

La tecnología y las múltiples representaciones

Introducción

La presencia de la tecnología está transformando notablemente la forma de hacer matemática. Ella se convierte paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática, gracias a su potencial para permitir el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de objetos matemáticos, creando espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio, más complejo, más profundo y potente. La tecnología ofrece un medio para que el estudiante explore, conjeture, analice, verifique ideas y desarrolle habilidades y estrategias que serán importantes para la resolución de problemas y en otros contextos.

En su trabajo publicado en 1945, Polya [1] introdujo dos componentes importantes relacionados con el aprendizaje de las matemáticas:

1. La importancia de caracterizar el proceso de trabajar problemas matemáticos. En esta perspectiva presenta un modelo donde identifica cuatro componentes importantes:
 - (a). La importancia de entender un problema
 - (b). La necesidad de diseñar un plan de solución
 - (c). La implantación del plan
 - (d). La importancia de realizar una visión retrospectiva donde se evalúe no solamente los resultados obtenidos sino también todo el proceso y plausibilidad de la solución o soluciones.
2. La importancia del uso de los métodos heurísticos en la resolución de problemas. Los heurísticos son estrategias generales que pueden ayudar a avanzar en las distintas fases del proceso de solución. Algunos ejemplos incluyen: el uso de diagramas, tablas u *otras representaciones*, el descomponer un problema en partes más simples, el empleo de casos particulares y la búsqueda de patrones.

El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar las técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. La visualización y el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos.

La teoría de los registros de expresión de Duval [2,3], propone reemplazar la acumulación de conocimientos ajenos desarticulados, por un modelo en donde estos se combinan en una ayuda recíproca. En este sentido los conceptos son vistos como objetos por aprehender, y mientras más interacción se tenga con un objeto, se tendrá una mejor concepción (o representación mental) del mismo.

Para llevar a cabo tal aprehensión, los objetos deben ser representados, ya que son las representaciones de los objetos las que realmente seremos capaces de manipular. Duval distingue dos tipos de representaciones: las mentales y las semióticas. Las representaciones semióticas son producciones construidas por el empleo de signos (sistema semiótico) que tiene sus propias limitaciones de significado y funcionamiento. Las representaciones semióticas son a la vez conscientes (notorias al sujeto) y externas (directamente visibles y observables) en tanto que las representaciones mentales son conscientes e internas.

Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, una tabla, son representaciones semióticas originadas de sistemas semióticos distintos.

Para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe permitir las siguientes actividades:

- La formación de una representación identificable
- El tratamiento de una representación
- La conversión de una representación

El álgebra, la geometría y la aritmética no constituyen un registro de representación, ellos son dominios de la matemática, pero se hablará del registro de las figuras geométricas hechas con regla y compás, del registro de las figuras geométricas producidas por el software Cabri Géometre II™, del registro de las representaciones gráficas, del registro de la lengua natural, del registro del cálculo simbólico, etc.

La calculadora graficadora TI-92 permite conectar múltiples registros de representaciones y tiene incorporado un potente sistema de cálculo simbólico (CAS). En el ambiente TI-92 podemos manipular dinámicamente objetos matemáticos geométricos mediante la aplicación geométrica interactiva Cabri Geometry, representar datos numéricos en tablas y gráficamente, hacer ajuste de curvas mediante distintos modelos de regresión, realizar operaciones simbólicas sobre las funciones generadas, hacer conversión de una representación a otra y comparar los resultados obtenidos en las distintas representaciones utilizadas para resolver un mismo problema matemático.

Una herramienta cognitiva de esta naturaleza abre la posibilidad de estudiar un problema matemático desde distintos puntos de vista y representaciones de manera articulada, contribuyendo a establecer nuevas relaciones entre las representaciones en juego y a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos bajo estudio.

Moreno [4] afirma que "los instrumentos informáticos (calculadoras, computadoras, ...) tienen una característica que distingue a sus sistemas de representación de los sistemas escritos, a saber: la posibilidad de procesar las representaciones. En cierto sentido, esta capacidad de procesamiento del sistema de representación equivale a una externalización de una función cognitiva... y por otro lado, toda actividad cognitiva es una actividad mediada por instrumentos".

En este artículo utilizaremos distintas posibilidades de representación de la calculadora graficadora TI-92 para resolver un problema clásico de optimización, empezando con la representación visual dinámica.

