PRESENTACIÓN INFINITESIMALISTA DE LA DIFERENCIAL DE ÁREA

Ismael Arcos Quezada (ismael_arcos@msn.com)
Eugenio Díaz Barriga Arceo (eugeniux@hotmail.com)
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México (FIUAEM)

RESUMEN

En este documento se describe la manera en la que se puede presentar el concepto de diferencial, recuperando el significado geométrico que tenía en los orígenes del cálculo, el cual se perdió cuando las cantidades infinitamente pequeñas fueron desechadas. Ello en el entendido de que, en los cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería, uno de los principales propósitos es el de facilitar el acceso al conocimiento de los conceptos propios de las ciencias de la ingeniería.

Al final del documento se muestra cómo puede recurrirse a la tecnología para tener una perspectiva de las curvas acorde con la perspectiva de la geometría infinitesimalista que se tenía en el cálculo leibniziano.

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, a finales del siglo XVII, el cálculo, tanto el newtoniano como el leibniziano, fue criticado por una supuesta carencia de fundamento lógico. Así, cuando a fines del siglo XVIII, Lagrange escribió su *Teoría de las funciones analíticas*, se propuso presentar un cálculo que no tuviese las deficiencias de las versiones existentes, en cuanto a sus fundamentos.

En dicha obra, desde el mismo título anunciaba: "(esta obra) contiene los Principios del Cálculo diferencial, desprovistos de toda consideración de los infinitamente pequeños, de los evanescentes, de los límites y las fluxiones, y se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas". Después, en la introducción de la obra, describe las características de las versiones de Leibniz y Newton, y las deficiencias presentes en cada una de ellas. Así, respecto de la presentación al estilo de Leibniz y sus seguidores, Lagrange indicaba:

> Los primeros geómetras que emplearon el cálculo diferencial, Leibniz, los Bernoulli, L'Hôpital, etc. lo hicieron bajo la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas de diferentes órdenes, y la suposición de que se pueden ver como iguales, las cantidades que no difieren entre sí sino por una cantidad infinitamente pequeña respecto de las mismas. Contentos por haber llegado por los procedimientos de ese cálculo a resultados exactos, no se ocuparon de demostrar sus principios. Aquellos que les siguieron, Euler, d'Alembert, etc., buscaron remediar esa situación, haciendo ver, para aplicaciones particulares, que las diferencias que se habían supuesto infinitamente pequeñas, deberían ser absolutamente nulas, y que sus razones, las únicas cantidades que entran realmente en el cálculo, no son otra cosa que los límites de las razones de las diferencias finitas o indeterminadas.

Más adelante aborda la perspectiva de Newton, indicando los inconvenientes del método de las fluxiones y del Principio de las últimas razones:

> …Newton, para evitar la suposición de los infinitamente pequeños, consideró las cantidades matemáticas como engendradas por el movimiento, y buscó un método para determinar directamente las rapideces variables con las cuales se producen esas cantidades, es aquello que se ha llamado, después de él, el método de las fluxiones o el cálculo fluxional, por que él

> llamó fluxiones a esas rapideces. (…) Pero, por un lado, introducir el movimiento en un cálculo que no tiene por objeto más que cantidades algebraicas es introducir una idea extraña, que obliga a ver esas cantidades como espacios recorridos por un móvil; por otro, que no se tiene un idea muy clara de qué es la rapidez de un punto a cada instante.
>
> También Newton mismo, en su libro de los Principios, prefirió por más corto, el método de las últimas razones de las cantidades evanescentes; y es a los principios de este método que se reducen en último análisis las demostraciones relativas a las fluxiones. Pero este método tiene, como aquel de los límites, del que antes hemos hablado, y del que no es sino una traducción algebraica, el gran inconveniente de considerar las cantidades en el estado en el que ellas cesan, por así decirlo, de ser cantidades; ya que mientras que uno concibe muy bien la razón de dos cantidades en tanto que ellas se conservan finitas, esa razón no ofrece más al espíritu una idea clara y precisa, en cuanto las cantidades devienen, la una y la otra, nulas a la vez.

Obsérvese que, en esa época (principios del siglo XIX) se decía este principio era equivalente o una traducción algebraica del "método de los límites".

