

La calculadora: Rutina o pensamiento

Introducción

El propósito de este artículo es el de ofrecer algunos ejemplos de problemas matemáticos del nivel de escuela secundaria (estudiantes de 15 a 18 años), cuyas soluciones y estrategias de ataque pueden descubrirse con la ayuda de la calculadora graficadora. En la escritura de este artículo hemos empleado varios tipos de calculadoras pues no queremos llevar al lector a pensar que hay un "tipo" de calculadora más apropiado que otro en la solución de los problemas que presentamos. Evidentemente, en los casos en que se requiere resolver en forma cerrada ecuaciones algebraicas, no queda más remedio que emplear calculadoras con capacidad para el cálculo simbólico, como lo son la TI-89 o la TI-92. En este artículo explotaremos algunos recursos especialmente útiles de las calculadoras de hoy, tales como la capacidad para generar tablas (es decir, de organizar datos en forma tabular) y la programación. El lector podrá apreciar cómo la calculadora es una herramienta heurística o de descubrimiento para la solución de los problemas propuestos.

Los problemas que se incluyen en este escrito los hemos obtenidos de materiales que ahora estamos intentando organizar en forma de libro y que hemos estado acumulando durante años. Por falta de espacio sólo presentamos dos problemas, uno del álgebra y otro de la "matemática recreativa". El carácter común de ambos problemas consiste en que ambos se prestan muy bien para la exploración mediante el empleo de la calculadora o la computadora. Como ya pronto veremos, en los problemas presentados, la calculadora se emplea vigorosamente para descifrar detalles sobre la naturaleza de las relaciones numéricas (o de otro tipo) que surgen del estudio de las situaciones planteadas. Ofrecemos estos problemas con el ánimo de evidenciar ante nuestros colegas maestros la utilidad de la calculadora en la enseñanza "activa" de la matemática.

Ecuaciones con sorpresas

En un cierto texto de álgebra aparece el siguiente problema¹: Resuelva la siguiente ecuación por x :

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}$$

en la que suponemos que a y b son números reales y $a \neq 0$.

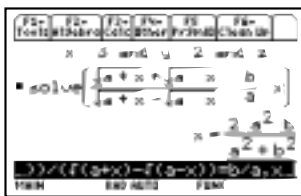


Figura 1

El texto ofrece como solución $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$. Si intentamos hallar la solución empleando la calculadora TI-89 también obtenemos la solución indicada, pero la pantalla ofrece un mensaje interesante: "Warning: Questionable Solution" (*Advertencia: solución cuestionable*). La **Figura 1** muestra la respuesta que se obtiene en la calculadora TI-89. Veamos algunas formas de abordar este problema. Primeramente, racionalizando el denominador, tenemos:

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \cdot \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2}{2x} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{2a + 2\sqrt{(a+x)(a-x)}}{2x} = \frac{b}{a}$$

$$a^2 + a\sqrt{(a+x)(a-x)} = bx$$

$$a\sqrt{(a+x)(a-x)} = bx - a^2$$

Cuadrando esta última expresión y simplificando (véase **Figura 2**), tenemos,

$$\begin{aligned} a^4 - a^2x^2 &= b^2x^2 - 2a^2bx + a^4 \\ (b^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx &= 0 \\ x(b^2 - a^2)x - 2a^2b &= 0 \end{aligned}$$

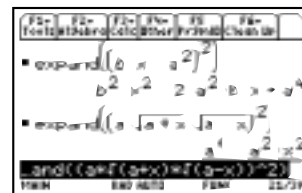


Figura 2

Igualando a cero cada factor de esta última expresión se obtienen dos soluciones, a saber $x = 0$ y la mencionada anteriormente. Note que $x = 0$ es una raíz extraña, es decir, satisface la última ecuación pero no la ecuación original.