La tecnología y las múltiples representaciones

Un problema de optimización

Se construirá un oleoducto desde una refinería hasta unos tanques de almacenamiento, atravesando un pantano (vea figura abajo). El costo de construcción a través del pantano es de \$ 50.000,00 por kilómetro y sobre tierra firme de \$ 25.000,00 por kilómetro. ¿Cómo debe construirse el oleoducto para que el costo de construcción sea mínimo?

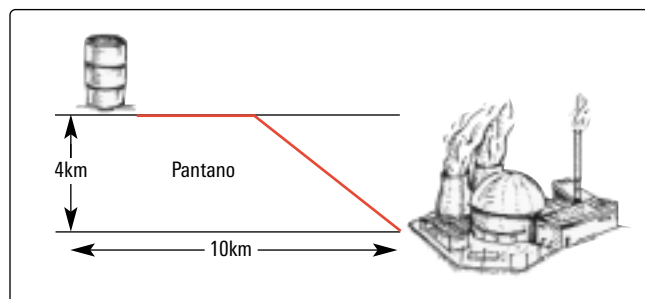


Figura 1

Solución número 1: Utilizando el registro de las figuras Cabri Géomètre II™

Pasos:

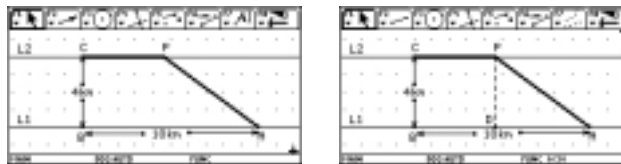
1. Presionar la tecla **[APPS]**, seleccionar un nuevo archivo (new) en la aplicación Cabri Géomètre II, y digitar el nombre **aplic1** en el espacio correspondiente a Variable. Presionar dos veces **[ENTER]** para ingresar en la pantalla de Cabri Géomètre II.
2. Presionar **[♦] F** (presione **[♦]** primero y posteriormente F). En la caja de diálogo que se abre, seleccionar **ON** para cuadrículado (Grid) y **FIX 5** para desplegar precisión (Display Precision).
3. Presionar **[F2] 2**, seleccionar dos puntos consecutivos sobre el cuadrículado (grid) y calcular la distancia entre ellos (**[F6] 1**).



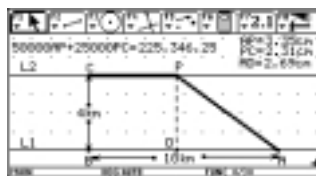
La convención que haremos es la siguiente: la distancia entre dos puntos consecutivos del cuadrículado representa 1 km.

4. Construir una recta horizontal L1 (**[F2] 4: Line**) sobre dos puntos del cuadrículado, y cuatro puntos del cuadrículado sobre L1, construir una recta horizontal L2.
5. Construir un punto A en un punto del cuadrículado sobre L1 (**[F2] 2**). Este punto representará el oleoducto. Construir un punto B en L1 sobre el punto del cuadrículado que se encuentra a 10 puntos de distancia de A.
6. Construir una recta L3 que pasa por B y que sea perpendicular a L1 (**[F4] 1**). Sea C el punto de intersección entre L2 y L3 (**[F2] 3**). Ocultar L3 (**[F7] 1**).
7. Construir un punto P sobre L2, y construir los segmentos CP y PA.

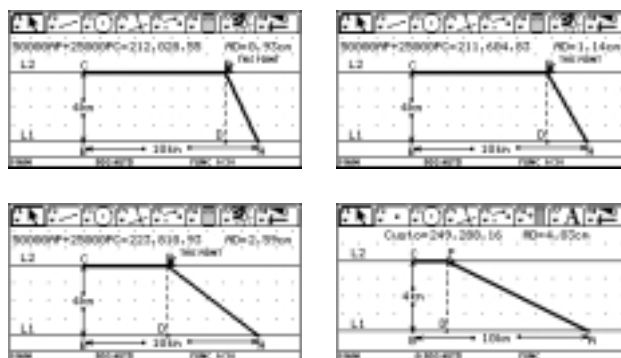
8. Construir una recta L4 que pasa por P y que sea perpendicular a L1. Sea D el punto de intersección de L4 con L1. Ocultar L4.



9. Medir las longitudes de los segmentos AP, PC, AD (**[F6] 1**).
10. Calcular el costo de la construcción del oleoducto $Costo = 50000\overline{AP} + 25000\overline{PC}$ (**[F6] 6**).
11. Capturar las medidas \overline{AD} , Costo (**[F6] 7**, opción 2 para definir entradas), seleccionar la longitud del segmento AD, seleccionar la medida Costo, y presionar **[♦] D** para capturar estos datos. Los resultados son almacenados en las dos primeras columnas del archivo sysdata.