Otra cuestión interesante, en los argumentos de Lagrange, es que indicaba la necesidad de la descontextualización del cálculo, ya que el movimiento resulta un concepto extraño, no propio del cálculo. Por otra parte, no le resultaba admisible hablar de la razón de dos cantidades justo cuando estas dejan de serlo. Así pues, después de mostrar los inconvenientes de las presentaciones del cálculo, entonces más recurridas, Lagrange anuncia el objeto de su *Teoría*:

> El objeto de esta obra es dar la teoría de las funciones, consideradas como primitivas y derivadas; resolver por esta teoría, los problemas principales del análisis, de la geometría y de la mecánica, que dependen del cálculo diferencial, y dar por ella, a la solución de esos problemas, todo el rigor de las demostraciones de los antiguos.

Algunas décadas después, Cauchy presenta su *Análisis* y, a partir de entonces y de manera gradual, las versiones anteriores del cálculo van cayendo en desuso. En el caso del cálculo leibniziano, ello implica que los infinitesimales dejan de usarse e incluso, de aceptarse. El concepto básico deja de ser el de la diferencial y emerge en su lugar el de límite.

Sin embargo, eso sólo ocurrió entre los profesionales de la matemática y en los cursos de cálculo; ya que en los cursos de ciencias básicas y de la ingeniería los infinitesimales continuaron usándose y eso continúa hasta hoy en día.

Ello se debe principalmente a las cualidades didácticas de la presentación leibniziana, en contraste con las reconocidas dificultades que tiene la mayoría de los alumnos para entender la presentación basada en el límite, con todo su rigor lógico. Es por eso que en la FIUAEM, desde hace más de una década, se vienen explorando en las aulas cursos de cálculo en los que los infinitesimales no sólo se acepten, sino que recuperen la importancia que tenían en los orígenes del cálculo.

LA DIFERENCIAL EN EL CÁLCULO LEIBNIZIANO Y EN LOS TEXTOS DE INGENIERÍA

En el cálculo leibniziano, toda vez que las cantidades infinitamente pequeñas eran aceptadas y constituían una herramienta básica, la diferencial, definida como el incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable, resultaba ser el concepto básico, como ahora lo es el de límite. Sin embargo, sabemos que el concepto de límite resulta poco comprensible para la mayoría de los estudiantes, por lo que vale la pena, desde la perspectiva del docente, analizar la pertinencia de apoyar el curso de cálculo en el concepto de diferencial.

Veamos cómo se definía la diferencial en dos de los primeros libros de texto para el estudio del cálculo. Primeramente, tenemos que L'Hôpital (1696), en su Análisis de los infinitamente pequeños indicaba en las primeras definiciones:

> «La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada diferencia…».

Poco más de medio siglo después, Bezout (1770?) precisaba:

> «Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente: entonces, la diferencia de estos dos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama diferencial de esa cantidad».

De esta manera, y utilizando simbología actual, si f es una función definida mediante $y = f(x)$, y si consideramos que la variable crece en grados infinitamente pequeños de tamaño dx, entonces la diferencial de y, correspondiente a $x = a$ estará dada por $dy(a) = f(a + dx) - f(a)$.

La importancia de este concepto es apreciable en la misma obra de Bezout, cuando, al referirse a los propósitos del cálculo infinitesimal, decía:

> «Nos proponemos dos objetivos: el primero, enseñar a descender desde las cantidades hasta sus elementos y el método para efectuar ese tránsito se denomina *Cálculo diferencial*; el segundo nos mostrará la ruta para regresar desde los elementos de las cantidades hasta estas mismas y llamaremos a este método *Cálculo integral*».

Desde esta perspectiva, el proceso de integración consiste en "recuperar" una cantidad finita a partir del conocimiento de un elemento de la misma; entendiendo que un elemento es una parte infinitamente pequeña de la cantidad.

Podemos constatar que esta concepción está aún presente en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Por ejemplo, en el segundo volumen de la Física de Tipler, para calcular el campo eléctrico debido a una distribución continua de carga dada, se hace la siguiente sugerencia:

> Comenzar dibujando un diagrama claro que incluya las características importantes del problema. Si se utiliza la ley de Coulomb, el esquema debe mostrar dq, el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ desde dq hasta el punto del campo P y el campo elemental $d\mathbf{E}$. Descomponer $d\mathbf{E}$ en sus componentes y utilizar la simetría siempre que sea posible. Al determinar $\mathbf{E}$ utilizar la superposición, mostrar los vectores individuales $\mathbf{E}$ en el diagrama, junto con sistema apropiado de coordenadas…

Por otra parte, el procedimiento para calcular de una cantidad mediante la suma (integración) de sus elementos, es independiente de la naturaleza geométrica de tales elementos, si bien es importante saber si estos son partes de un segmento (integral simple), de una región plana (integral de área o doble), de una curva (integral de línea), de una región en el espacio (integral de volumen o triple), o de una superficie (integral de superficie). Por ejemplo, en la Mecánica de Bedford, en el volumen dedicado a la estática, al abordar el cálculo de las coordenadas del centroide, los autores se refieren primero al caso de una región plana, descomponiéndola en partes más pequeñas, pero finitas:

