

# UN CURSO DE GEOMETRÍA EN EL BACHILLERATO CON EL APOYO DE CABRI JR.

## Introducción

Los resultados más relevantes reportados en distintas latitudes en relación al uso y aprovechamiento de las tecnologías, en particular de la calculadora graficadora, para el aprendizaje de las matemáticas, coinciden en que los alumnos experimentan un aprendizaje significativo a través de un uso apropiado de dicha tecnología. En este sentido, este artículo tiene como objetivo compartir una experiencia de la utilización de la calculadora TI 84 plus como auxiliar en el estudio de la geometría en el bachillerato con la aplicación Cabri Jr.

En el ambiente de las escuelas públicas en México, aún es difícil solicitar a cada alumno que adquiera una calculadora TI 84 plus, debido a que muchos de ellos provienen de familias con escasos recursos económicos; esta es una de las razones por la que no ha podido generalizarse el uso de calculadoras graficadoras para favorecer el aprendizaje de las matemáticas en nuestro medio.

Una manera de salvar este obstáculo, si no idónea, al menos eficaz, es que la escuela, a través de distintos patrocinios, obtenga calculadoras para los grupos de alumnos y que puedan utilizarse durante las clases. Eso se hizo en la Escuela Preparatoria Regional de Chapala de la Universidad de Guadalajara.

El contexto de la experiencia reportada es el curso de Geometría que se imparte en el 3er. semestre de Bachillerato General; se trabajó con 130 alumnos distribuidos en tres grupos. Se empleó la calculadora en una hora de las tres semanales, durante las 17 semanas que comprende el curso semestral.

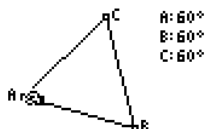
Para ejemplificar la práctica realizada con la calculadora TI 84 plus, se presentarán algunas de las actividades ejecutadas, se reportarán las opiniones de los alumnos respecto a su gusto y aprovechamiento de la calculadora.

Las instrucciones para una posible realización de los trazos se indicarán en un anexo, al final del artículo. Es importante considerar que los trazos pueden lograrse de diversas maneras y que en ocasiones la creatividad de los jóvenes produce trazos ingeniosos que conviene compartir y analizar.

## Ejemplos de actividades realizadas de distintos contenidos de las unidades del programa.

- Tema: Clasificación de triángulos.

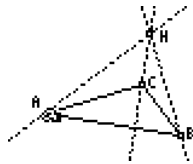
**Actividad 1:** Construir un triángulo equilátero.



Comentarios: En general, al principio los alumnos construyen un triángulo equilátero en apariencia, pero al pedirles “arrastrar” un vértice y observar que el triángulo se deforma, se insiste en que para que cumpla la característica solicitada el triángulo debe seguir siendo equilátero (ángulos de 60 grados) aunque cambie de forma o posición. Esta resistencia al “arrastre” deberá cumplirse para cualquier actividad futura.

- Tema: Alturas de un triángulo.

**Actividad 2:** Trazar un triángulo y sus alturas.



Comentarios: Es importante que al arrastrar los vértices se observe cómo cambia la ubicación del ortocentro H, dependiendo de si el triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. En el segundo caso H se ubica en el vértice del ángulo recto.

- Tema: Suma de ángulos interiores de un triángulo.

**Actividad 3:** Trazar un triángulo ABC, medir sus ángulos y verificar que independientemente de su forma y tamaño, la suma es igual a  $180^\circ$ .



Comentarios: Este resultado es muy importante en la geometría, por lo que ayuda a su asimilación el verificarlo con la calculadora.

- Tema: Circuncentro de un triángulo.

**Actividad 4:** Trazar un triángulo y su circuncírculo.



Comentarios: Es conveniente observar que, igual que el ortocentro de un triángulo, el circuncentro cambia de lugar y queda ubicado dentro, sobre o fuera del triángulo, dependiendo de si éste es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. En el segundo caso se ubica en el punto medio de la hipotenusa.

- Tema: Polígonos regulares

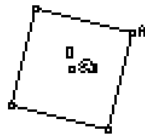
**Actividad 5:** Trazar un hexágono regular.



