Funciones un campo fértil para la exploración con Voyage 200

Resumen
El presente trabajo pretende motivar el uso de la calculadora Voyage 200, para explorar el tema de funciones, dando al maestro y al alumno una variedad de temas de bachillerato en donde se pueden generar actividades y ambientes propicios para la creatividad , la exploración y el análisis. Facilitando así la compresión de las ideas fundamentales de estos temas.

Introducción

La palabra función es algo que en bachillerato el alumno relaciona con un grupo de puntos en un plano cartesiano, que son arrojados a partir de una regla dada por el maestro y que se unen con un segmento de recta.

Esta es una realidad en la mayoría de las aulas de bachillerato, por lo cual hay que redireccionar de cómo enseñamos a los alumnos el tema de funciones, dejando atrás el trazo mecanizado, tedioso que solo conlleva a una representación sorda de una curva.

Una alternativa viable para afrontar el tema es el incorporar tecnologías al tema de funciones, esto nos abre las posibilidades: de encontrar la solución a cualquier tipo de ecuaciones, no sólo las que son enseñadas de manera tradicional en el aula, más aun las ecuaciones cúbicas y dejando atrás las bicuadradas típicas, el análisis de los comportamientos que sufren las funciones al modificar parámetros, la exploración automática de tablas y la posibilidad de realizar complejos cálculos numéricos y aun más trabajar con valores exactos (raíces y fracciones).

El uso de la calculadora Voyage 200 es una alternativa para los propósitos que se pretenden lograr en el aula tales como:

- Generar un ambiente acorde a las nuevas necesidades de nuestros alumnos.
- Propiciar la exploración de conceptos de manera natural
- Incrementar la curiosidad de los alumnos
- Facilitar la interpretación de resultados.

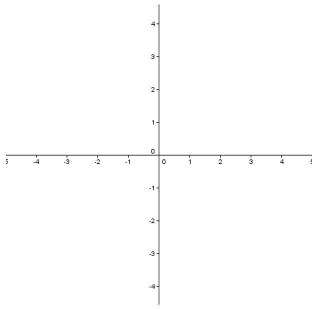
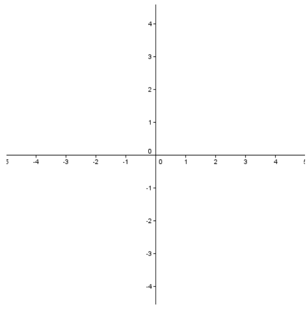
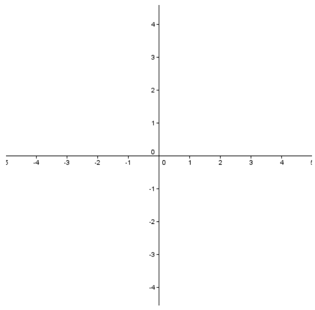
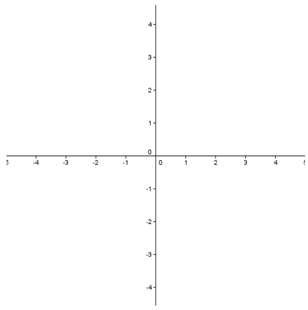
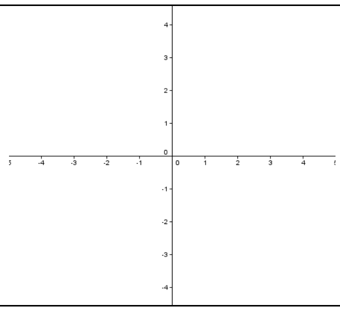
En cuanto a nuestro tema buscamos ofrecer una serie de actividades que pueden ser implementadas de manera sencilla y con un gran impacto sobre los alumnos tomando en cuenta los beneficios que puede ofrecer la Voyage 200 en el aula.

Importante: Es necesario tomar en cuenta que la calculadora no suple al maestro en el aula y tampoco atrofia los métodos que usualmente se imparten en las sesiones matemáticas. Al contrario, la calculadora es un aliado del docente el cual debe cambiar su manera de abordar temas, dejando atrás las formas tradicionales de enseñar y tomar la decisión de incorporar actividades con calculadora, las cuales acorto plazo rendirán frutos en beneficio de los alumnos y de las matemáticas.