> Consideremos un área A arbitraria en el plano x-y. Dividamos el área en partes $A_1, A_2, \ldots, A_N$ y denotemos las posiciones de las partes por medio de sus coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$. Podemos obtener el centroide o posición media del área con las partes de las áreas como pesos:
>
> $$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Después de ello se pasa a la consideración de la continuidad y el paso al límite:

> Pero entonces nos preguntaremos: ¿cuáles son las posiciones exactas de las áreas $A_1, A_2, \ldots, A_N$? Podríamos reducir la incertidumbre dividiendo A en partes menores, pero aún así obtendríamos sólo valores aproximados para $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Para determinar la localización exacta del centroide, debemos tomar el límite cuando los tamaños de las partes tienden a cero. Este límite se obtiene remplazando las sumas por las integrales:
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA}$$
>
> Donde x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA. El subíndice A significa que la integración se efectúa sobre el área completa.

Obsérvese que los autores mezclan el *límite* con los *elementos diferenciales*, lo cual sería inadmisible desde una perspectiva rigurosa pero que no es raro en estos textos. Obsérvese también que dA es un elemento del área y que el subíndice de la integral (A en este caso) nos indica de qué objeto geométrico son parte tales elementos.

La consideración del “paso al límite”, a partir de las sumas no vuelve a hacerse, lo cual es también usual en estos textos. Así pues, al considerar otro tipo de objetos geométricos, los autores pasan (por analogía) directamente a la integral:

> Considere un volumen V, y sea dV un elemento diferencial de V con coordenadas x, y y z. Por analogía, las coordenadas del centroide son
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V z\, dV}{\int_V dV}$$
>
> El subíndice V en la integral significa que la integral se lleva a cabo sobre el volumen completo.

Finalmente consideran el caso de “las líneas”, en donde tendríamos (formalmente) integrales de línea:

> Las coordenadas del centroide de una línea L son
>
> $$\bar{x} = \frac{\int_L x\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\, dL}{\int_L dL}$$
>
> Donde dL es una longitud diferencial de la línea con coordenadas x, y y z.

Así pues, podemos ver que si en los cursos de cálculo se omiten las cantidades infinitamente pequeñas, al estudiar los textos de ciencias básicas y de la ingeniería se verá un cálculo en el que, desde la simbología, tendrá significados distintos a los que el alumno ha aprendido.

LA DIFERENCIAL EN LOS TEXTOS ACTUALES DE CÁLCULO

Si las cantidades infinitamente pequeñas no son aceptadas, conceptos como el de derivada y de integral tendrán que ser reformulados, lo que ocurrió a partir de los trabajos de Cauchy. En el caso de la diferencial, la reformulación resulta notable, ya que en el cálculo leibniziano era un cambio infinitamente pequeño de la variable. Veamos lo que se dice en algunos textos contemporáneos de cálculo.

Sabemos que la derivada se define como el límite de la razón existente entre el incremento de la función y el de la variable. Sin embargo, la notación leibniziana es todavía muy utilizada, por lo que suele hacerse una advertencia al respecto. Por ejemplo, en el texto de Leithold se dice:

> Se debe recordar que cuando $\frac{dy}{dx}$ se utiliza como notación para la derivada de una función, a *dy* y *dx* no se les ha dado significado independiente (…) De modo que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada y no se le puede considerar como una razón…

Esto da lugar a una definición de la diferencial que le quita toda la significación que tiene en el cálculo leibniziano. La definición de la diferencial de la función corresponde más bien a la aproximación lineal del incremento de la misma. Por ejemplo, en el texto de Leithold encontramos lo siguiente:

> Si la función *f* está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la diferencial de *y*, denotada por *dy* está dada por $dy = f'(x)\Delta x$ donde *x* está en el dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de *x*.

Lo más raro ocurre cuando se define, de manera forzada, la diferencial de la variable, con el propósito de hacerlo consistente con la notación leibniziana para la derivada:

> Ahora se desea definir la *diferencial de la variable independiente*, o *dx*. Para llegar a una definición adecuada y consistente con la definición de *dy*, se considera la función identidad definida por $f(x) = x$. Para esta función, $f'(x) = 1$ y $y = x$; así que $dy = 1 \cdot \Delta x$; es decir, si $y = x$ entonces $dy = \Delta x$.
>
> Para la función identidad se desea que *dx* sea igual a *dy*; es decir, se quiere que *dx* sea igual a Δx.

