



# Simposio Latinoamericano Integración de Tecnología en el Aula

9 al 11 de Julio 2009  
Guadalajara, Jalisco  
México

## PONENCIA

# "CURIOSIDADES EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO"



MARCO BARRALES VENEGAS  
COLEGIO ALEMÁN de CONCEPCIÓN  
mbarrale@dsc.cl



## INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo explora la relación geométrica que producen las perpendiculares bajas desde un punto cualquiera en el interior de un triángulo equilátero a los lados con respecto a la altura de dicho triángulo (Teorema de Viviani's). Se realizará la comprobación numérica, otras geométricas, una demostración y la extensión a otras figuras utilizando la aplicación Cabri en la Voyage™ 200.

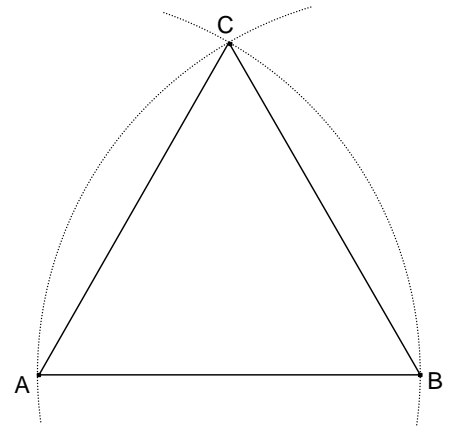
Teorema (Teorema de Viviani's):

La suma de las perpendiculares bajadas desde un punto en el interior de un triángulo equilátero a los lados es siempre constante e igual a la altura del triángulo equilátero.

Primera parte. Comprobación numérica

1. En la primera parte construiremos un triángulo equilátero en base a Euclides.

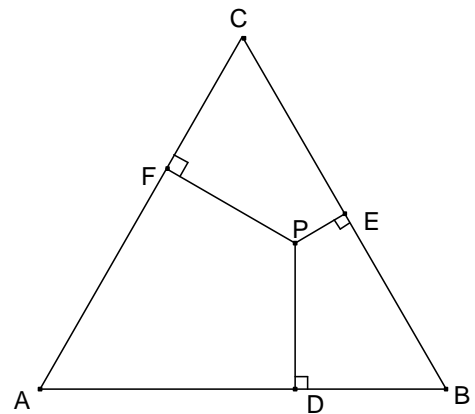
Construcción: Construir dos puntos A y B, construir una circunferencia con centro en A y radio AB, construir otra circunferencia con centro en B y radio BA, la intersección de ambas circunferencias determina el punto C. Por lo tanto triángulo ABC es equilátero.



2. Crear un punto P en el interior del triángulo.

3. Construir las perpendiculares desde P a los lados del triángulo.

4. La intersección de las perpendiculares con los lados las definiremos con las letras D, E y F.

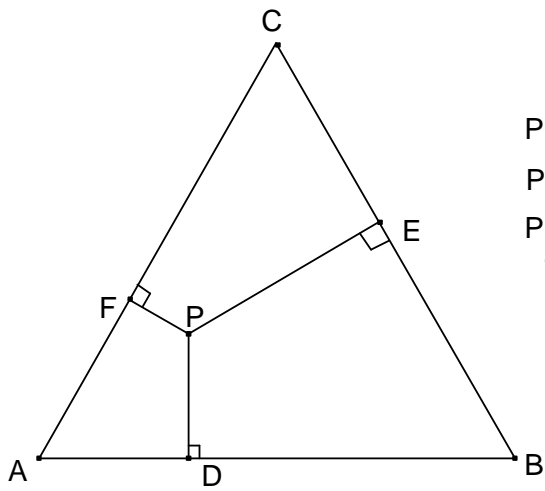


5. Medir los segmentos PD, PE y PF.

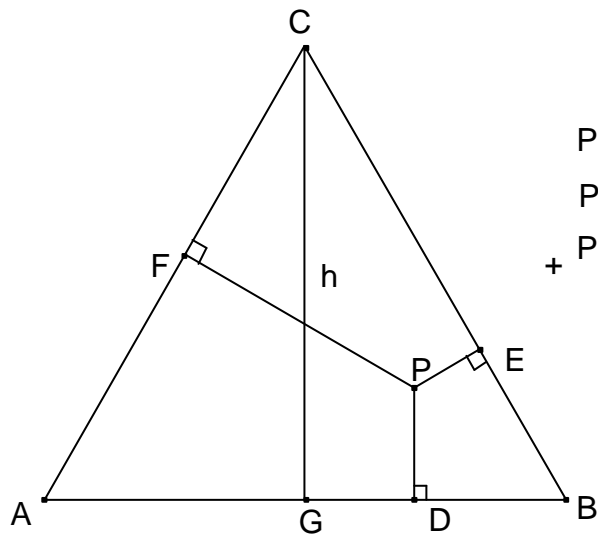
6. Calcular  $PD+PE+PF$ .