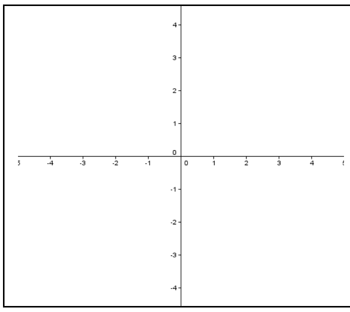
Actividad 1

Objetivo:
Identificar las funciones básicas a partir de su gráfico y lograr establecer su representación algebraica.

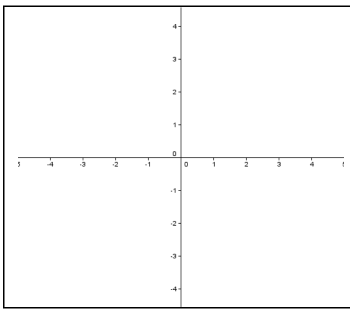
1.- Iniciemos graficando las siguientes funciones usando Voyage 200 para después realizar un bosquejo en cada uno de los recuadros.

$f(x)=3$		$f(x)=\sqrt{x}$	
$f(x)=\lvert x\rvert$		$f(x)=x^2$	
$f(x)=x^3$			

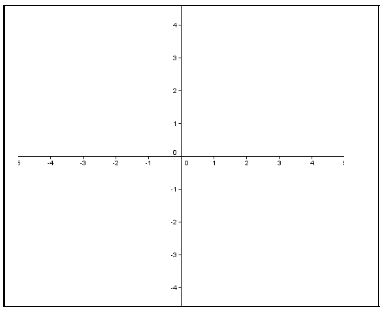
Iniciemos la exploración con $f(x)=(x-2)^2$

	¿Qué sucede al agregar **-2 sobre x**?

Ahora qué pasa con $f(x)=(x+1)^2$

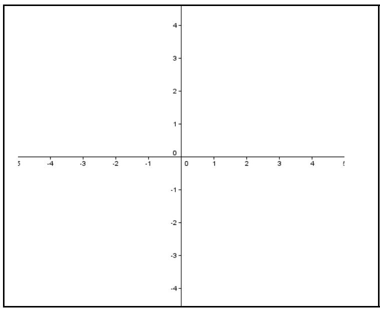
	¿Qué sucede al agregar **+1 sobre x**?

Reflexiona con la función $f(x)=|x|+1$



¿Qué paso al sumar **1 sobre el valor absoluto**?

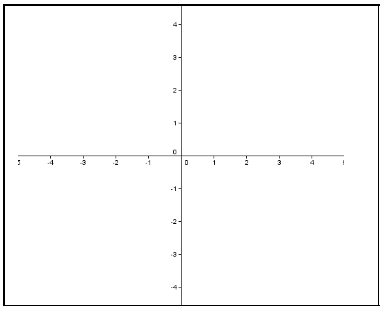
Ahora qué pasa con $f(x)=(x+1)^3$



¿Qué sucede al agregar **+1 sobre x**?

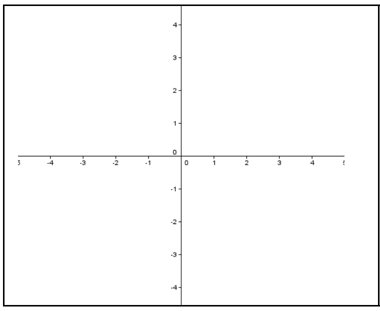
Reflexiones en el eje de la x	**Reflexiones en el eje de la y**
$h(x)=-f(x)$	$h(x)=f(-x)$

Ahora qué sucede con $f(x)=\sqrt{x}$ en $g(x)=-\sqrt{x}$



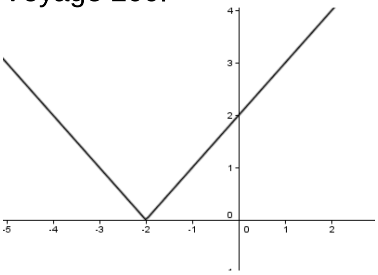
¿Qué ocurre?

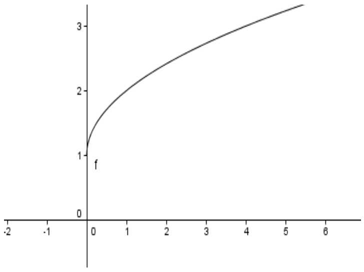
Ahora qué pasa con $f(x)=\sqrt{x}$ en $h(x)=\sqrt{-x}$

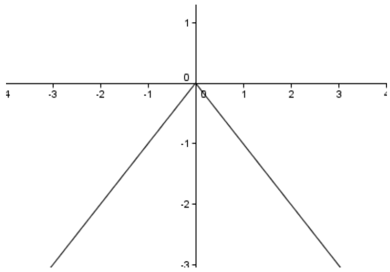


¿Qué efecto observas?

