Maria Dolores Hernández Torres, Gabriela Esmeralda Orozco Durán, Eugenio Díaz Barriga Arceo.

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géomètre II™

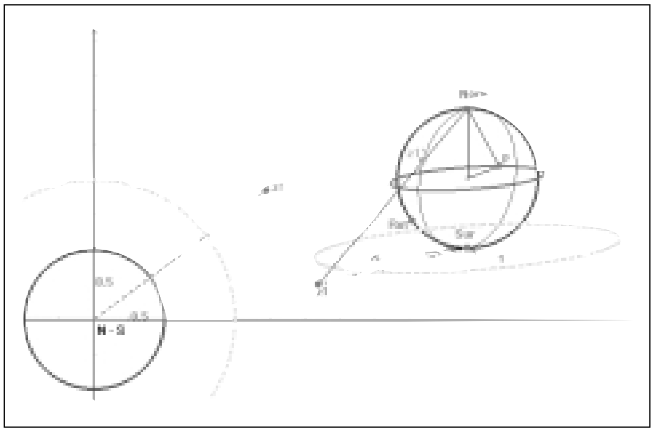
Introducción

La Geometría esférica nos proporciona un ejemplo de Geometría alternativa a la euclideana, en donde el habitual quinto postulado[1] se transforma para eliminar las paralelas del espacio. Las rectas del plano euclideano ceden su lugar a las rectas esféricas, que son las circunferencias máximas de la Esfera de Riemann.

En la currícula actual se proporciona al estudiante tan sólo el recurso del álgebra para aproximarse a una comprensión de los principales resultados de la Geometría esférica, con lo cual la visualización de resultados y el sentido común dentro del modelo se vean fuertemente limitados. Esto hace necesario que nuevas propuestas de enseñanza se integren al aula de clases.

La tecnología nos abre una posibilidad que aún tiene un largo camino por recorrer. ¿Cómo utilizar un software bidimensional de Geometría Dinámica como Cabri Géomètre II para simular esta Geometría? He aquí el propósito de este trabajo.

Saltando de un trampolín hacia la esfera: la proyección estereográfica



Para generar la Geometría de la esfera nos valdremos del recurso de utilizar a la proyección estereográfica como medio para lanzar curvas del plano a la esfera[2].

[1] Nos referimos a la versión de John Playfair del quinto postulado de Euclides: por un punto exterior a una recta dada puede trazarse una y solo una recta paralela a aquella. La versión dada por Euclides puede encontrarse, por ejemplo, en el clásico (Heath, T. L., 1956, *The Thirteen Books of the Elements*, 2nd ed. Vols. 1,2 3. New York: Dover).

[2] Conocemos como proyección estereográfica a la transformación de un plano en la esfera y viceversa que cumpla los siguientes requisitos: apoyemos el polo sur de la esfera sobre el plano de modo que éste sea tangente a aquella; para encontrar el punto de la esfera que se asocia con un punto particular del plano, tracemos el segmento de recta que une al polo norte de la esfera con el punto dado en el plano; el punto buscado es el punto de intersección del segmento de recta con la esfera; al polo norte de la esfera (única excepción en esta regla de asociación) le corresponde el punto al infinito del plano.

Nuestra primera tarea es identificar las curvas del plano estereográfico que puedan generar circunferencias máximas en la esfera de Riemann. Recordemos que, dependiendo de la orientación que tengan en la esfera, hay tres clases de circunferencias máximas de las cuales las dos primeras nos son muy familiares:

a) El ecuador de la esfera estereográfica.
La circunferencia de radio 2 centrada en el origen nos basta para generar el ecuador de la esfera estereográfica.
b) Los meridianos de la esfera estereográfica.
Las rectas que pasan por el origen se corresponden a los meridianos de la esfera estereográfica.
c) Circunferencias máximas generadas por cortes con planos que pasan por el centro de la esfera y que son oblicuos respecto al ecuador y los meridianos.