Entonces se define la diferencial de la variable independiente diciendo que "Si la función *f* está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la diferencial de *x*, denotada por *dx*, está dada por $dx = \Delta x$", y, a partir de ello, se llega a que $dy = f'(x)\,dx$, y como *dx* es finita, se puede dividir por tal cantidad, obteniendo $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, si $dx \neq 0$. Al llegar a esto, Leithold indica:

> Esta ecuación expresa la derivada como un cociente de dos diferenciales. Recuerde que cuando se introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ se remarcó que *dy* y *dx* no se les había dado un significado independiente en ese momento.

La falta de una significación para la diferencial, consistente con lo que se encontrará en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería, se hace más patente en el momento de definir la integral. Por ejemplo, en el texto de Haaser encontramos lo siguiente:

> Otra notación para $\int_a^b f$ que a menudo se usa es $\int_a^b f(x)dx$. La "x" es un símbolo mudo y puede reemplazarse por cualquier otro símbolo conveniente.

Podemos ver que para la "*d*" no hay ni siquiera un comentario. La diferencial no tiene nada que ver con la integral. Más bien es la derivada, ya que se busca una primitiva de la función integrando. El proceso de integración, para recuperar el valor de una cantidad finita, ha desaparecido totalmente.

Por supuesto, al momento de abordar la integración doble, la abstracción resulta aún más necesaria. Por ejemplo, en Haaser la integral doble se presenta como una analogía, de manera que, para empezar, se dice que, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, entonces $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(x, y) | a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2\}$, después de lo cual se define $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f$, indicándose a continuación:

> Puede usarse también para denotar la integral de *f* la notación $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
>
> (…) Las notaciones $\iint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x, y)dxdy$ e $\iint_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x, y)dA$ se usan a veces para denotar la integral doble de *f* sobre $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Así pues, lo que originalmente era el producto de las diferenciales de las variables coordenadas, o bien la diferencial del área de la región de integración, pasa a ser sólo una cuestión de notación. De esa manera no es de extrañar que la interpretación de la integral doble para el cálculo del volumen bajo la superficie, la encontremos hasta 55 páginas después de comenzar con el tema:

> Siendo *R* la región del plano *xy* dada por $R = \{(x, y) | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$, entonces el volumen del cilindro con base en esa región, y acotado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$, está dado por $V = \int_R f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dydx$.

El texto de Haaser se escribió en momentos en los que el rigor lógico era incuestionable, mientras que la visualización no era muy bien vista. [1] En textos más recientes esa situación se ha invertido, mereciendo ahora menos atención el rigor y mucho más la visualización, por lo que la presentación de los conceptos básicos del cálculo ha cambiado, aún cuando los infinitesimales siguen "prohibidos".

En Stewart, por ejemplo, para la presentación de la integral doble, se parte de la idea del cálculo del volumen bajo la superficie, aproximándolo mediante una suma de prismas con base en rectángulos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$, procediendo a definir la integral doble como un límite y terminando por afirmar que el volumen en cuestión tiene un valor dado por

---

[1] La edición original, en inglés, es de 1959; la edición en español es de 1970.

$V = \iint_R f(x,y)\,dA$. Sin embargo, no se habla nunca de una relación entre *dA* con *dx* y *dy* o con su producto.

Más adelante, al estudiar la integral en coordenadas polares, Stewart considera una región característica, dada por $R = \{(\theta, r) | \alpha \leq \theta \leq \beta, a \leq r \leq b\}$, llegando a obtener (en la forma usual en estos textos) que:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b [f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)]\,r\,dr\,d\theta$$

Enseguida de lo cual el autor indica que "puede hablarse de una igualdad" entre *dA* y $r\,dr\,d\theta$, e incluso que hay un referente geométrico, pero advierte que ello es sólo un "método clásico para recordar", es decir, no se debe pensar que eso es cierto en realidad:

> (…) Tenga cuidado en no olvidar el factor adicional *r* en el lado derecho de la fórmula. Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 1, donde el rectángulo polar "infinitesimal" se puede considerar como un rectángulo ordinario con dimensiones $r\,d\theta$ y *dr* y, por lo tanto, tiene "área" $dA = r\,dr\,d\theta$.