Comentarios: El hexágono regular es el único polígono regular que forma un triángulo equilátero con cada lado y su centro, por lo que su trazo con regla y compás es relativamente sencillo.

- Tema: Cuadriláteros.

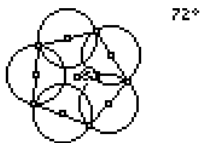
**Actividad 6:** Dados dos puntos O y A, trazar un cuadrado con centro en O y un vértice en A.



Comentarios: La propiedad del cuadrado que los alumnos deben saber y reproducir es, que sus diagonales son iguales y perpendiculares. Esto se puede lograr con el trazo propuesto en el anexo o aplicando simetría para ubicar el vértice opuesto al A y girando esta diagonal  $90^\circ$  con centro en A. Lo significativo es que los estudiantes apliquen propiedades geométricas, en este caso de cuadriláteros, y obtengan figuras con las características solicitadas que resistan su “arrastre”.

- Tema: Transformaciones geométricas; rotación.

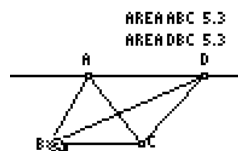
**Actividad 7:** Trazar una flor de cinco pétalos como la de la siguiente figura:



Comentarios: Cualquier polígono regular se puede trazar con giros o rotación; si tiene  $n$  lados, el ángulo de giro será de  $360 \div n$ ; en este caso fue de  $360 \div 5 = 72^\circ$ .

- Tema: Área del triángulo.

**Actividad 8:** Verificar que si dos triángulos tienen la misma base y la misma altura tienen la misma área.



Comentarios: Generalmente los alumnos recitan de memoria la fórmula del área del triángulo, sin que medie una asimilación de lo que puede ser su base y su altura. Esta actividad favorece la comprensión de la fórmula.

- Tema: Área y perímetro de un rectángulo.

**Actividad 9:** Dado el perímetro de un rectángulo, encontrar cuál es el que tiene el área máxima.



Comentarios: Esta actividad es la que hasta ahora ha requerido de trazos más elaborados, pero es muy efectiva para el entendimiento de la variación de una magnitud cuando otra permanece constante, además de ir conociendo los comandos y las posibilidades de la calculadora con la aplicación Cabri Jr.

- Tema: Recta tangente a un círculo.

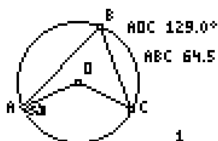
**Actividad 10:** Dado un círculo, trazar una recta tangente a él.



Comentarios: Esta actividad es muy sencilla pero muy ilustrativa para comprender lo que es una recta tangente a una curva. Esto se observa sobre todo al animar el punto de tangencia.

- Tema: Ángulos centrales y ángulos inscritos

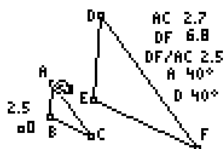
**Actividad 11:** Verificar el teorema del ángulo inscrito que dice que la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la del ángulo central correspondiente.



Comentarios: Esta actividad, además de verificar el teorema del ángulo inscrito, puede aprovecharse para observar otros resultados derivados de él, como que los ángulos inscritos en el mismo arco tienen la misma medida, así como que si el ángulo central mide  $180^\circ$ , el ángulo inscrito mide  $90^\circ$  en cualquier punto del círculo; se puede observar esto “animando” el vértice del ángulo inscrito.

- Tema: Semejanza de triángulos.

**Actividad 12:** Trazar dos triángulos semejantes y confirmar que los ángulos correspondientes miden lo mismo y que los lados son proporcionales.



Comentarios: Se aprovecha la transformación llamada homotecia (Dilation) para el trazo de triángulos o cuadriláteros semejantes. Se aclara que en este caso los lados correspondientes quedan paralelos, lo cual no es indispensable para que los triángulos sean semejantes. Se podría enriquecer la actividad primero rotando o reflejando el primer triángulo y después dilatándolo y ocultando el triángulo original.