2.- Determina la expresión para cada una de las gráficas y comprueba tus resultados con la Voyage 200.



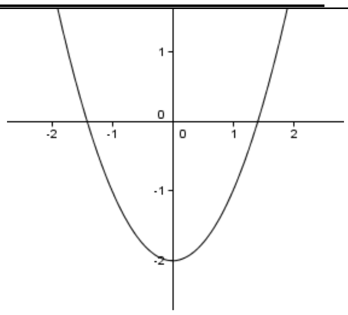


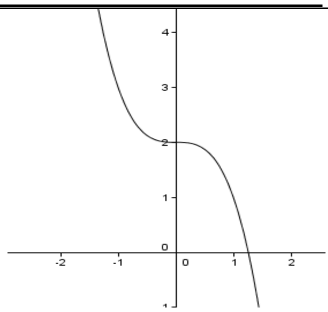


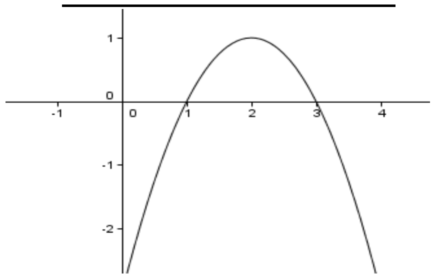
Expresión

Expresión

Expresión



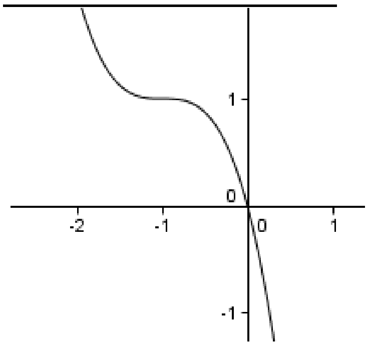


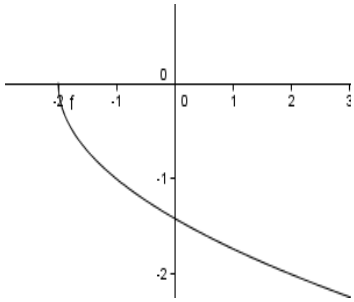


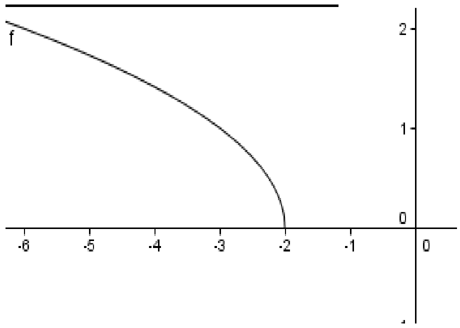
Expresión

Expresión

Expresión







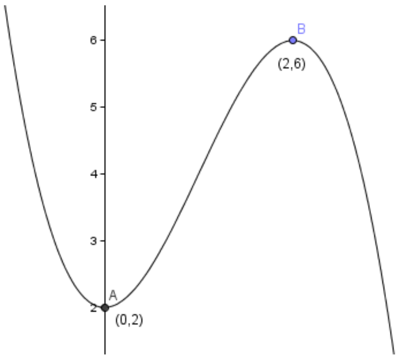
Expresión

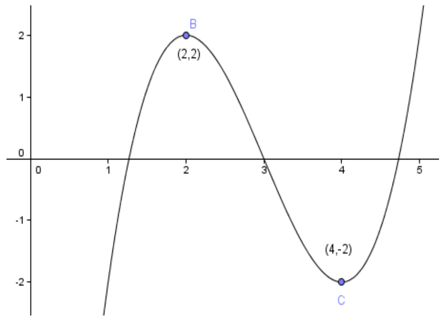
Expresión

Expresión

RETO

Usa la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$, para determinar la expresión de los siguientes gráficos.