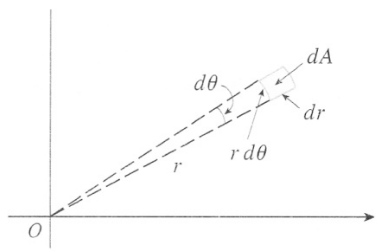

Fig. 1

PROPUESTA PARA LA DIFERENCIAL DE ÁREA: COORDENADAS POLARES

En esta segunda parte del documento se describirá cómo hacer una presentación de la diferencial en un curso dirigido a estudiantes de ingeniería, en el supuesto de que las cantidades infinitamente pequeñas son aceptadas.

Tomando en cuenta que la diferencial de una sola variable es la medida de un incremento infinitamente pequeño de la misma, puede definirse la diferencial de área como la medida del incremento del área de una región plana cuando las (dos) variables tienen incrementos infinitamente pequeños.

En otras palabras, el elemento de área será el área de la región resultante del movimiento de un punto, al considerar variaciones infinitesimales de las dos variables coordenadas, lo que, en un sistema de coordenadas rectangulares, da lugar a un elemento rectangular, con lados *dx* y *dy*.

D

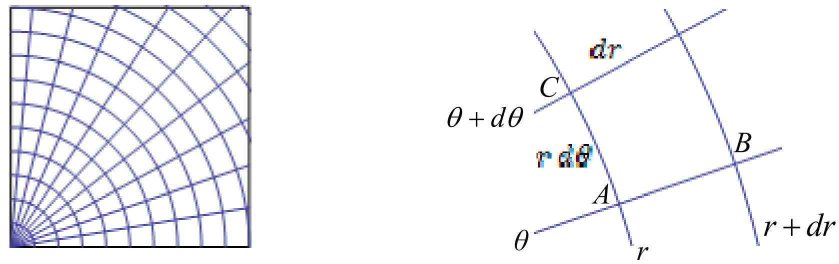

Fig. 2

En cambio, en un sistema de coordenadas polares, una variación infinitesimal dr de la coordenada radial, a partir de un punto cualquiera, como el punto A en la figura 2 (derecha), produce un movimiento sobre un rayo, hacia el punto B. La longitud de ese desplazamiento es $AB = dr$.

Por otra parte, una variación infinitesimal $d\theta$ de la coordenada angular, produce un movimiento a lo largo de una circunferencia de radio $OA = r$, hasta el punto C. La longitud de este desplazamiento es $\text{arco } AC = r\,d\theta$.

Considerando que los puntos A y C están infinitamente próximos, el arco AC puede considerarse rectilíneo y, por lo tanto, el área del elemento será:

$$dA = AC \cdot AB = r\,dr\,d\theta$$

DIFERENCIAL DE ÁREA Y CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DOBLE

Consideremos ahora una transformación **T**, en el plano, definida mediante $x = f_1(u,v)$ y $y = f_2(u,v)$. Vamos a averiguar cuál es el valor del elemento de área cuando éste corresponde a la región infinitesimal del plano, comprendida entre dos pares de curvas coordenadas correspondientes a variaciones infinitesimales de los parámetros u y v.

Para calcular tal elemento, o diferencial de área, recurriremos a la concepción infinitesimalista de las curvas: cuando consideramos una porción infinitamente pequeña de una curva, ésta puede ser sustituida por la cuerda, o por la recta tangente, de manera que, cuando vemos dos pares de curvas coordenadas, en una vecindad infinitamente pequeña de un punto, estaremos mirando dos pares de rectas.

Además, las rectas resultarán ser paralelas, ya que serán perpendiculares a los vectores gradiente de las curvas, y la diferencia entre estos será infinitesimal ya que corresponde a variaciones infinitesimales de los parámetros.

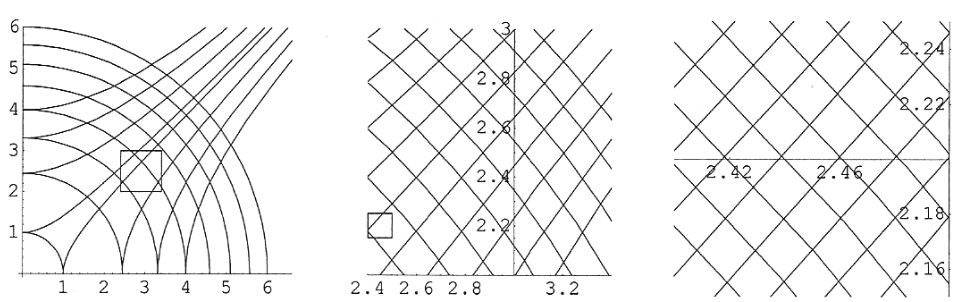

Fig. 3

Tal situación se muestra gráficamente en la figura 3; a la izquierda se muestran algunas curvas coordenadas correspondientes a la transformación definida mediante $x = \sqrt{u+v}$, $y = \sqrt{u-v}$.

