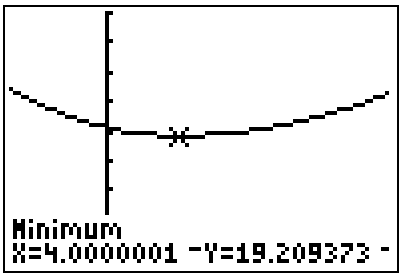
Con el menú Calculate se puede calcular el punto de intersección donde Y_1=Y_2.



Para la cuarta cuestión se define la función $Y_3 = Y_1 + Y_2$, seleccionamos el [ZOOM] y con el Menú Calc [2nd] [TRACE] se obtiene el valor de x para el cual la distancia AE + BE es mínima (aproximadamente x = 4.04 Km) siendo la distancia mínima 19.21 Km.

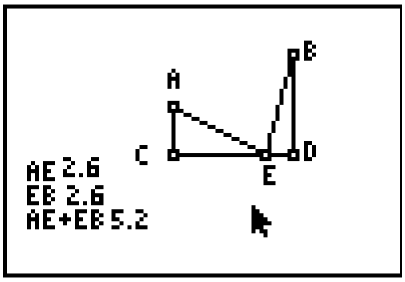


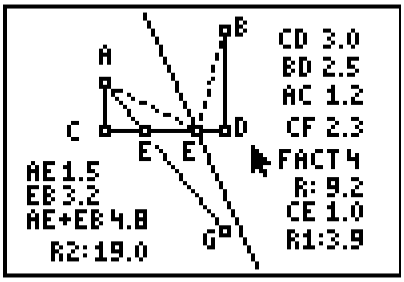




GEOMETRIC SOLUTION

Using the *Cabri ® Jr* apps we can recreate the situation





Move the point E

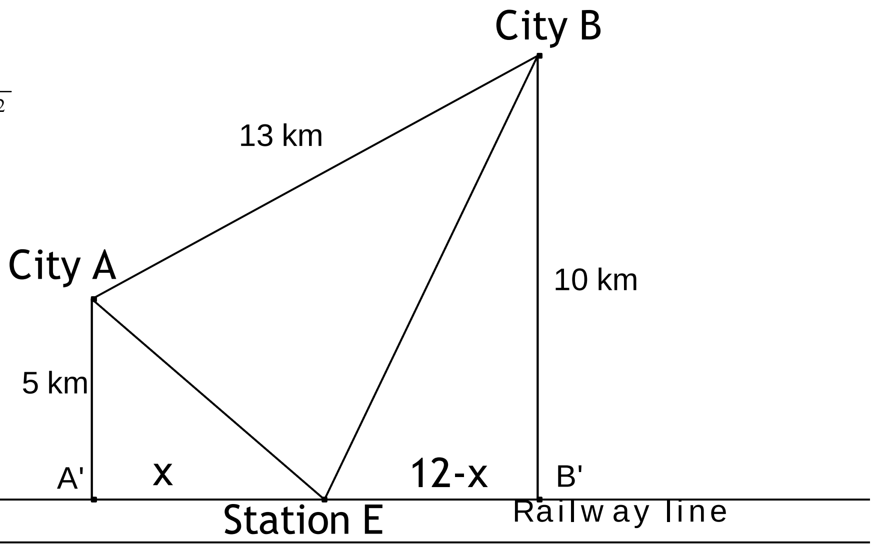
NUMERICAL SOLUTION

$A'E = x$

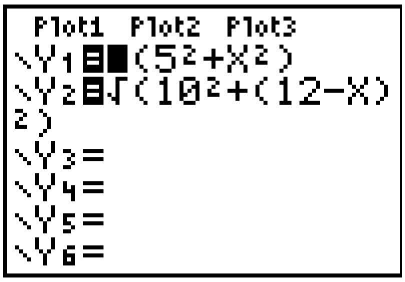
$\therefore EB' = 12 - x$

$AE = \sqrt{5^2 + x^2}$

$EB = \sqrt{10^2 + (12 - x)^2}$

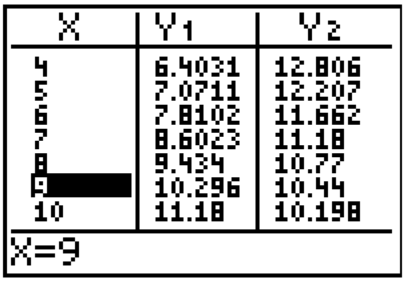


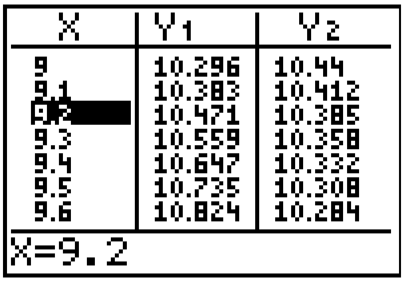
[Y=]