7. Mover el punto P en el interior del triángulo. ¿Qué observas?

8. Construir la altura del triángulo desde el vértice C al lado AB y medirla. ¿Qué observas?



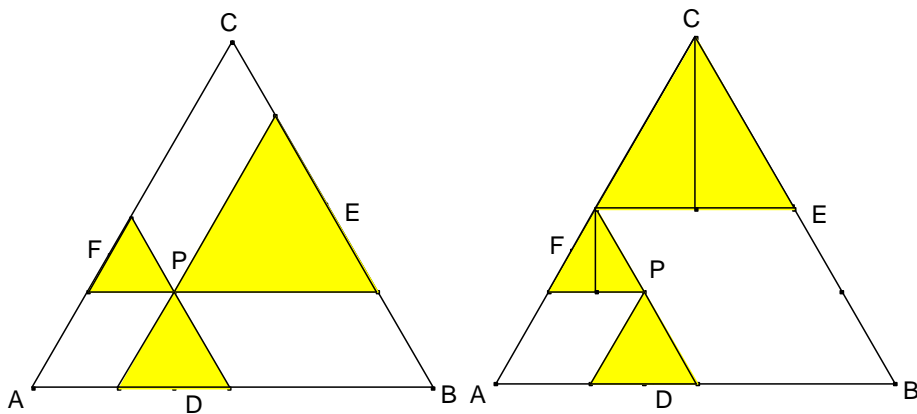
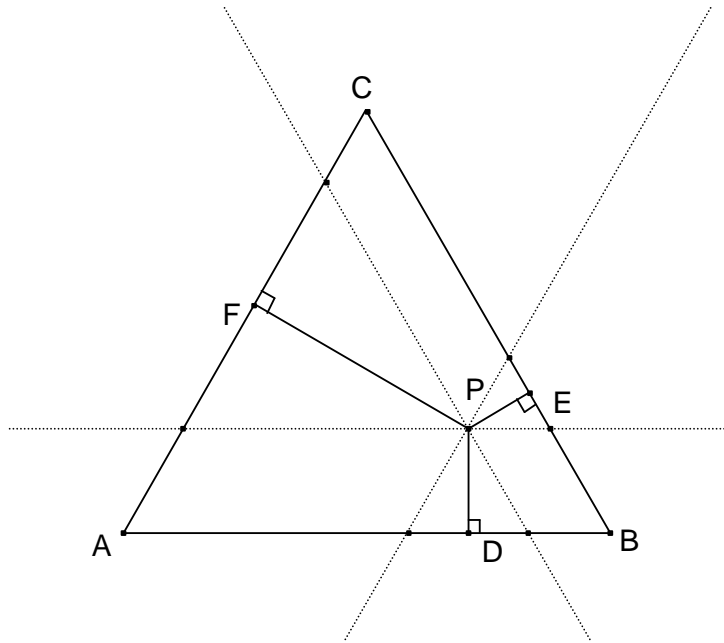
$PF=0,97$  cm  
 $PE=3,18$  cm  
 $PD=1,79$  cm  
 + -----  
 $5,95$  cm



$PF=3,48$  cm  
 $PE=1,00$  cm  
 $PD=1,47$  cm  
 + -----  
 $5,95$  cm  
 $h=5,95$  cm

Segunda parte.  
Comprobación y demostración geométrica

(1) Para realizar una comprobación geométrica trazaremos por el punto P rectas paralelas a los lados para formar tres triángulos equiláteros que contienen las perpendiculares como alturas y utilizando transformaciones geométricas como una traslación y rotación de los triángulos para que las tres perpendiculares desde P a los lados del triángulo queden en la misma orientación y así se pueda comparar con la altura del triángulo original, por lo tanto  $h = PF + PE + PD$



(2) Demostración en base a áreas de regiones triangulares.

Unimos con segmentos el punto P y los tres vértices del triángulo ABC, determinando tres triángulos.

$$(1) PD + PE + PF = h$$

$$(2) \text{Area}(APB) + \text{Area}(BPC) + \text{Area}(CPA) = \text{Area}(ABC)$$

$$(3) \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot PD) + \frac{1}{2} \cdot (BC \cdot PE) + \frac{1}{2} \cdot (AC \cdot PF) = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot h)$$

El lado  $AB$  es igual a los otros dos lados, ya que es un triángulo equilátero, por lo tanto  $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