12. Seleccionar el punto P y utilizar las teclas **[↔]** y **[↻]** (presionadas simultáneamente) para moverlo a una nueva posición. Presionar **[♦] D** para capturar la nueva información en el archivo *sysdata*.
13. Repetir el procedimiento anterior varias veces, con el objetivo de determinar aproximadamente la posición del punto P que produce el valor mínimo para el costo. El valor observado debe ser multiplicado por dos, y la unidad cambiada de cm a km., debido al cambio de escala que estamos utilizando. Las figuras que siguen representan a cuatro capturas de datos.



Por lo tanto, utilizando el registro de figuras del Cabri Géomètre II y ubicando el origen en el punto A, obtenemos que el costo mínimo de construcción del oleoducto es de aproximadamente $2 \times \$ 211.604,83 = \$ 423.209,66$, y ocurre cuando el punto D se encuentra a una distancia aproximada de $1.14 \times 2\text{km} = 2.28\text{km}$ del punto A.

La tecnología y las múltiples representaciones

Solución número 2: Utilizando regresión para determinar una curva que ajusta los datos

Ahora utilizaremos un sistema semiótico distinto: una tabla con los valores capturados en el ambiente Cabri Géomètre II™ y almacenados en sysdata.

1. Presionar [APPS] 6, opción 2, seleccionar sysdata en el campo Variable y presionar dos veces [ENTER]. Aparecerá una tabla con los datos capturados en Cabri Géomètre. La columna 1, c1, contiene los valores de \overline{AD} y la columna 2, c2, contiene los valores del costo de construcción del oleoducto.

c1	c2
0	0
1	212619
2	425238
3	637857
4	850476
5	1063095
6	1275714
7	1488333
8	1700952
9	1913571
10	2126190
11	2338809
12	2551428
13	2764047
14	2976666
15	3189285
16	3401904
17	3614523
18	3827142
19	4039761
20	4252380

2. Presionar [F2] para configurar el tipo de gráfico estadístico a utilizar, escoger el primero gráfico (plot) desocupado, y presionar [F1] para definir los parámetros, seleccionar la opción 1 para Plot Type, opción 1 para Mark, digitar c1 para x, c2 para y: y presionar [ENTER] dos veces.

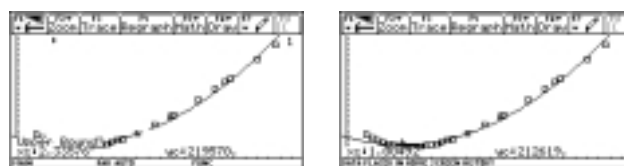
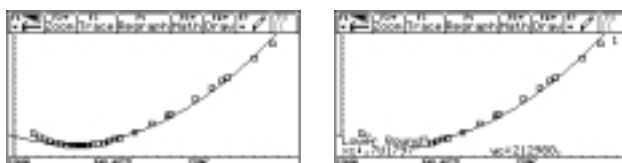


3. Presionar [ESC] para regresar al editor de datos, presionar [F5], seleccionar la opción 9 para Calculation Type para hacer una regresión cuadrática, digitar c1 para x, c2 para y: y almacenar la ecuación de regresión en la función $y1(x)$. Presionar [ENTER].



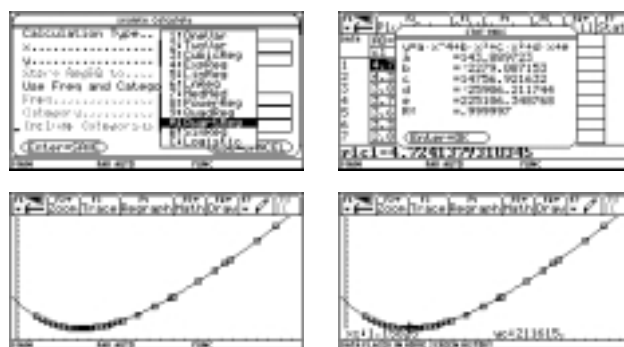
Aparece una ecuación de curva de mejor ajuste para los datos capturados, mediante regresión cuadrática.

4. Presionar [W] para ingresar en el editor de funciones (Y=), y observar que la ecuación de la regresión y del gráfico estadístico se encuentran seleccionadas. Presionar [F2] 9 para graficar los datos capturados y la función de ajuste. Utilizar [F5] 3 para determinar el punto de mínimo para la curva de ajuste: mover el cursor con [←] hacia la izquierda del punto de mínimo y seleccionar la cuota inferior. Repetir el procedimiento para la cuota superior y capturar el punto de mínimo en la pantalla principal presionando [H].