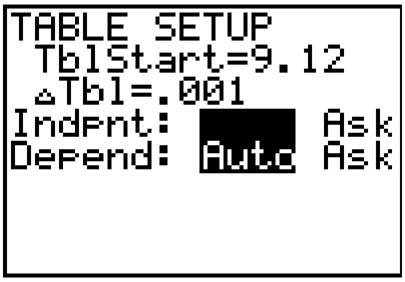


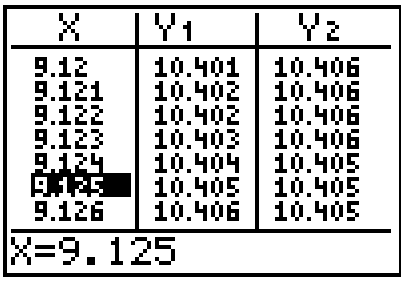
$[2^{ND}]$ [GRAPH] [TABLE]

$[2^{ND}]$[WINDOW] [TBLSET]



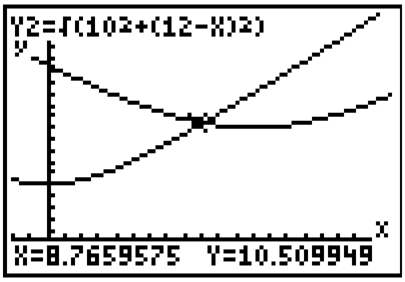




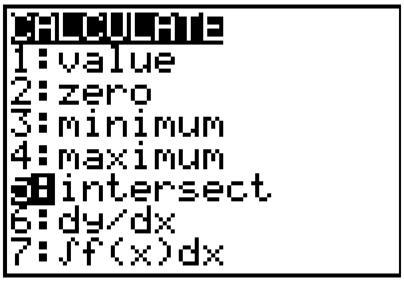


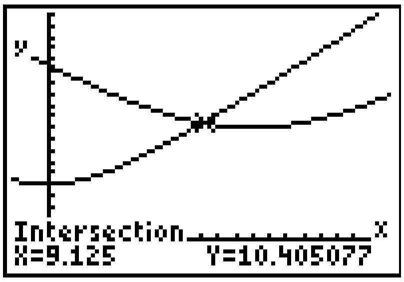
GRAPHICAL SOLUTION

[GRAPH] and [TRACE]



$[2^{ND}]$ [TRACE] [CALC]

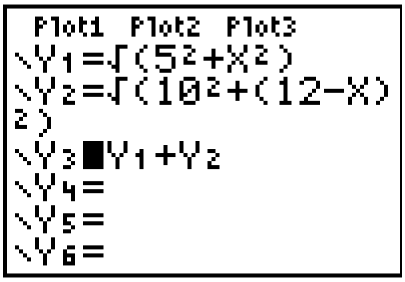


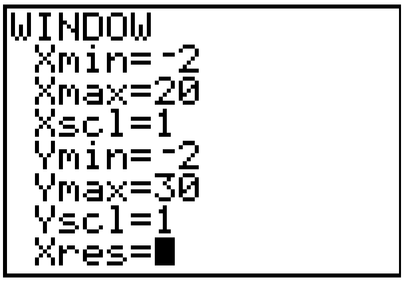


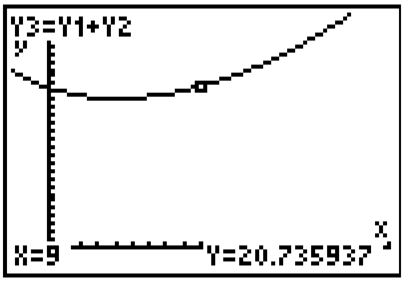
[Y=]