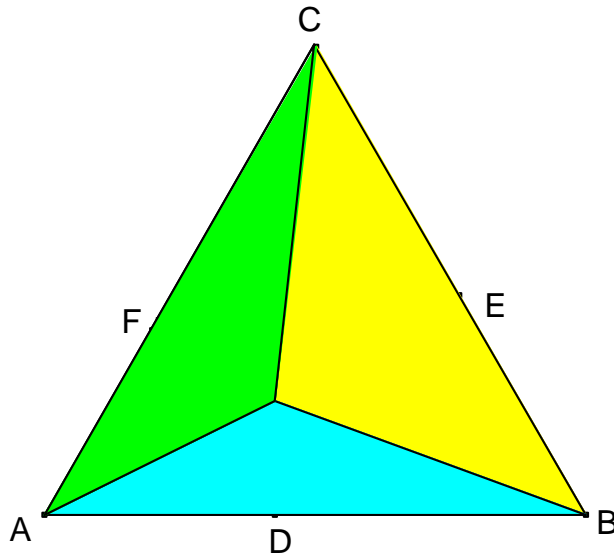
Reemplazando en el punto (3) tenemos:

$$\frac{1}{2} \cdot (AB \cdot PD) + \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot PE) + \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot PF) = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot h)$$

Factorizamos por  $\frac{1}{2} \cdot AB$

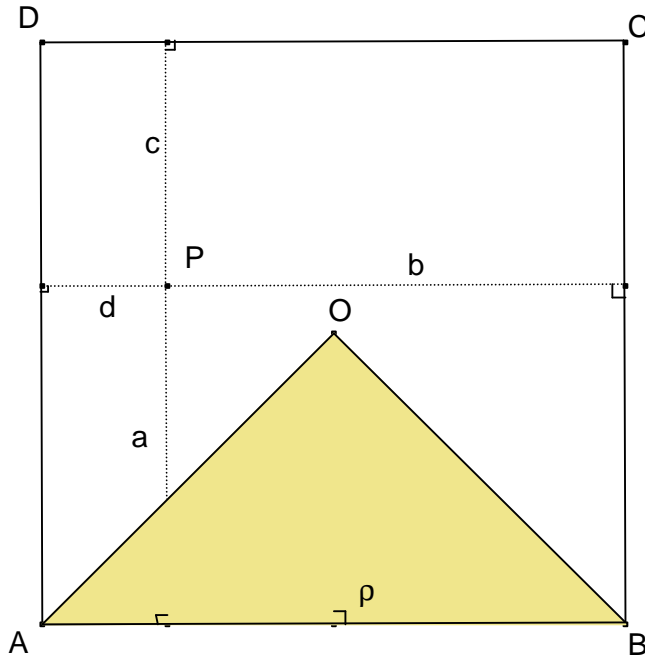
$$\frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (PD + PE + PF) = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot h$$

Dividimos por:  $\frac{1}{2} \cdot AB$  y obtenemos:  $PD + PE + PF = h$ , lo que se quería demostrar.



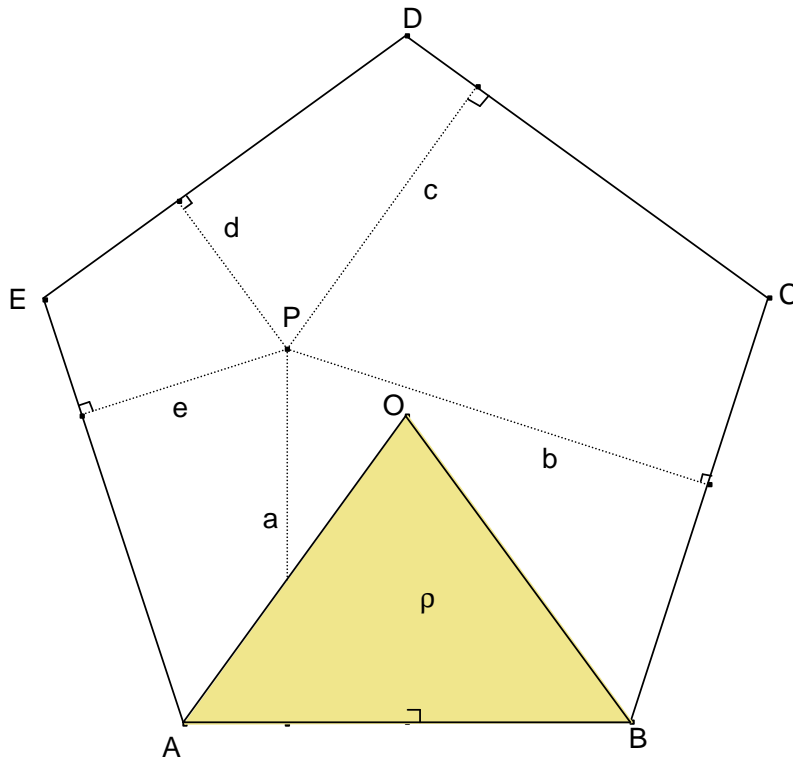
Tercera parte.  
 Extensión de la relación.