La solución encontrada mediante regresión cuadrática es la siguiente: la proyección D del punto P que produce un costo mínimo se encuentra sobre la recta L1, aproximadamente a $2 \times 1.00492 \text{ km} = 2.00984 \text{ km}$ del punto A. El costo mínimo aproximado es de $2 \times \$ 212.619,00 = \$ 425.218,00$.

5. Utilizar regresión de cuarto grado para la curva de ajuste en el paso 3. El punto D se encuentra a aproximadamente 2.3165km del punto A, y el costo aproximado es de \$ 423.230,00.



Solución número 3: Utilizando el registro de cálculo simbólico (CAS) de la TI92.

Sea $x = AD$. Como $AP = \sqrt{x^2 + 16}$, $PC = 10 - x$. si ubicamos el origen en A, el costo de la construcción del oleoducto es la siguiente función de x definida en el intervalo $[0, 10]$:

$$f(x) = 50000 \sqrt{x^2 + 16} + 25000(10 - x).$$

La figura que sigue muestra los pasos seguidos para obtener la solución utilizando comandos del ambiente de cálculo simbólico de la TI-92 desde la pantalla principal. Los comandos pueden ser digitados directamente, o bien obtenidos del menú [F4] 1 (Define), [F3] 6 (fMin), [F3] 1 para calcular derivada, [F2] 1 para resolver la ecuación que permite determinar los puntos críticos de la función de costo.



La tecnología y las múltiples representaciones

Las soluciones encontradas al utilizar el comando *fMin* y el comando de derivación simbólica seguido por el comando *solve* son bastante parecidas. Para notar la diferencia entre ellas, tendremos que utilizar mas cifras significativas.

En la tabla que sigue encontramos en forma resumida los resultados obtenidos al utilizar distintas representaciones semióticas.

Representación	Cabri Géomètre II™	Regresión Cuadrática	Regresión Cuártica	CAS+Cálculo Numérico(<i>fMin</i>)	CAS: Cálculo Diferencial
Distancia AD	2,28km	2,00984 km	2,3165km	2,3094010619854	2,3094010767585
Costo mínimo	423.209,66	425.218,00	423.230,00	423.205,08075689	423.205,08075689

La siguiente tabla compara los valores mínimos relativos para la función de costo, con los valores de la función en los extremos del intervalo $[0, 10]$.

$x =$ distancia AD (km)	0	2,3094	10
$f(x) =$ función de costo	450.000,00	423.205,08	538.516,48

Lo anterior confirma que el punto crítico es en realidad un punto de mínimo absoluto para la función de costo. Podemos utilizar otro registro de representación para comprobar el resultado obtenido:

Solución número 4: Utilizando el registro de las representaciones visuales de la TI92

Podemos construir una tabla y un gráfico para la función de costo, $f(x) = 50000 \sqrt{x^2 + 16} + 25000(10 - x)$, $x \in [0, 10]$

Presionar \blacklozenge W para ingresar en el editor de funciones (*Y=*) y digitar la ecuación correspondiente a $f(x)$.

Presionar \blacklozenge E para ingresar en el editor de ventana (*WINDOW*) y digitar los parámetros para la graficación.



Presionar \blacklozenge R para graficar e F5 3 para determinar el punto de mínimo.



Presionar \blacklozenge T, escoger los parámetros bien cerca del punto de mínimo, y presionar \blacklozenge Y para ver la tabla.



Podemos reiniciar la tabla en el valor mínimo encontrado y reducir el valor de $\Delta tb/$ para obtener mejores aproximaciones para el costo mínimo.

Conclusión

De acuerdo a Gómez [6], aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática.

Un instrumento como la calculadora graficadora TI-92 provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos, y puede ser pensado como una herramienta cognitiva o bien como un agente didáctico. La representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semióticos y la conexión entre los mismos permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.

Referencias

- [1] Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* n°. 1, pp 55-74.
- [3] Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repéves-IREM*, n° 17, outubro de 1994.
- [4] Moreno, L. (1999). Mediación instrumental y tecnología informática en la educación matemática. *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*. Grupo Editorial Iberoamérica, outubro de 1999.
- [5] Stewart, J. (1994). *Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- [6] Gómez, P. (1998). Tecnología y educación Matemática. *Revista de Informática Educativa*, Vol. 10, n° 1.