[WINDOW]

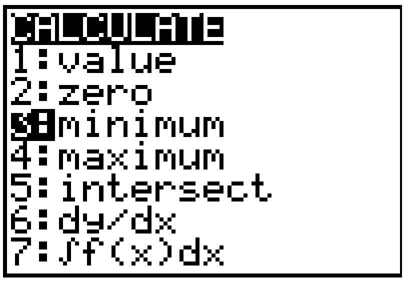
[GRAPH]

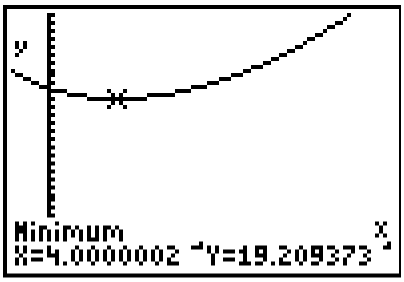






$[2^{ND}]$ [TRACE] [CALC] 3: minimum





ALGEBRAIC SOLUTION

$$AE = \sqrt{5^2 + x^2}$$
$$EB = \sqrt{10^2 + (12 - x)^2}$$
$$\sqrt{5^2 + x^2} = \sqrt{10^2 + (12 - x)^2}$$
$$25 + x^2 = 100 + 144 - 24x + x^2$$
$$24x = 219$$
$$x = \frac{219}{24} = 9.125$$

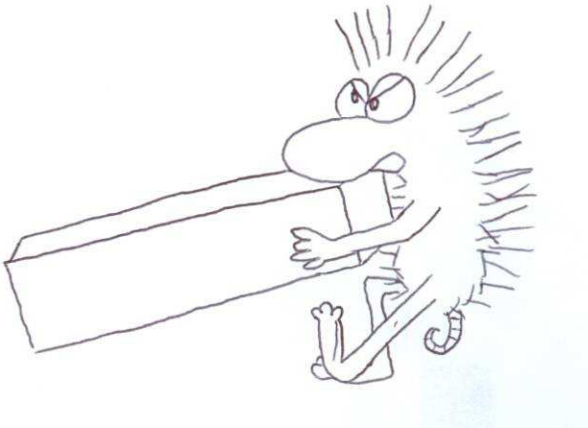
If the station E is to 9,125 km of A’ the distances they are equidistant.

$Y1 + Y2$

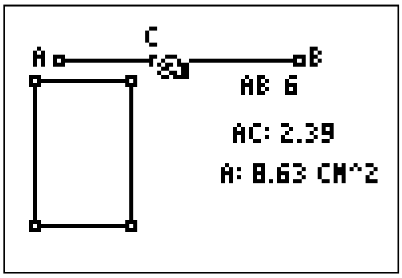
$$f(x) = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{10^2 + (12 - x)^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$f''(x_0) > 0$$

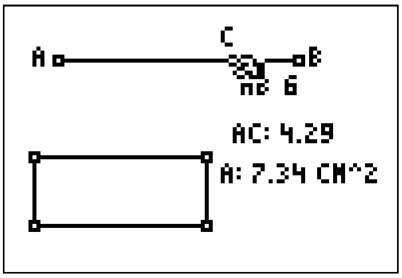
If A’E = 4 km, the crossed total distance is minima. (as short as possible)

3. **Rectángulo**. Construir un rectángulo de perímetro dado, cuya área de la región rectangular sea máxima.

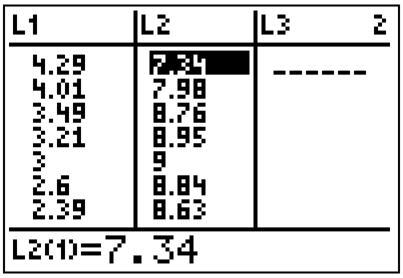


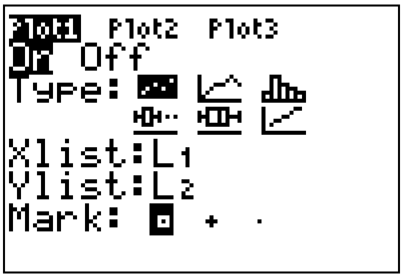
Construcción: Dado un segmento AB (perímetro dado), determinar un punto C sobre AB. Asignar los segmentos AC y CB. Con los segmentos AC y CB construir el rectángulo.