En el texto aludido anteriormente se sugiere otro procedimiento de solución, el cual emplea el siguiente principio: si se cumple la proporción $u/v = w/z$, entonces también se cumple la proporción $(u + v) / (u - v) = (w + z) / (w - z)$ (si está bien definida, desde luego). Tomando los valores: $u = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$, $v = \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}$, $w = b$ y $z = a$, tenemos entonces que:

$$\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+a}{b-a}$$

¹ R.A. Kalnin, *Álgebra y funciones elementales*, Editorial MIR, Moscú

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Cuadrando ambos miembros de la ecuación y resolviendo la ecuación resultante, tenemos (véase la Figura 3),

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}$$

$$(a+x)(b-a)^2 = (a-x)(b+a)^2$$

$$a^2x - 2abx + b^2x + a^3 - 2a^2b + ab^2 = -a^2x - 2abx - b^2x + a^3 + 2a^2b + ab^2$$

$$2(a^2 + b^2)x - 4a^2b = 0$$

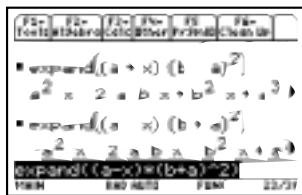


Figura 3

De esta última ecuación se obtiene la solución dada por el texto y mencionada anteriormente. Examinemos un poco esta solución.

Primeramente, en cada uno de los métodos empleados para la resolución de la ecuación hemos tenido que cuadrar ambos miembros de una ecuación, al menos una vez, y ello, como bien sabemos introduce raíces extrañas.

Además, la calculadora nos hizo una advertencia sobre la solución obtenida, catalogándola de solución dudosa y no confiable. De todos modos, al resolver ecuaciones en las que se cuadraron ambos miembros de las mismas (como ello puede conllevar la aparición de raíces extrañas) es menester verificar las soluciones obtenidas. Si intentamos verificar la solución $x = 2a^2b / (a^2 + b^2)$ sustituyéndola en el lado izquierdo de la ecuación original, obtenemos en la calculadora la siguiente pantalla:

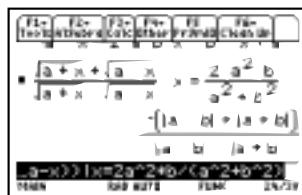


Figura 4

El resultado obtenido en nada se parece a lo que se debe obtener como solución, es decir, a b/a . Para ver lo que está ocurriendo, hagamos la sustitución de la presunta solución en la expresión $\sqrt{a+x}$ (véase Figura 5):

$$\begin{aligned} \sqrt{a+x} &= \sqrt{a + \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a(a^2 + b^2) + 2a^2b}{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a(a^2 + 2ab + b^2)}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a(a+b)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| \end{aligned}$$

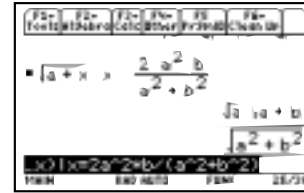


Figura 5

El procedimiento es válido siempre y cuando $a > 0$. Si continuamos haciendo las sustituciones correspondientes en las otras expresiones que aparecen en la parte izquierda de la ecuación original, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a-b| &= \frac{|a+b| + |a-b|}{|a+b| - |a-b|} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a-b| &= \frac{|a+b| - |a-b|}{|a+b| + |a-b|} \end{aligned}$$

Esta expresión es muy reveladora pues si, por ejemplo, $a = 2$ y $b = 1$, entonces el valor de la expresión de la izquierda es $2 \neq b/a = 1/2$. Es decir, la ecuación

$$\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}$$

ciertamente no tiene la solución indicada en el texto, a saber, $x = 8/5$.

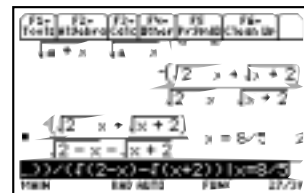


Figura 6

En efecto, al sustituir $8/5$ por x en el miembro izquierdo de la ecuación se obtiene un valor de 2 en lugar de $1/2$. Es decir, la ecuación no tiene solución en este caso, contrario a lo que se especifica en el texto. Si trazamos la gráfica de las relaciones

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} \quad (\text{cuyo dominio es } [-2, 2]), \text{ y} \\ y &= 1/2 \end{aligned}$$

observamos en la calculadora la pantalla de la izquierda en la Figura 7 (con ventana $-2 \leq x \leq 2, -5 \leq y \leq 5$).