Este es el caso "complicado". Procedamos como sigue: comencemos por trazar un punto en el plano estereográfico al que llamaremos *z0**; ahora consideremos dos puntos en la Esfera de Riemann que sean diametralmente opuestos y que no se encuentren ni en los polos ni en el ecuador de la figura. Podemos suponer que serán respectivamente los puntos más alto y más bajo con relación al plano estereográfico de la circunferencia máxima que deseamos construir. Así entonces, tomemos por ejemplo al más bajo y llamémosle *z0*. Sea el punto más alto *z1 y* los puntos correspondientes en el plano precisamente el anterior *z0** y otro punto *z1**, respectivamente.

La curva buscada deberá pasar por *z0** y *z1**; más aún: considerando la proyección de una circunferencia en un plano desde un punto fijo (en este caso el polo *Norte* de la Esfera), se sabe en primera instancia que la curva buscada es una elipse con los puntos *z0** y *z1** como vértices. También se tiene que el centro de la elipse se encontrará en el punto medio entre ambos.

Para definir adecuadamente a una cónica en Cabri Géomètre II es necesario determinar cinco puntos por los cuales pasa dicha curva. Primeramente, para determinar la posición de *z1** conocida la posición de *z0**, observemos que:

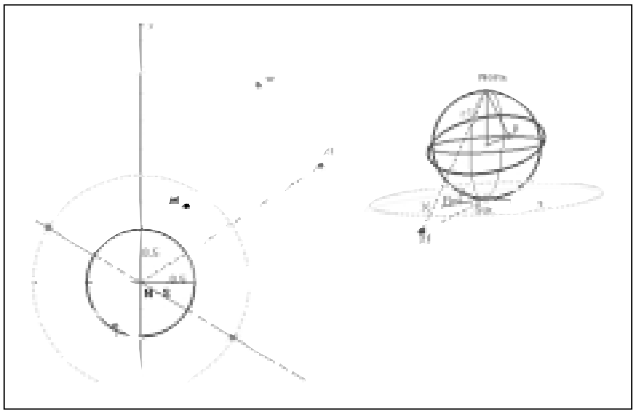
1. Un meridiano contiene al polo *Norte*, los puntos *z0, z1* y al polo Sur. Llamémosle *m1*.
2. El ángulo entre los puntos *z0* , el polo *Norte* y *z1* es un ángulo recto.
3. Los puntos *z0** y z1* se encuentran en el mismo plano a dicho meridiano. El polo *Sur* es colineal al segmento *z0*z1** y está entre ellos.
4. El triángulo de vértices *z0**, polo *Sur* y polo *Norte* es semejante al triángulo determinado por el polo *Norte*, el polo *Sur* y el punto *z1**.

De lo anterior, una forma de trazar *z1** a partir de *z0** es la siguiente: construir la circunferencia de radio *2* en el plano estereográfico, obtener el inverso *z0'* de *z0** con respecto a dicha circunferencia y después el

simétrico de $z0'$ con respecto al origen. El punto así obtenido será $z1^*$. Resta entonces determinar 3 puntos de la cónica buscada.
Ahora tenemos que:

1. La circunferencia máxima oblicua buscada intersecta al ecuador en 2 puntos.
2. Los puntos de intersección anteriores se encuentran sobre la mediatriz del segmento $z0z1$.
3. El meridiano que forma un ángulo recto con respecto al meridiano $m1$ contiene a la mediatriz anterior. Llamémosle $m2$.
4. La recta que pasa por el origen del plano estereográfico y que es perpendicular al segmento $z0^*z1^*$ es la proyección del meridiano $m2$.

Por las consideraciones anteriores, una forma de generar 2 puntos de la cónica buscada es entonces trazar la recta perpendicular al segmento $z0^*z1^*$ que pase por el origen y encontrar los 2 puntos de intersección de esta recta con la circunferencia de radio 2. Dichos puntos $V1$ y $V2$ están en correspondencia con los puntos de intersección entre circunferencia máxima y ecuador.