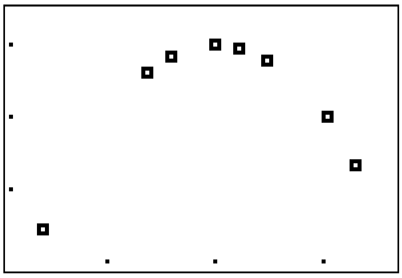


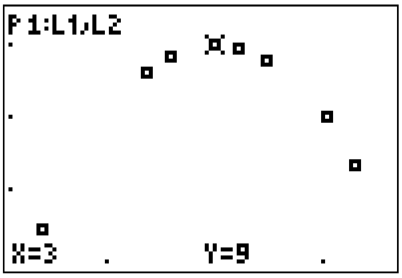
Calcular el área de la región rectangular y registrar en una tabla de valores los datos obtenidos del área y el segmento AC, cuando movemos el punto C sobre AB.



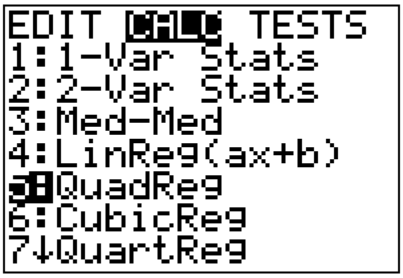


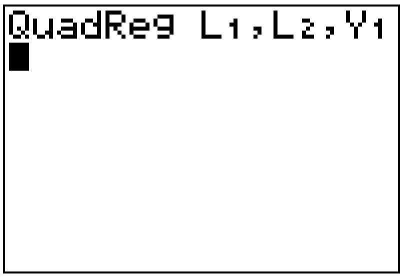
Representamos los datos en un gráfico de puntos.

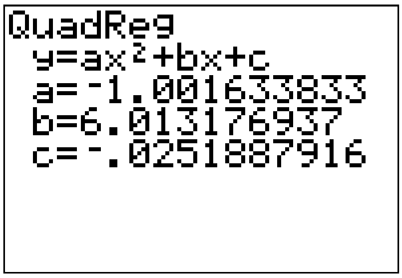


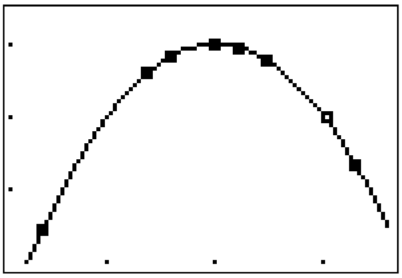


Determinar el modelo algebraico entre el segmento AC y el área de la región rectangular.

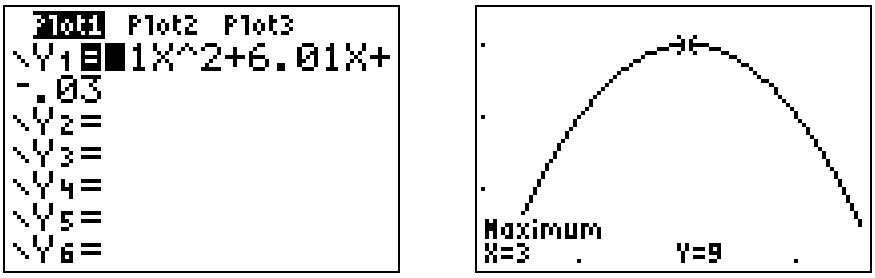








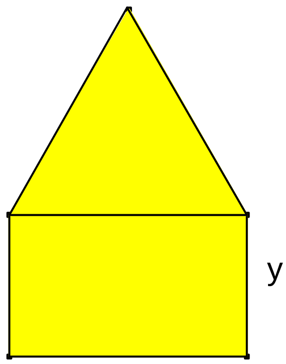
Graficar el modelo y determinar el punto de máximo.