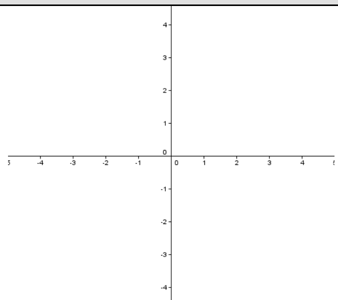
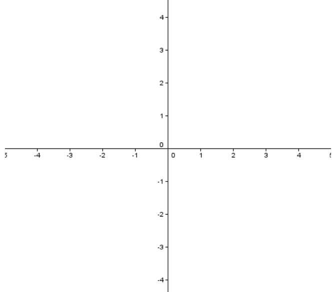
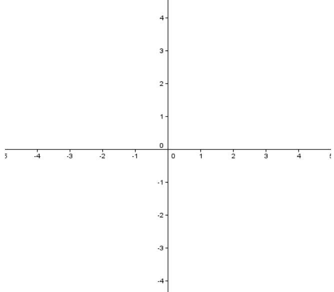
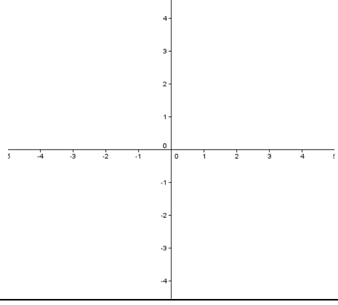


Expresión

Expresión

Actividad 2

Objetivo:
Identificar y representar, por el alumno, el dominio de una función, a partir de su gráfico.

Función		Gráfico		Dominio
$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$				
$f(x)=\sqrt{x^2-9}$				
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$				
$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)$				

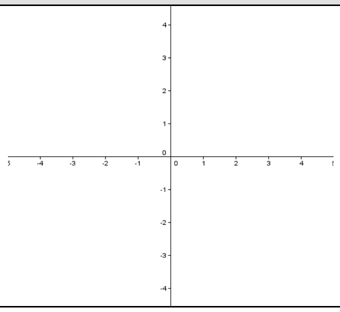
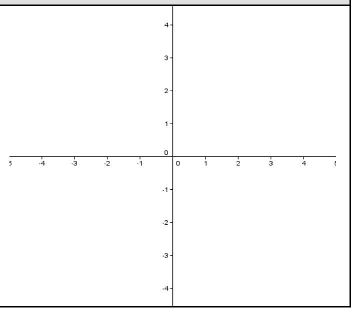
Importante:
La exploración de el dominio a través de tablas conlleva a resultados como ERROR, el cual debe comentarse con el alumno como los puntos de la recta numérica donde la función no está definida.

Comentarios

Actividad 3

Objetivo:
Conocer una justificación por parte del alumno de por que la derivada de seno es coseno y la derivada de coseno es menos coseno.

Dos gráficas especiales.

Función	Gráfico	Función	Gráfico
$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$		$f(x)=\frac{senx}{x}$	

¿Quién no ha estado en un curso de cálculo? y ha escuchado ¡profe!, ¿porqué la derivada de seno es coseno?. Las siguientes son algunas de las respuestas más comunes.
"Cuando estés en la universidad lo veras".
"No lo comprenderías en estos momentos".
"No te preocupes es una ley".

Iniciemos la demostración de por que la derivada de seno es coseno. (Usemos la definición de derivada).

$$[senx]' = \lim_{h \mapsto 0} \frac{sen(x+h)-senx}{h} =$$

Usando las equivalencias de suma para senos tenemos

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{sen(x)\cosh + sen(h)\cos x - senx}{h} =$$

Factorizando y reordenando tenemos

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{sen(x)(\cosh -1) + senh\cos x}{h} =$$

Aplicando los teoremas correspondientes

$$senx \lim_{h \mapsto 0} \frac{(\cosh -1)}{h} + \cos x \lim_{h \mapsto 0} \frac{senh}{h} = \cos x$$

Lo anterior se basa por que ***x*** no depende de ***h.*** Retomemos las funciones iniciales y al observar los comportamientos de las funciones alrededor de ***x=0.*** Tenemos que el primer límite es **cero** y que el segundo es **uno**, por lo tanto solo nos queda ***cosx*,** que en consecuencia es la derivada de ***senx.***

Propuesta
De manera análoga se puede encontrar la derivada de coseno y explorar el tema de límites usando el graficador y la tabla de la calculadora.

Actividad 4

Objetivo:
Conocer por parte del alumno dos aplicaciones, donde las funciones racionales juegan un papel importante en situaciones reales como son el béisbol y la economía.

Problema 1
El mejor bateador de la liga amateur de Saltillo ha bateado 35 hits en sus últimos 140 turnos al bat, para un porcentaje de **0.250.** Si tiene una buena racha de bateo. ¿Cuántas veces consecutivas debe conectar de hit para que su porcentaje pase de 0.250 a 0.300 ?

Función que modela	Bosquejando la gráfica	Turno al bat donde alcanza el porcentaje ***Usando el cursos sobre la gráfica***

¿Concuerda con la solución analítica?