Solo falta determinar un punto para completar la definición de la cónica pedida. Sea M el punto medio entre $z0^*$ y $z1^*$; M es entonces el centro de la cónica. Tomemos indistintamente $V1$ o $V2$ y encontremos el simétrico del punto elegido con respecto a M, que también se encontrará en la cónica. El conjunto de cinco puntos está completo.

Pero una vez que utilizamos el comando de cónicas para trazar la elipse requerida, una sorpresa muy grata nos aguarda en el plano estereográfico: la complicada elipse toma la forma de una simple, notable, amigable, hermosa y dócil circunferencia[3], lo cual nos lo indica el entorno una vez que acercamos el cursor a la curva. Este descubrimiento hace que el trazo anterior pueda reemplazarse, simplificándolo espectácularmente: una vez que se ha conocido $z1^*$ a partir de $z0^*$, se traza el punto medio M y entonces se dibuja la circunferencia con centro en M y radio el segmento de M a $z0^*$.

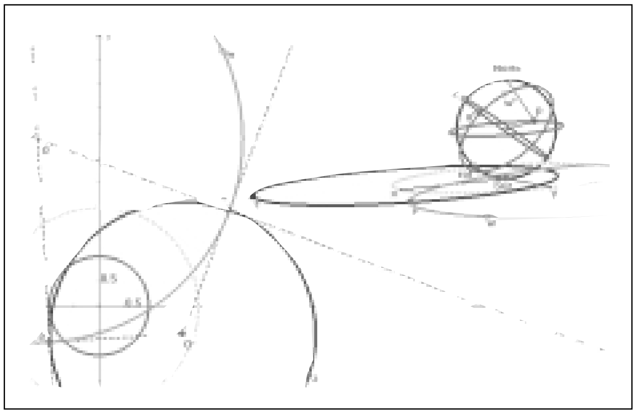
Mediante la manipulación de los ejes tridimensionales (vía el punto que hemos designado como Rot), podemos observar a la circunferencia máxima en el plano que pasa por l centro de la Esfera. Así también es posible identificar los puntos más bajo y más alto en ella (vía el punto utilizado para recorrer la circunferencia del plano estereográfico).

En el siguiente espacio trataremos tan sólo dos problemas de construcción en la Esfera de Riemann, que se apoyan en el hecho de que la proyección estereográfica es un mapeo conforme, es decir, que preserva ángulos.

Problema 1

Dada una circunferencia máxima y un punto en ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.

Sean C la circunferencia máxima en la Esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. El trazo comienza por C^* y un punto a sobre ella. Bajo proyección estereográfica se generan C y a' respectivamente en la Esfera.



Ya que a pertenece tanto a la circunferencia C^* como a la circunferencia buscada, en este punto de intersección el radio de C^* es tangente para la circunferencia buscada y viceversa. Por otra parte si a' es un punto de C, también lo es el punto diametralmente opuesto a él, al cual llamaremos b'; sea b el punto correspondiente en el plano estereográfico. Ya que b es también punto de intersección entre la circunferencia C^* y la circunferencia pedida, para encontrar el centro de esta circunferencia basta trazar tangentes a C^* que pasen por dichos puntos y localizar su punto de intersección O. El radio buscado es, por supuesto, la distancia desde dicho punto hasta cualquiera de los puntos a o b.

[3] Parece existir una omisión al no designar con un nombre específico tal clase de circunferencias. Por ejemplo en (Weisstein, E. 1998, The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, pp. 1736) sólo se menciona que una proyección estereográfica es un mapeo en el cual los círculos máximos son proyectados en círculos y loxodromas en espirales.