a) Cuadrado



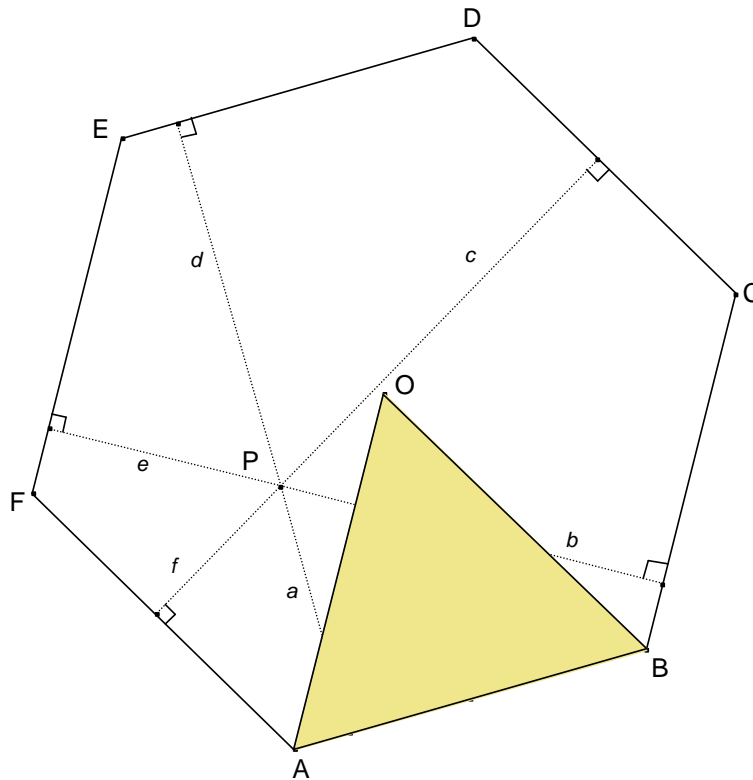
$a = 4,72 \text{ cm}$   
 $b = 6,37 \text{ cm}$   
 $c = 3,40 \text{ cm}$   
 $d = 1,74 \text{ cm}$   
 $a+b+c+d = 16,23 \text{ cm}$   
 $\rho = 4,06 \text{ cm}$   
 Apothem  $\times 4 = 16,23 \text{ cm}$

b) Pentágono



$a = 5,59 \text{ cm}$   
 $b = 6,60 \text{ cm}$   
 $c = 4,83 \text{ cm}$   
 $d = 2,73 \text{ cm}$   
 $e = 3,20 \text{ cm}$   
 $a+b+c+d+e = 22,95 \text{ cm}$   
 Apothem =  $4,59 \text{ cm}$   
 Apothem  $\times 5 = 22,95 \text{ cm}$

c) Hexágono



$a = 4,14 \text{ cm}$

$b = 6,39 \text{ cm}$

$c = 7,38 \text{ cm}$

$d = 6,11 \text{ cm}$

$e = 3,86 \text{ cm}$

$f = 2,88 \text{ cm}$

$a+b+c+d+e+f = 30,76 \text{ cm}$

Apothem =  $\rho = 5,13 \text{ cm}$

Apothem  $\times 6 = 30,76 \text{ cm}$

### CONCLUSIONES

La geometría dinámica de Cabri en la Voyage<sup>TM</sup> 200, nos permite explorar y recrear conceptos matemáticos, que habitualmente no se presentan en forma gráfica, con lo cual el aprendizaje resulta más completo y participativo.

Además la tecnología (software, calculadora gráfica) provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos, y puede ser pensado como una herramienta cognitiva o bien como un agente didáctico. La representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semióticos y la conexión entre los mismos permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Laborde, JM.(2002). Interactive geometry for everyone on the TI-83 Plus. 14<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. Calgary, Canadá.
- [2] Laborde, C&JM.(2003). Geometrical Thinking for all with Cabri-Junior on the TI-83 Plus. 15<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. Nashville, Tennessee
- [3] Koss, R. (2003). Geometry on the TI-83 An Introduction to Cabri Jr. 15<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. Nashville, Tennessee.
- [4] Beckmann, J. (2003). Cabri-Jr. Geometry APP on the TI-83 Plus. 15<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. Nashville, Tennessee.
- [5] Olmstead, G., Vonder Embse, Ch. and Campe, K.(2004). Exploring Mathematics with the Cabri Jr. Application. Texas Instruments Incorporated. Dallas.
- [6] Vonder Embs, Ch. (2004). Dynamic Geometry using Cabri Junior <sup>TM</sup>. 16<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. New Orleans, Louisiana.
- [7] Laborde, C. (2004). Geometrical Transformations on the TI – 83 + with Cabri junior. 16<sup>th</sup> Annual T<sup>3</sup> International Conference. New Orleans, Louisiana.