En la misma figura se ha marcado el rectángulo correspondiente a $x \in [2.4, 3.4]$ y $y \in [2, 3]$, el cuál se muestra ampliado en la figura del centro, en el cual, nuevamente, se ha marcado un rectángulo, en este caso, el correspondiente a $x \in [2.4, 2.5]$ y $y \in [2.15, 2.25]$, que se muestra ampliado en la figura de la derecha. Podemos observar que, conforme se mira una zona del plano cada vez más pequeña, más se parecen las pequeñas regiones, entre curvas coordenadas, a paralelogramos. Así pues, una región del plano, comprendida entre dos pares de curvas coordenadas (como *PVWQ* en la figura 4), se verá como un paralelogramo cuando las variaciones de los parámetros sean infinitesimales.

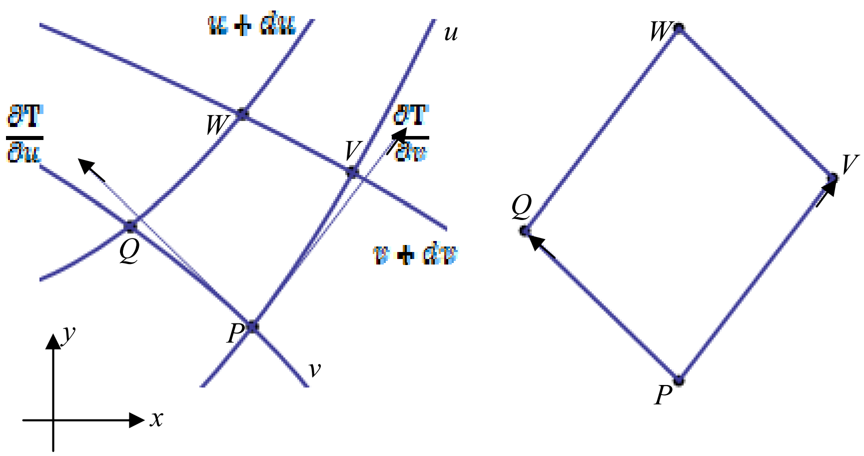

Fig. 4

Así pues, si a partir del punto $P = \mathbf{T}(u,v)$ consideramos variaciones infinitesimales de los parámetros *u* y *v*, obtendremos el paralelogramo infinitesimal con vértices en $P = \mathbf{T}(u,v)$, $Q = \mathbf{T}(u+du, v)$, $W = \mathbf{T}(u+du, v+dv)$ y $V = \mathbf{T}(u, v+dv)$, siendo el área de este paralelogramo el elemento de área buscado. Así, si $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{PV}$, tenemos que $dA = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$. Por otra parte:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{T}(u+du, v) - \mathbf{T}(u,v) = \frac{\mathbf{T}(u+du,v)-\mathbf{T}(u,v)}{du}\,du = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}du$$

y

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{PV} = \mathbf{T}(u, v+dv) - \mathbf{T}(u,v) = \frac{\mathbf{T}(u,v+dv)-\mathbf{T}(u,v)}{dv}\,dv = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v}dv$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}du \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v}dv = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v}\,du\,dv$$

De manera que: $\qquad \| \mathbf{a} \times \mathbf{b} \| = \left\| \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} dv \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} \right\| du \ dv$

En resumen: el elemento de área de una región en el plano, en un sistema de coordenadas definido por medio de la transformación $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$, está dado por:

$$dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} \right\| du\, dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

VISUALIZACIÓN 1: CURVAS Y POLIGONALES

Para finalizar se describen a continuación dos ejemplos de cómo recurrir a la tecnología para visualizar cuestiones relativas a la geometría infinitesimalista.

En primer lugar nos proponemos visualizar las curvas de acuerdo con la concepción infinitesimalista, es decir, como poligonales constituidas por una infinidad de segmentos rectilíneos, uniendo cada uno de ellos dos puntos infinitamente próximos de la curva.

Para ello se puede trazar una curva cualquiera, preferentemente una cuya ecuación esté dada en forma paramétrica, de manera que, dividiendo el intervalo recorrido por el parámetro en n partes iguales (obteniéndose así n + 1 puntos, o n, si la curva es cerrada), pueda construirse la poligonal correspondiente.