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Claramente, las gráficas de las funciones no parecen cortarse. En el caso de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{1/2 + x} + \sqrt{1/2 - x}}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{1/2 - x}} \quad (\text{cuyo dominio es } [-1/2, 1/2]), \quad y = 2$$

(es decir, considerando los miembros de la ecuación cuando $a = 1/2$ y $b = 1$), observamos la segunda pantalla de la calculadora que se muestra a continuación (con ventana $-1/2 \leq x \leq 1/2$, $-5 \leq y \leq 5$).

Estas últimas relaciones sí tienen gráficas que se cortan; en efecto se cortan en el punto cuya ordenada es $x = 2/5$, la solución de la ecuación original para $a = 1/2$ y $b = 1$.

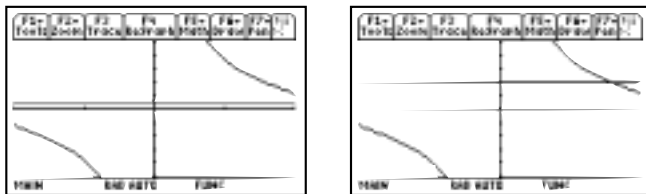


Figura 7

Tratemos de dilucidar este enigma. Como observamos anteriormente al sustituir la expresión $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$ en el miembro izquierdo de la ecuación original obtuvimos la expresión

$$\frac{|a + b| + |a - b|}{|a + b| - |a - b|}$$

(suponiendo, desde luego, que a es positivo). Con esta misma hipótesis sobre a , esta última expresión es equivalente a

$$\frac{\left|1 + \frac{b}{a}\right| + \left|1 - \frac{b}{a}\right|}{\left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|1 - \frac{b}{a}\right|}$$

lo cual nos sugiere que exploremos la gráfica de la relación

$$v = \frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|}$$

La gráfica de esta relación vista en la ventana $-5 \leq u \leq 5$, $-5 \leq v \leq 5$ aparece en la ventanilla de la izquierda en la **Figura 8** o la **Figura 9**. Esta gráfica es interesante pues parece rectilínea en parte de su dominio ($|u| \geq 1$) y tiene una apariencia radicalmente distinta para valores de u tal que $|u| < 1$. Si dibujamos en un mismo sistema de coordenadas la relación anterior y la relación $v = u$, vemos la ventanilla de la derecha en la **Figura 8**.

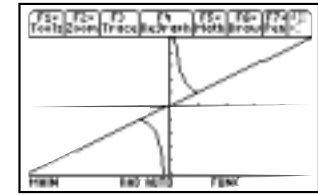
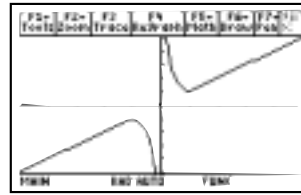


Figura 8

Además, si hacemos lo mismo (con la misma ventana) con las relaciones

$$v = \frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|}$$

$$v = 1/u,$$

obtenemos la ventanilla de la derecha de la **Figura 9**,

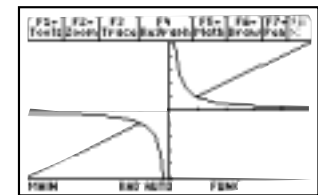
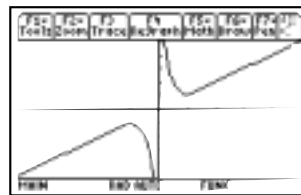


Figura 9

Claramente esto sugiere que

$$\frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|} = \begin{cases} \frac{1}{u} & \text{si } 0 < |u| < 1 \\ u & \text{si } |u| \geq 1 \end{cases}$$

y recordando que $u = b/a$ en nuestra situación original, vemos que

$$\frac{|a + b| + |a - b|}{|a + b| - |a - b|} = \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{si } \left|\frac{b}{a}\right| \geq 1 \\ \frac{a}{b} & \text{si } 0 < \left|\frac{b}{a}\right| < 1 \end{cases}$$

Esta relación nos dice que la ecuación original tiene la solución propuesta en el aludido texto de álgebra únicamente si $b \geq a > 0$ (recuerde que $a > 0$).