### Opinión de los alumnos

Al final del semestre se aplicó una encuesta a 130 alumnos de los tres grupos, con 10 preguntas y cinco opciones para responder:

Nada/ Nunca	Algunas Veces	Indiferente/ No sé	Casi Siempre	Siempre
-------------	---------------	--------------------	--------------	---------

Los resultados más sobresalientes fueron:

1. ¿Te gusta que en tus clases de matemáticas además del uso de la calculadora científica se utilice la calculadora TI84 plus? El 64% de los alumnos contestaron Siempre.
2. ¿Se te dificultó aprender a utilizar la calculadora TI84 plus? El 71% contestó Algunas veces.
3. Los ejercicios resueltos con la calculadora TI84 plus ¿te resultaron interesantes? El 60% contestó Siempre.
4. Los ejercicios resueltos con la calculadora TI84 plus ¿te resultaron complicados? El 62% contestó Algunas veces.
5. ¿Los ejemplos y los ejercicios hechos con la calculadora TI84 plus te ayudaron a comprender mejor los conceptos de la geometría? El 36% contestó Algunas veces y el 35% Siempre.
6. ¿Te gustó estudiar la geometría con la aplicación Cabri Jr.? El 66% contestó Siempre.
7. ¿Te gustaría que en otros semestres también se utilizara la calculadora TI84 plus? El 79% contestó Siempre.
8. ¿Te gustaría que se le destinaran más clases (dentro del semestre) al uso de calculadoras TI84 plus? El 58% contestó Siempre.
9. ¿Crees que por ti mismo puedes aprender a usar la calculadora TI84 plus? En esta pregunta no hubo una tendencia clara, en orden las opciones se distribuyeron: 12%, 18%, 16%, 29% y 25%.
10. Crees que si en tus demás clases se favoreciera el uso de tecnología, ¿aprenderías mejor lo que corresponde a cada materia? El 29% contestó Casi Siempre y el 47% Siempre

Por la tendencia de las respuestas, se observa la apertura y disposición que muestran los alumnos al manejo de la calculadora TI 84 plus. Esta situación resuelve en cierta medida, el grave problema que supone la falta de motivación en nuestros estudiantes

hacia el estudio de la matemática. Además propicia que el alumno abandone ese rol, a veces pasivo, que implica la escucha, la observación y atención a lo que está haciendo el maestro; es decir, el uso individual de la TI84 plus le permite la interacción directa, la exploración, el error y la rectificación por él mismo, elementos indispensables de un aprendizaje significativo.

### **Conclusiones**

Sin que se haya hecho una investigación formal, se pudo notar que con el uso de la TI 84 plus, los estudiantes pueden lograr un entendimiento más profundo de la geometría. Se puede complementar su estudio con la aplicación Cabri Jr., cuya principal virtud radica en que al construir determinadas figuras geométricas y “arrastrar” algún elemento, dejando invariantes los demás, se observa cómo altera las propiedades de la figura la variación o “arrastre” de dicho elemento. Esto da un enfoque dinámico a la geometría que el uso común de los trazos en el papel o el pizarrón no permite. Además la aplicación contiene diferentes comandos que acceden a estudiar y explorar construcciones geométricas con una lógica distinta pero complementaria a la lógica formal.

Por otro lado fue posible adaptar la instrucción a necesidades específicas de los alumnos. Los estudiantes que se distraen fácilmente pueden concentrarse mejor cuando las tareas se realizan en la calculadora.

A medida que los estudiantes se familiarizan con el uso de las calculadoras, el profesor tiene la oportunidad de observarlos y fijarse en cómo razonan, por lo que éstas ayudan en la evaluación. Permite al maestro examinar los procesos de los alumnos al realizar las actividades solicitadas, enriqueciendo la información para tomar decisiones relacionadas con la enseñanza.

### **Bibliografía:**

Estándares de Currículo y Evaluación para las Matemáticas Escolares 2000 (NCTM Standards 2000)

Moreno, Armella; “Reflexiones sobre la geometría mediada por la computadora (Cabri II)”; Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática, 1998

Moreno, Armella; “Instrumentos Matemáticos Computacionales”; Documento interno CINVESTAV; México, 1999.

García, Alfonso; Martínez, Alfredo y Miñano, Rafael; “Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas”; Editorial Síntesis; España, 2000.