Por otra parte, la longitud de la curva será la del polígono con infinito número de lados, cada uno de ellos de longitud infinitesimal. Esto implica, entre otras cosas, que la longitud de la curva puede ser aproximada por medio de la longitud de una poligonal, a condición de que dicha poligonal contenga un número de lados suficientemente grande.

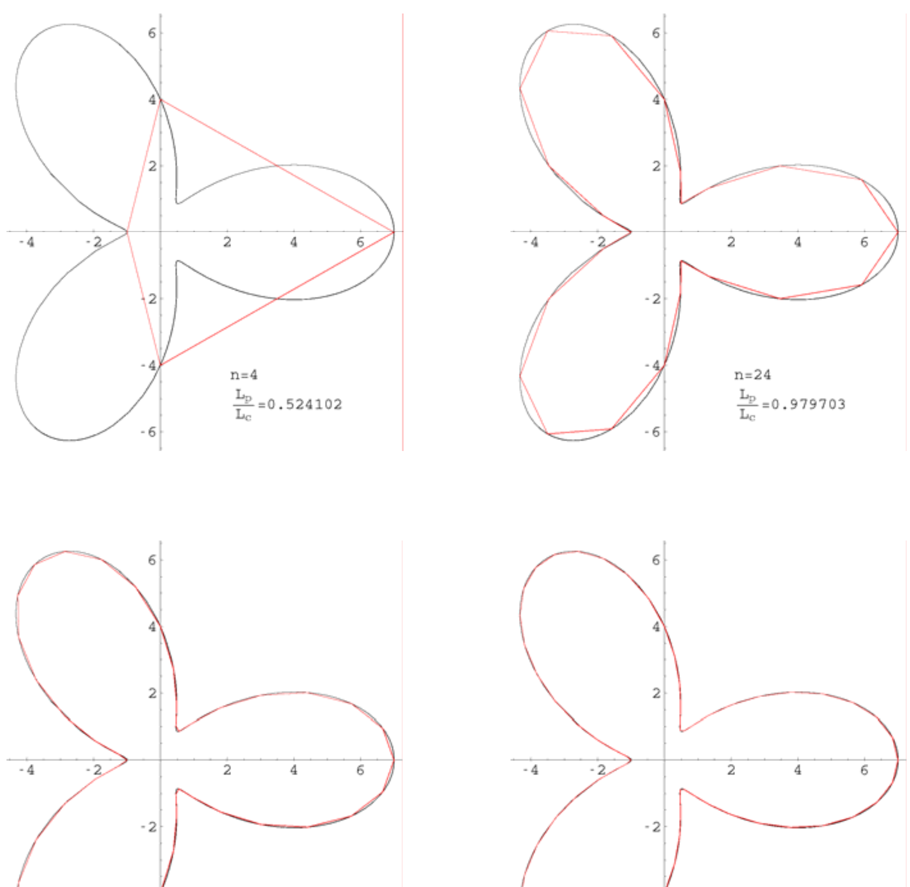

Fig. 5

La visualización puede resultar más efectiva si se hace un efecto de animación, al presentar la curva y la poligonal para valores crecientes de n. En la figura 5 se muestran cuatro de los "momentos" de dicha animación, para el caso de la curva definida mediante $x = r\cos t$, $y = r\,\mathrm{sen}\,t$, con $r = 4 + 3\cos(3t)$, y $t \in [0, 2\pi]$. Los momentos mostrados corresponden, respectivamente, a $n = 4$, $n = 24$, $n = 44$ y $n = 64$. Puede verse que para desde $n = 44$ la poligonal ya se confunde con la curva misma. Además, para cada valor de n se calcula la longitud de la poligonal y se compara con la de la curva misma, indicándose el valor de la razón L_P / L_C, cuyo valor tiende a 1 conforme crece el valor de n. En el caso mostrado, para $n = 24$ ya se tiene una cifra decimal correcta y para $n = 64$ ya se tienen dos cifras.

VISUALIZACIÓN 2: DIFERENCIAL DE ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Aquí se trata de visualizar que, en coordenadas polares, la diferencial de área es la de un rectángulo de lados $r\,d\theta$ y dr. Ello se puede conseguir si se muestra que, para valores "pequeños" de Δr y $\Delta\theta$, la región definida por los puntos $P = (r, \theta)$, $Q = (r + \Delta r, \theta)$, $V = (r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ y $T = (r, \theta + \Delta\theta)$, se confunde con la región interior a un rectángulo de lados Δr y $r\,\Delta\theta$.