Además, también sugiere que si $a \geq b > 0$, entonces la ecuación $(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})/(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}) = a/b$ tiene como solución a $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$. Dejamos al lector interesado la discusión de las soluciones de la ecuación

$$(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})/(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}) = b/a$$

para todos los posibles valores de a y b (sin suponer necesariamente que a es positivo). Sugerimos al lector que trace las gráficas de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$$

$$y = \frac{b}{a}$$

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

para valores específicos de a y que para un tal valor de a trace las gráficas de la segunda relación para varios valores de b . Por ejemplo, la primera gráfica que se muestra corresponde a un valor de $a = 3$ y valores de b que fluctúan así: -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5. La gráfica de la derecha corresponde a los valores $a = -3$ con la misma fluctuación de b .



Figura 10

[Note que las gráficas sugieren fuertemente que sólo para algunos valores de b/a hay soluciones.]

También dejamos al lector la determinación de las soluciones de la ecuación

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}x.$$

Trate primeramente de hallar una solución empleando la calculadora y luego resuelva analíticamente. Discuta la naturaleza de las soluciones para los posibles valores de a y b . [Sugerencia: Visualice la ecuación como una proporción y aborde el problema como lo hicimos en el ejemplo anterior. (También puede racionalizar el denominador y luego cuadrar en ambos lados como en el ejemplo anterior.)]

La gráficas que se muestran a continuación son las de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

para los valores de $a = 3$ y -3 y para valores de b que fluctúan entre los valores de -5, -3, -1, 0, 1, 3 y 5. Note que se sugiere fuertemente que hay dos soluciones a la ecuación cuando hay alguna.

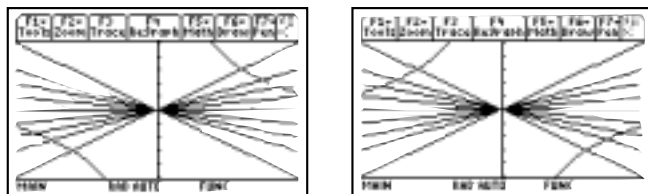


Figura 11

Ejercicio: Investigue las soluciones de las siguientes ecuaciones irracionales:

- a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$ [Sol: $x = 3$]
 b) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = 1$ [Sol: $x = 34$]
 c) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = x/15$ [Sol: $x = 22.8246$]

El problema de las ternas pitagóricas consecutivas

Una *terna pitagórica* es una terna de enteros no-negativos (x, y, z) que satisfacen la condición $x^2 + y^2 = z^2$. Por ejemplo, $(0, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$ y $(9, 12, 15)$ son ternas pitagóricas. Si una terna pitagórica (x, y, z) satisface la condición $x + 1 = y$, entonces decimos que la misma es una *terna pitagórica consecutiva*. Así pues, $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$ son ternas pitagóricas consecutivas, pero no así $(9, 12, 14)$. Las primeras dos ternas pitagóricas consecutivas son $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$. Un problema interesante es el de determinar una fórmula (ya sea recursiva o directa) la cual genere todas las ternas pitagóricas consecutivas (desde luego, a priori no sabemos si tal colección es o no infinita).

Este problema también invita a la experimentación. Para comenzar, podríamos emplear la calculadora para generar las primeras ternas de la sucesión, con la esperanza de poder descubrir algunos patrones numéricos interesantes que podrían resultar útiles para hallar la solución final del problema. Empleamos una calculadora TI-83 para generar rápidamente una tabla entre cuyas entradas aparecen algunas de las ternas pitagóricas deseadas. Por ejemplo, podríamos emplear una tabla que muestre, para valores consecutivos de enteros no-negativos x , los valores de las siguientes tres cantidades: x , $y = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$, y $\lfloor y \rfloor$ (aquí $\lfloor y \rfloor$ representa el "suelo" o la "parte entera" del entero y , es decir, el entero único que satisface la relación $n \leq x < n + 1$). Note que la expresión $\lfloor y \rfloor$ vale cero si y sólo si y es entero, es decir, si $(x, x+1, y)$ es una terna pitagórica consecutiva. Empleando una calculadora para generar tal tabla se obtienen pantallas como las que se muestran a continuación.