Problema 2
Con el fin de conmemorar el aniversario de una empresa de refrescos, los directivos decidieron regalar un calendario, cuyo diseño costo $800 pesos y cada calendario tiene un costo de impresión de $3.25 pesos. Sea x el número de calendarios impresos.

a) Escribe una función que modele el costo total $C(x)$

Ahora definamos el costo promedio como $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

b) Gráfica la función y determina una ventana adecuada.

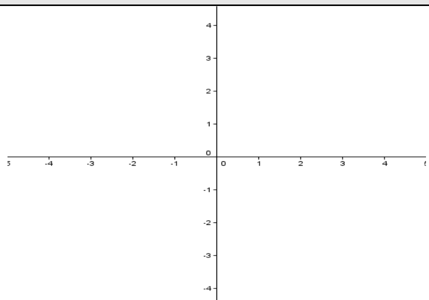
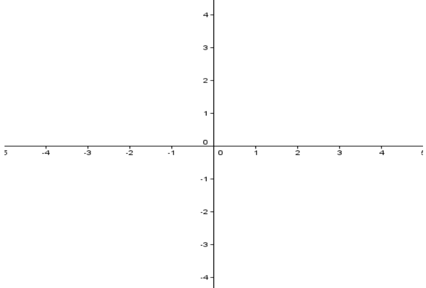
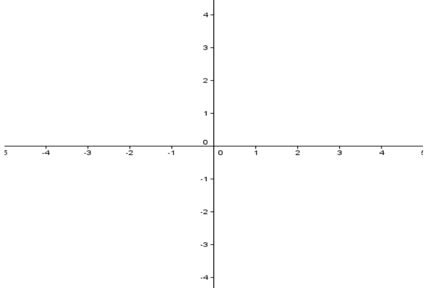
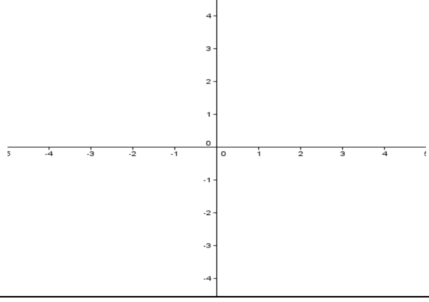
c) ¿Cuál fue la ventana adecuada?,

d) ¿Cuántos calendarios se necesitan imprimir para que el costo promedio sea de $3.65 pesos?

e) ¿Qué pasa con el costo promedio cuando x es suficientemente grande?

Actividad 5

Objetivo:
Que el alumno logre apreciar el efecto de parámetros en una familia de funciones polares definidas por $r = a\cos(b\theta)$

Función Polar		**Gráfica**
$r = 5\cos(2\theta)$		
$r = 5\cos(3\theta)$		
$r = 5\cos(4\theta)$		
$r = 5\cos(5\theta)$		

¿Qué efecto tiene los parámetros sobre la función?

Propuesta
Analizar el efecto de los parámetros sobre la función seno y el fenómeno de usar números menores a uno en el argumento.

Conclusiones

El uso de calculadoras gráficas en el aula abren un camino a un campo tan amplio que espera ser explorado. La facilidad de cambiar información permite a los alumnos agilizar sus exploraciones, generando un ambiente que logra que los conocimientos sean asimilados y que el número de casos a estudiar aumente de manera considerable. Así mismo, la verificación de conjeturas previas es más fácil de confirmar.

Los temas donde podemos aplicar la tecnología son:

- ***Productos notables.***
- ***Análisis de solución de sistemas de ecuaciones por el método gráfico.***
- ***Exploración de funciones exponenciales y logarítmicas.***
- ***Verificación de propiedades geométricas en triángulos.***
- ***Comportamiento final de funciones polinomiales.***
- ***Problemas de optimización***
- ***Integrales.***

Entre muchos otros temas que son impartidos en los diferentes niveles de enseñanza. Busquemos dar a oportunidad a los problemas que pueden incorporar tecnología, no es necesario inventar nuevos problemas. Cada uno tiene problemas significativos que con solo darles un giro podemos lograr actividades que cambien nuestra forma de enseñar matemáticas.

Bibliografía.

Álgebra Intermedia
Gustafson
Editorial Thomson.

Álgebra y Trigonometría con geometría Analítica
Cole
Editorial Thomson

Precálculo
James Stewart
Editorial CENGACE

Cálculo Diferencial e Integral
Purcell
Prentice Hall

Álgebra
Neptune Hostetler
Editorial Mc Graw Hill