Utilizando *cabri*, partimos de tener construido un segmento para manipular el valor de los incrementos de las coordenadas r y θ, a partir de un punto P cuya posición podrá controlarse con el ratón. Ahora bien, estrictamente, se deberían construir dos segmentos, uno para controlar Δr y el otro para $r\,\Delta\theta$. Sin embargo, utilizaremos un solo segmento, de magnitud h, para ambos, de manera que la figura ampliada se irá aproximando a un cuadrado y no a un rectángulo.

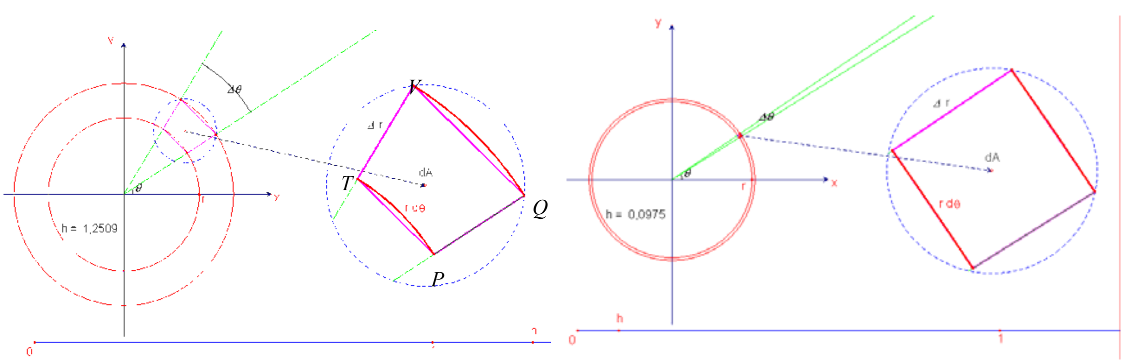

Fig. 6

En la figura 6 se muestran dos situaciones. En la primera se tiene un sector $PQVT$ "grande", de manera que se nota claramente la diferencia entre el sector mismo con respecto del cuadrilátero $PQVT$ (izquierda). En la segunda se muestra un sector tan pequeño que se requiere de una ampliación para observarlo. La ampliación se muestra a un lado, observándose que no se distinguen el sector y el cuadrado.

COMENTARIO FINAL

Los cursos de cálculo que acepten y utilicen infinitesimales deben ser explorados en las aulas, al menos en las escuelas de ingeniería. Con ello se recuperarían las indudables cualidades didácticas del cálculo leibniziano y ofrecerían una presentación más acorde con la manera en la que el cálculo es utilizado en los cursos de ciencias básicas y de la ingeniería.

Por otro lado, los recursos tecnológicos disponibles hoy en día nos permiten visualizar con claridad situaciones que se dan a niveles "microscópicos", pudiendo entonces extrapolar lo observado a una escala infinitesimal.

BIBLIOGRAFÍA

Arcos, I.; Osorio, A. (2003). *Uso de la microcomputadora en la visualización en el cálculo infinitesimal,* Segundo Foro sobre la Enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería, UNAM, México, agosto de 2003.

Arcos, I. (2008), *Cálculo multivariable para estudiantes de ingeniería*, 2ª edición, Kali, Toluca, México.

Bedford, A., Fowler, W. (1996); *Mecánica para ingeniería. Estática*. Addison-Wesley Iberoamericana, Estados Unidos de América.

Bezout, E. (1770 ?), *Cálculo infinitesimal*, Limusa-IPN, México, 1999. Traducción de la edición original en francés.

Haaser, N., LaSalle, J., Sullivan, J. (1970); *Análisis Matemático*. Volumen 1. Curso de introducción, Trillas, México.

Haaser, N., LaSalle, J., Sullivan, J. (1970); *Análisis Matemático*. Volumen 2. Curso intermedio, Trillas, México.

Lagrange, J. L. (1813); *Théorie des fonctions analytiques*, seconde édition, Courcier, Paris, Francia.

Leithold, L. (1998), *El Cálculo*, 7ª edición. Oxford University Press, México.

L'Hôpital, Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, colección MATHEMA, UNAM, México. Versión en español del original en francés: Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, de 1696. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray.

Newton, I. (1726). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, Altaya, Barcelona, 1993.* Esta edición española se basó en la tercera edición en latín (1726) y la primera versión inglesa (1729), actualizada por F. Cajori (1934). Las notas y el estudio preliminar son de Antonio Escohotado y la traducción de Antonio Escohotado y M. Sáenz de Heredia.

Tipler, P. (1998); *Física para la ciencia y la tecnología*, volumen 2, Reverté, España, 2000. Traducción de la cuarta edición en inglés, de 1998.