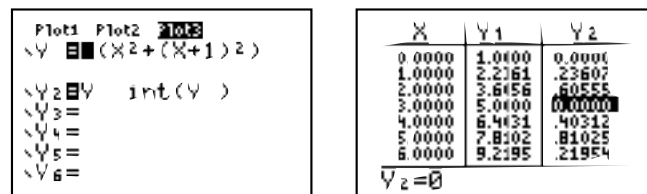


Figura 12

En la tabla se aprecian los primeros dos ternas pitagóricas $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$. Como ya se ha indicado, para identificar las ternas pitagóricas consecutivas en la tabla, basta sólo con examinar la columna $Y2 (= \lfloor y \rfloor)$ para detectar la aparición de "ceros" (los valores de la columna $Y2$ que corresponden a los valores 0 y 3 de $X (= x)$ valen cero; véase la **Figura 12**). Si examinamos la tabla a medida que tomamos valores progresivos de X , podremos constatar que el próximo cero ocurre para el valor de $X = 20$. La terna pitagórica correspondiente es entonces $(20, 21, 29)$.

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

X	Y1	Y2
15.0000	21.9333	93171
16.0000	23.3456	34524
17.0000	24.7579	75884
18.0000	26.1702	17250
19.0000	27.5825	58623
20.0000	29.0000	0.0000
21.0000	30.4114	41381

X	Y1	Y2
115.0000	163.34	34321
116.0000	164.76	75740
117.0000	166.17	17160
118.0000	167.59	58580
119.0000	169.00	0.0000
120.0000	170.41	41420
121.0000	171.83	82840

Figura 13

Después de este paso inicial la exploración se hace un tanto más tediosa, pero con un poco de paciencia llegamos al valor $x = 119$ para obtener la próxima terna pitagórica, a saber, (119, 120, 169). La Figura 14 se muestra el progreso alcanzado hasta el momento:

H	H + 1	Y
0	1	1
3	4	5
20	21	29
119	120	169

Figura 14

Una observación interesante de la tabla se relaciona con los cocientes sucesivos de los valores de x o los valores de y . Por ejemplo, los cocientes consecutivos de los valores de x son $21/3 = 7$ y $119/21 \approx 5.63$, y los de los valores correspondientes a y son $5/1 = 5$, $30/5 = 6$ y $169/30 \approx 5.63$. Resultados del mismo orden de magnitud se obtienen cuando empleamos las ternas pitagóricas que siguen a la última de la tabla. Esta experimentación "inductiva" sugiere que la próxima terna pitagórica ocurre para un valor aproximado de x de 5.6×119 que es alrededor de 666. Si examinamos la tabla correspondiente que comienza con este valor de x y la continuamos examinando a medida que los valores de x aumentan, vemos que el próximo valor de cero en la columna de $Y2$ ocurre para $X = 696$, es decir la próxima terna pitagórica es (696, 697, 985).

X	Y1	Y2
666.0000	942.57	.57364
667.0000	943.99	.98782
668.0000	945.40	4.0203
669.0000	946.82	8.1624
670.0000	948.23	12.3046
671.0000	949.64	16.4467
672.0000	951.06	20.5888

X	Y1	Y2
698.0000	987.83	82843
699.0000	989.24	24264
700.0000	990.66	65685
701.0000	992.07	07107
702.0000	993.49	48528
703.0000	994.90	89949
704.0000	996.31	31371

Figura 15

Podríamos continuar explorando de esta manera o escribir un pequeño programa para describir los próximos ternas pitagóricas consecutivas de la tabla. En el programa se indica el último valor de x descubierto y el programa indica el próximo triple en la lista (empleando como dato que el próximo valor de x es del orden de 5.8 veces el valor anterior de x). Por ejemplo, sustituyendo el valor de x del último triple descubierto, $x = 119$,

obtenemos el triple (696, 697, 985); si luego sustituimos $x = 696$, obtenemos a su vez el triple (4,059, 4,060, 5741). La siguiente es una lista de un amigo con calculadora de "precisión infinita" quien entusiásticamente completó la sucesión de ternas hasta la número 20 de la sucesión (la columna de la izquierda es el número de la terna):