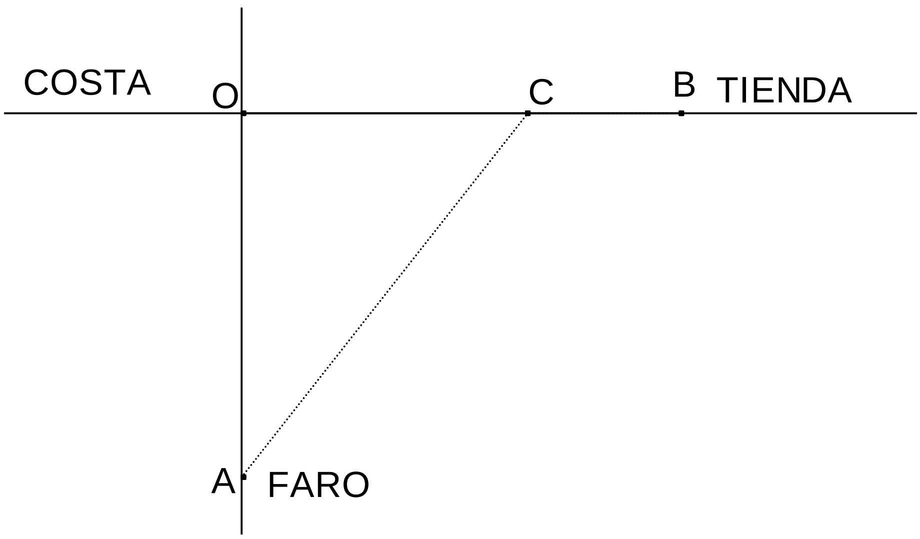
Nos damos cuenta que el rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado 3 cm.

Más problemas…

1.Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 6 metros. Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?
Construir la ventana en Cabri Jr asignando a un segmento AB= 6 metros y determinando un punto sobre dicho segmento para determinar los lados x e y.
Determinar la expresión simbólica en función de x del problema a maximizar.



2. Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 Km. del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 Km. de O, hay una tienda. Si el guardafaros puede remar a $2\,km/h$, y puede caminar a $4\,km/h$, dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?
Representa la situación en Cabri Jr. y graficar para obtener el tiempo mínimo.
No olvidar que $D = V \cdot T$ (Distancia es igual a la Velocidad por el Tiempo)



4.Dada un cuadrado de lado “a”, hallar el cuadrado inscrito de área mínima. Determinar el modelo en base a la tabla de valores y representar la función en el sistema de coordenadas para determinar el valor mínimo.

5.Construir un triángulo rectángulo e inscribir un rectángulo en él. Qué dimensiones debe tener el rectángulo para obtener el área máxima de su región. Determinar una expresión algebraica y su respectiva grafica.

6.Se tiene un alambre de longitud L y se desea dividirlo en dos segmentos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Hallar la longitud de cada segmento para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima.

CONCLUSIONES

Los estudiantes pueden así emplear la calculadora como un instrumento heurístico para el descubrimiento de las relaciones geométricas de carácter “dinámico” como las descritas y relacionar con otras áreas de la matemática.

La resolución de problemas utilizando una metodología activa (constructivista) y permitiendo el uso de tecnología resulta motivadora y entretenida, ya que los alumnos pueden experimentar varios métodos (geométrico, analítico, gráfico, numérico) para resolver un problema y avanzar a su ritmo, lo cual les permite entender el concepto en forma más profunda y tener una visión global de la situación a estudiar.

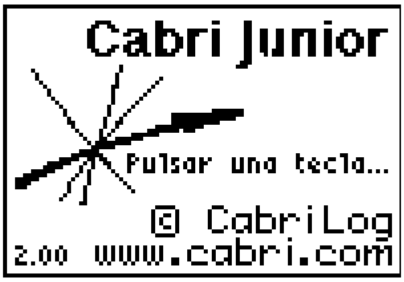
Trabajando con esta metodología se logra no solo adquirir competencias en el campo de la matemática, sino también en el trabajo grupal de los estudiantes. La discusión de las soluciones y la elección del mejor método de investigación serán un significativo aporte al aprendizaje del respeto a las opiniones ajenas y el reconocimiento del error propio y el acierto ajeno como también el respeto al que se equivoca.