Morfin, Pilar; “Geometría” Tercera edición; Editorial Mc. Graw Hill; México, 2004

## ANEXO DE INSTRUCCIONES BÁSICAS

Actividad 1: Trazar un segmento (F2). Trazar dos círculos (F2) con centro en cada extremo del segmento y que pase por el otro. Trazar el triángulo (F2) con vértices en los extremos del segmento y en una de las intersecciones de los dos círculos (para seleccionar este punto deben parpadear ambos círculos antes de teclear ENTER). Otra manera de trazar el triángulo es que después de trazar los dos círculos, se ubique uno de sus puntos de intersección (F2 Point Intersection), para tener determinados los tres vértices del triángulo. Medir los tres ángulos (F5 Measure Angle y ENTER tres veces para cada ángulo sobre los tres puntos que determinan al ángulo). Arrastrar los vértices (pulsar la tecla CLEAR y aparece una flecha negra, ubicarse en un vértice hasta que la flecha esté blanca y pulsar la tecla verde ALPHA, aparece una manita y moverla con las flechas).

Actividad 2: Trazar un triángulo ABC, los nombres de los vértices se escriben con F5 (Alpha-num), antes de escribir la letra del vértice, debe parpadear el punto, si no al mover el punto la letra se queda en el mismo lugar y no sigue al punto; se debe teclear ENTER antes y después de escribir la letra. Trazar las tres alturas (F3 Perp y ENTER sobre un vértice y el lado opuesto o viceversa, primero el lado y luego el vértice opuesto). Ubicar el ortocentro H (F2 Point Intersection). Puntear las alturas (F5 Display y seleccionar cada altura). Arrastrar los vértices.

Actividad 3: Trazar un triángulo ABC. Escribir (F5 Alpha-Num) en una esquina los nombres de los ángulos A, B y C y las sumas  $A+B$  y  $A+B+C$  (para que se escriba el + se debe pulsar la tecla verde ALPHA y para volver a las letras se pulsa una vez más). Medir los ángulos A, B y C y ubicar su valor a la derecha de sus nombres escritos. Seleccionar Calculate en F5 y dar ENTER al valor del ángulo A, luego a la tecla + de la calculadora y después el ángulo B; ubicar el valor obtenido en su lugar. Repetir lo anterior con  $A+B$  y con C. Arrastrar los vértices.

Actividad 4: Trazar un triángulo. Trazar las mediatrices de dos de sus lados (F3 Perp. Bis, seleccionamos un lado ENTER y luego otro). Trazar el círculo con centro en la intersección de las mediatrices y que pase por uno de los vértices del triángulo. Este es su circuncírculo. Ocultar las mediatrices (F5 Hide/Show y dar ENTER a cada mediatriz). Arrastrar los vértices.

Actividad 5: Trazar un primer círculo centrado. Ocultar el punto sobre el círculo. Trazar un segundo círculo con centro en un punto del primero y que pase por su centro. Trazar un tercer círculo con centro en una de las intersecciones de los dos primeros círculos y que pase por el centro del segundo. Trazar un cuarto círculo con centro en la intersección del primer y el tercer círculo y que pase por el centro del tercer círculo. Trazar un quinto círculo de manera similar. Trazar los segmentos determinados por los seis puntos ubicados sobre el primer círculo. Ocultar todos los círculos. Arrastrar el centro del primer círculo.

Actividad 6: Trazar un círculo con centro en O y que pase por A. Trazar la recta OA (F2 Line). Trazar una perpendicular a la recta OA que pase por A. Trazar el cuadrilátero (F2 Quad.) con vértices en A y en las intersecciones de las perpendiculares con el círculo. Ocultar las perpendiculares y el círculo. Arrastrar el vértice A ó el punto O.

Actividad 7: Trazar un pentágono regular empleando giros de la siguiente manera: ubicar dos puntos, el primero en el centro de la pantalla; escribir en una esquina 72 (F2 Alph-num ENTER ALPHA); girar, con centro en el primer punto,  $72^\circ$ , el otro punto (F4 Rotation, ENTER en el punto central, ENTER en el 72 y ENTER en el otro punto. De la misma manera girar los puntos obtenidos hasta tener 5, formar con segmentos el pentágono regular. Ubicar el punto medio (F3 Midpoint) de los cinco segmentos. Trazar los cinco círculos.