7	23660	23661	33461
8	137903	137904	195025
9	803760	803761	1136689
10	4684659	4684660	6625109
11	27304196	27304197	38613965
12	159140519	159140520	225058681
13	927538920	927538921	1311738121
14	5406093003	5406093004	7645370045
15	31509019100	31509019101	44560482149
16	183648021599	183648021600	259717522849
17	1070379110496	1070379110497	1513744654945
18	6238626641379	6238626641380	8822750406821
19	36361380737780	36361380737781	51422757785981
20	211929657785303	211929657785304	299713796309065

La terna número 41 tiene proporciones respetables:

2527961881478169961048032963696,
2527961881478169961048032963697
3575077977948634627394046618865

En la Figura 16 y la Figura 17 se muestra un programa empleado para generar ternas consecutivas y algunos casos particulares de su empleo.

```

PROGRAM: TRIPLES
:Input "A=" A
: int (5.8*A) →A
: J(A²+(A+1)²) →R
: While R-int(R) >
:   0
: A+1 →A
: J(A²+(A+1)²) →R
: End
: Disp A A+1 R
: Stop
    
```

Figura 16

```

PRGM:TRIPLES
A=119
696 0000000
697 0000000
985 0000000
Done
    
```

```

PRGM:TRIPLES
A=696
4059 0000000
4060 0000000
5741 0000000
Done
    
```

Figura 17

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Como se puede observar, el número en la primera coordenada de las ternas crece rápidamente. Es interesante notar de paso que en algunas calculadoras (como la que estamos empleando en los cálculos de este ejemplo²) la suma de los cuadrados de las primeras dos columnas de la tabla podría resultar en un número que no se puede representar exactamente en la ventanilla de la calculadora. En tal caso la calculadora revierte al formalismo numérico de la aritmética de punto flotante; véase la **Figura 18**. Así pues es fácil ver que extender la tabla puede resultar tarea difícil para las calculadoras de aritmética de punto flotante. Invitamos al lector a hallar las dos próximas ternas pitagóricas de la tabla que hasta ahora hemos completado (es decir, las ternas número 21 y 22).

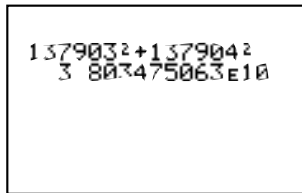


Figura 18

El examen de la tabla nos lleva al descubrimiento de patrones interesantes. Es fácil convencerse que existe una relación recursiva para generar la sucesión de las ternas pitagóricas consecutivas $(a_n, a_n + 1, b_n)$ ($n \geq 1$). Si suponemos por ejemplo que hay una relación lineal que relaciona las primeras coordenadas de las ternas, con las coordenadas de las ternas anteriores, digamos si existen números reales a, b, c tal que

$$a_{n+1} = aa_n + bb_n + c,$$

entonces es fácil buscar los coeficientes a, b y c si los hubiere. Por ejemplo, tomando $n = 0, 1$ y 2 obtenemos tres ecuaciones en tres desconocidas (a, b y c):

$$\begin{aligned} b + c &= 3 \\ 3a + 5b + c &= 20 \\ 20a + 29b + c &= 119 \end{aligned}$$

Podemos resolver estas tres ecuaciones empleando la calculadora,

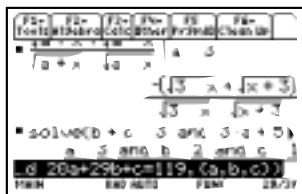


Figura 19

Vemos que la solución es $a = 3, b = 2, c = 1$. Es decir,

$$a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1.$$

Claro está, esta relación hay que probarla con otros valores de n además de los ya utilizados para ver si en efecto funciona con las otras ternas.

El lector puede verificar que en efecto funciona y puede hacer el cálculo correspondiente con las terceras coordenadas de las ternas. El resultado final es la siguiente relación recursiva.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \quad b_1 = 1 \\ a_{n+1} &= 3a_n + 2b_n + 1 \quad (n \geq 1) \\ b_{n+1} &= 4a_n + 3b_n + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Preguntas naturales que surgen de la experimentación en este problema son las relacionadas al comportamiento asintótico de los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n y a_n/b_n . De las relaciones anteriores es fácil ver que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n/b_n + 2 + 1/b_n}{4a_n/b_n + 3 + 2/b_n} \quad (2)$$