ANEXO

GEOMETRÍA EN CABRI JUNIOR EN LA TI- 84 PLUS SILVER EDITION

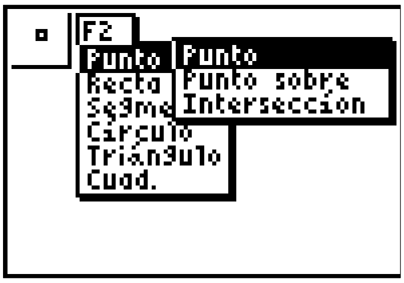
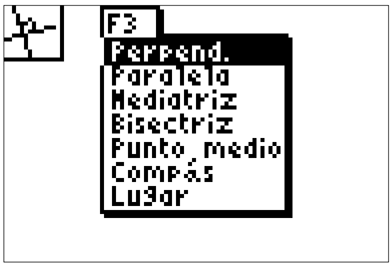
Los primeros pasos en Cabri Junior…

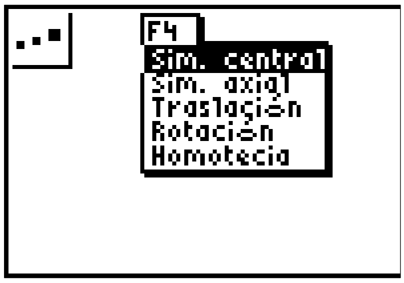
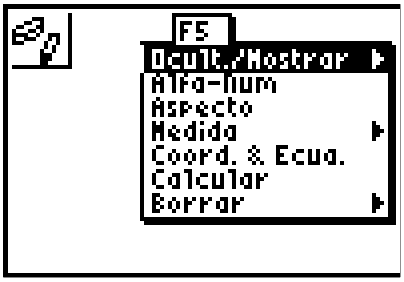
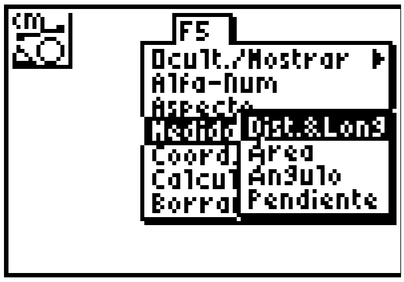
Por medio de la tecla [APPS] podemos acceder a las aplicaciones que tiene la calculadora y una de ellas es CabriJr y [ENTER] (Pulsar una tecla) [ENTER].



Para entrar a las herramientas geométricas debemos presionar las teclas del F1 al F5 que corresponden a las superiores en azul.

[Y=], [WINDOW], [ZOOM], [TRACE], [GRAPH]

Archivo F1 [Y=]	 
Creación/Figuras F2 [WINDOW]	
Construcción F3 [ZOOM]	

Transformación F4 [TRACE]	
Varios / Misceláneos F5 [GRAPH] Ocultar Figuras Cálculo de Longitud, Área, Ángulo, Pendiente Borrar Objetos	 

Nota: Las ilustraciones fueron creadas por mi hijo Joaquín Antonio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Carral, M. (2002). Construcción de funciones con Cabri Géomètre. Memorias Segundo Encuentro de Matemática. Colegio Alemán de Concepción. Chile.
[2] Keyton, M. (1996). 92 Geometric Exploraciones on the TI-92. Dallas: Texas Instruments, Inc.
[3] Vonder, Ch. y Engebretsen, A. (1996). Geometric Investigations for the Classroom. Dallas: Texas Instruments, Inc.
[4] T^3 España. (1998). Cabri-géomètre en la calculadora TI-92. Madrid: Texas Instruments.
[5] Mora, J.A. y Monzó, O. (1999) Coordenadas en Cabri Géomètre II, Un acercamiento al Análisis y la Estadística. Memorias IX J.A.E.M. Lugo, España.
[6] Barrales, M. (2002). Geometría y Análisis con la TI-92. Memoria II Encuentro de Matemática. Colegio Alemán de Concepción. Talleres Diario El Sur S.A.
[7] González, J. M. (2003). Connecting Álgebra and Geometry Using Locus and the Voyage 200. Memoria 15th Annual T^3 International Conference. Nashville, Tennessee.
[8] Barrales, M. (2003). A way from Geometry to Analysis. Memoria 15th Annual T^3 International Conference. Nashville, Tennessee.
[9] Barrales, M. (2003). Construcción geométrica de la función seno. Revista Innovaciones Educativas, Cuarta Edición. Texas Instruments.
[10] Carral, Michel. Géométrie, Ellipses (1995)
[11] Guzmán Miguel de. Pensamientos en torno al quehacer matemático.
http://www.cfm.udec.cl/mdeguzman/