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géomètre II™

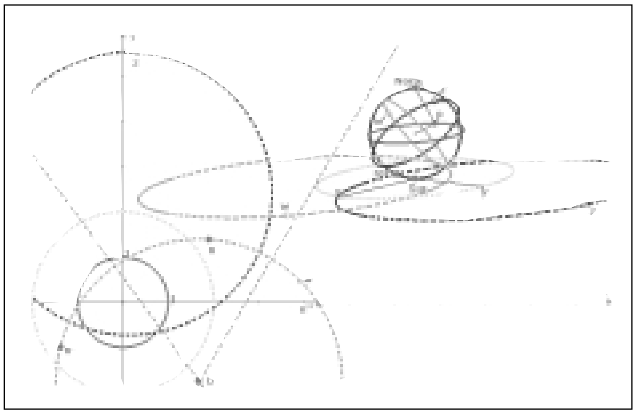
(continuación)

Problema 2

Dada una circunferencia máxima C^* y un punto en la esfera fuera de ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.

Sean C la circunferencia máxima en la Esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. El trazo comienza por C^* y un punto n' que no pertenezca a ella. Bajo proyección estereográfica se generan la circunferencia C y el punto n correspondientes respectivamente en la Esfera. Para generar una circunferencia perpendicular a C^* que pase por n' se necesita una circunferencia ortogonal a C^* que pase por n', la cual pasará también por el punto n'' inverso de n con respecto a la circunferencia C^*. Además, en la Esfera los puntos correspondientes a n y el diametralmente opuesto, pertenecerán a la misma circunferencia C. Por esto, el punto en la Esfera correspondiente a n' en el plano estereográfico, así como el correspondiente a su inverso con respecto a la circunferencia C^*, son dos puntos de la circunferencia máxima perpendicular buscada.

El centro O de la circunferencia buscada en el plano estereográfico es la intersección de la mediatrices entre los pares de puntos *(n, n')*, y *(n, n'')*.



Conclusión

En este artículo se ha mostrado un ejemplo en el cual puede utilizarse un software y bidimensional para explorar propiedades geométricas tridimensionles. Para el caso que nos ocupa aquí, la proyección estereográfica es un recurso muy adecuado que nos permite el salto a otras dimensiones, con lo cual podemos ampliar nuestra visualización a una Geometría sin paralelas.

La inducción de una métrica a esta Geometría esférica no se ha tratado en este artículo, pero una exploración cuidadosa de lo que se ha construido indicaría que en el plano estereográfico, aún dentro de la misma circunferencia del tercer tipo estudiado aquí, dos arcos de igual longitud pueden mapearse a arcos de circunferencia máxima diferentes.

La exploración de muchas propiedades matemáticas es posible merced a las nuevas tecnologías en el aula, que hacen accesibles y visuales profundas relaciones que antes eran tema de sólo unos cuantos. Particularmente, Cabri Géométre II es un paquete de Geometría Dinámica que permite popularizar muy diversos temas científicos a través de construir modelos geométricos. La labor constructiva es una tarea en la cual los alumnos pueden descubrir su pasión por la Matemática

Referencias

Churchill, R., Brown, J. (1985). *Complex variables and applications*. Mc Graw Hill. USA.

Coxeter, H. M. S. (1988). *Fundamentos de Geometría*. Editorial LIMUSA. México.

Díaz Barriga, E., (2000). *Para la didáctica de las cónicas: historia de una construcción geométrica*. Revista IPN, Arte, Ciencia: Cultura. Julio - Agosto 2000.

Eves, H., (1985). *Estudio de las Geometrías*, Vol. I, pgs. 174-177. UTEHA. México.

Heath, T. L., (1956). *The Thirteen Books of the Elements*, 2nd ed. Vols. 1,2 3. New York: Dover.

Rousselet, M. (1995). *Dessiner L´espace ou Comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l´espace*. Editions Archimede. (France).

Schwerdtfeger, H., (1979). *Geometry of complex numbers*. Dover Publications. New York, USA.

Weisstein, E., (1999). *CRC Consice Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press LLC. USA.