Como ya empezamos a sospechar por (1), la sucesión de ternas pitagóricas es infinita, y en tal caso es fácil ver que $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si suponemos que a_n/b_n se acerca a un valor límite x (como parece), entonces se obtiene de (2) (tomando límites) que

$$x = \frac{3x + 2}{4x + 3} \quad (3)$$

La solución positiva de (3) es $x = 1/\sqrt{2}$. El lector puede verificar que los valores sucesivos de a_n/b_n se aproximan en efecto a $.707107 = 1/\sqrt{2}$. Empleando nuevamente (1), el lector podrá verificar que los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n ambos se aproximan al valor $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.82$.

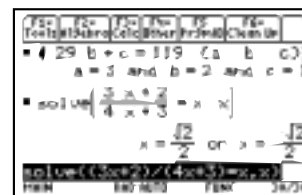


Figura 20

Una dimensión particularmente interesante de este problema (cuyos detalles los autores dejan a los lectores interesados) surge luego de observar que la recursión indicada anteriormente se puede escribir en "forma matricial" de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_0 = 0 \quad b_0 = 1, \quad n \geq 0 \quad (4)$$

² TI-83

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

En este caso los valores propios de la matriz indicada están dados por $\mu = 3 + 2\sqrt{2}$ y $\nu = 3 - 2\sqrt{2}$; véase **Figura 21**. Los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n parecen aproximarse a μ cuyo valor aproximado es de 5.82.

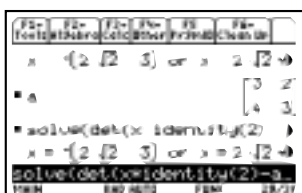


Figura 21

Los lectores interesados pueden verificar que la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

se puede diagonalizar, es decir, es posible hallar una matriz invertible **P** tal que $P^{-1}TP$ es una matriz diagonal **D** cuyas entradas corresponden a los valores propios de **T**. En efecto una matriz **P** con tal propiedad se muestra a continuación; véase la **Figura 22**:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$



Figura 22

En la siguiente discusión emplearemos la notación:

$$\tau_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, en notación matricial la relación recursiva (1) se convierte en

$$\tau_{n+1} = T\tau_n + b \quad (5)$$

Empleando la relación recursiva (2) y un argumento inductivo es posible demostrar la fórmula matricial (6) (dejamos los detalles al lector interesado; el lector puede imaginar que las matrices actúan como si fueran números reales para sumar las series geométricas que surgen sin miedo alguno) que para $n \geq 0$,

$$\tau_n = PD^nP^{-1}\tau_0 + P(I - D)^{-1}(I - D^n)P^{-1}b \quad (6)$$

(En la relación (6) **I** representa la matriz identidad de dimensión 2.) Calculando explícitamente esta expresión en la calculadora (véase **Figura 23**) tenemos.

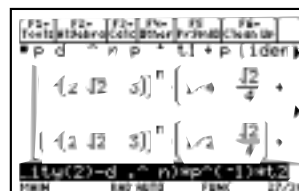


Figura 23

Esto nos da una fórmula explícita para los triples pitagóricos consecutivos (a_n, a_{n+1}, b_n) ($n \geq 0$):

$$a_n = (3 - 2\sqrt{2})^n \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{4} \right) + (3 + 2\sqrt{2})^n \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{4} \right) - \frac{1}{2}$$

$$b_n = (3 - 2\sqrt{2})^n \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right) + (3 + 2\sqrt{2})^n \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)$$

Invitamos al lector a que investigue la famosa sucesión de Fibonacci, definida por:

$$f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (*)$$

cuyos términos iniciales son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (cada término es la suma de los dos anteriores). Empleando una técnica similar a la aquí descrita halle una fórmula explícita para *.

Referencias

Kalnin, R. A., *Algebra y funciones elementales*, Editorial MIR, Moscú, 1973

Campistrous, L.A. y López, J.M., *La calculadora como herramienta heurística, aceptado para publicación*, Revista UNO, Barcelona

Autores

Luis Augusto Campistrous Pérez

Ministerio de Educación de la República de Cuba

Jorge M. López Fernández

Departamento de Matemática,

Universidad de Puerto Rico, Río Piedras