Actividad 8: Trazar un triángulo ABC; trazar una recta paralela a BC que pase por A (F3 Parallel, BC ENTER, A ENTER o al revés, primero el punto y luego el segmento) Ubicar el punto D sobre la paralela (F2 Point on). Escribir en la esquina (F5 Alph-num AREA ABC y AREA DBC. Medir el área de ambos triángulos (F5 Measure Area) y acomodar la medida en el lugar correspondiente. Arrastrar el punto A, B, C o D. Animar el punto D (F1 Animate, punto D ENTER, la animación se detiene con 2ND ENTER).

Actividad 9: Trazar un segmento largo en la parte superior, que representa el perímetro dado y medirlo (F5 Measure D.&Lenght). Ubicar su punto medio. Colocar un punto sobre la primera mitad del segmento. Ahora trazaremos un rectángulo que tenga perímetro igual a la longitud del segmento dado: Trazar una recta, ocultar uno de los puntos. Seleccionar el comando compás (F3 compass) pulsar ENTER en los dos primeros puntos del primer segmento y luego ENTER en el punto de la recta (esto se hace para trasladar una longitud a otra recta). Trazar una perpendicular a la recta por el punto determinado por el compás y similarmente (con F3 Compass) trasladar la distancia entre el segundo punto del segmento y su punto medio, a esta perpendicular, a partir del primer punto determinado por el compás. Sólo falta determinar el cuarto vértice del rectángulo, lo que haremos trazando las perpendiculares correspondientes. Trazar el rectángulo (F2 Quad) pulsando ENTER en sus cuatro vértices. Ocultar todos los círculos, rectas y puntos de modo que sólo quede el segmento y el rectángulo. Medir su perímetro (F5 Measure D.&Lenght), debe parpadear todo el rectángulo antes de pulsar ENTER. Verificar que el rectángulo tenga el perímetro dado. Medir su base, su altura y su área. Para lograr una precisión de dos decimales en estas medidas, se multiplican por 1.00. Para esto escribir (F5 Alph-num ALPHA) 1.00, seleccionar Calculate (F5), pulsar ENTER en la medida de la base, luego el x de la calculadora y luego ENTER sobre el 1.00; encimamos esta medida sobre la anterior. Hacemos lo mismo con la altura y con el área. Ahora sí estamos listos para buscar y encontrar lo indicado en la actividad. Arrastrar el punto elegido sobre la primera mitad del segmento y detenerse cuando el área sea la mayor.

Actividad 10: Trazar un círculo. Ocultar el punto del círculo. Trazar un segmento del centro a un punto del círculo (radio). Trazar una recta perpendicular al radio que pase por el punto de tangencia. Animar el punto (F1 Animate), dar ENTER al punto.

Actividad 11: Trazar un círculo (ocultar el punto sobre él). Trazar con segmentos un ángulo inscrito y el ángulo central correspondiente al mismo arco. Medir ambos ángulos y de manera similar a la actividad 9, multiplicar las medidas por 1.0 para lograr redondear hasta un decimal. Arrastrar los diferentes puntos, para observar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de ángulo central correspondiente. Cabri Jr. no mide ángulos cóncavos, de modo que la relación se observa cuando el ángulo central mide a lo más  $180^\circ$ .

Actividad 12: Ubicar un punto O (centro de la dilatación u homotecia) y escribir un número, por ejemplo el 2.5 (factor de escala), en un extremo de la pantalla. Trazar un triangulito ABC. Seleccionar Dilation (F4), pulsar ENTER sobre O, luego sobre el número y luego sobre el triángulo (pueden intercambiarse estas instrucciones). Si la figura se sale de la pantalla, arrastrar O, o algún vértice, o escribir un factor de escala más chico. Medir alguno par de ángulos correspondientes y otro de lados correspondientes. Calcular el cociente de los lados y comprobar que es igual al factor de escala.