

Ipotesi

La tecnologia nell'insegnamento scientifico

Anno 10 n. 1/2007

Editoriale

Da vari anni molti docenti insegnano giustamente la matematica con le calcolatrici scientifiche, grafiche e CAS. Sull'altra faccia della medaglia abbiamo i vari software come Derive, Cabri, TI InterActive! che però hanno bisogno di un computer. Si era creata così una strana frattura tra i vari strumenti, con problemi seri, dovuti alla impossibilità di operare con entrambi. Tra l'altro gli stessi docenti erano divisi dalla domanda: calcolatrice o computer? Per fortuna sta arrivando sul mercato un prodotto che vanificando quella domanda, renderà la vita più serena a tutti, si intende nella didattica della matematica e della fisica. Mi riferisco a *TI-Nspire*, il nuovo palmares della Texas Instruments, con un software che gira anche su computer, sia col sistema Windows che con Apple. Direbbe felice Orazio: *Hoc erat in votis!*. Infatti col palmares viene fornito il CD contenente lo stesso software da installare sul computer. In un solo pacchetto avremo Derive e Cabri oltre ad una libreria quasi completa, per uno studente universitario, di funzioni e applicazioni statistiche. Nei prossimi numeri di Ipotesi pubblicheremo vari articoli che illustrano le potenzialità di *TI-Nspire* nella convinzione che accontenterà gli appassionati di tecnologie.

Mauro Cerasoli

Comitato scientifico: G. C. Barozzi, P. Boieri, S. Cappuccio, R. Fazio, M. Impedovo, S. Invernizzi, G. Pezzi, G. Torzo.

Pubblicazione realizzata in collaborazione con ADT, Associazione per la Didattica con le Tecnologie
Direttore responsabile: Mauro Cerasoli



Indice

<i>Editoriale</i>	1
T. Bindo, M. Cerasoli, C. Costabile <i>Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica</i>	3
S. Cappuccio <i>Una svolta nella didattica per la matematica</i>	11
C. Di Stefano <i>Le Gare di Matematica con le Tecnologie</i>	14
L. Verardi <i>Un problema proposto alla SSIS</i>	19
A. Giancaspro <i>Misure elettriche di autoinduzione</i>	23
A. Orlandoni <i>Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove</i>	26

Coinvolgimento, divertimento e risultati in un'unica soluzione!

TI-89 Titanium



CBR 2™

CBL 2™/TI-84 Plus



*Vuoi provare in classe le tecnologie e le calcolatrici Texas Instruments? Con il Programma di Prestito gratuito riceverai le calcolatrici grafiche i sensori direttamente presso la tua scuola:
tel: 0280663007; ti-loan@ti.com*

*Desideri seguire un corso di approfondimento sull'uso di queste tecnologie? Gli insegnanti dell'Associazione per la Didattica con le Tecnologie organizzano gratuitamente corsi presso le scuole:
segreteria@adt.it; www.adt.it*

Per offerte speciali riservate a scuole ed insegnanti rivolgiti ai distributori scolastici Texas Instruments:

**MEDIA DIRECT: 0424504650;
www.campustore.it**

**GHISETTI E CORVI: 0276006232;
www.sedes.gpa.it**

education.ti.com/italia

TEXAS INSTRUMENTS
TI Technology – Beyond Numbers

► **Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica**

Tiziana Bindo, Mauro Cerasoli, Carlo Costabile

Perché gli esaminatori pongono le domande ai candidati in maniera così complessa?

Sembra che abbiano paura di farsi comprendere dagli interrogati. Da dove trae origine questa deplorabile abitudine di complicare i problemi con difficoltà inventate?

Evariste Galois, 21 gennaio 1831

Premessa

Sempre più frequentemente gli studenti manifestano un grave disagio nei confronti della matematica; alcune indagini recenti hanno evidenziato che è considerata una scienza astratta, lontana dalle loro esperienze e dai loro interessi, di scarsa o nessuna utilità per la vita di tutti i giorni. “Una montagna fredda e temibile”, troppo difficile da scalare, un’impresa a cui spesso si rinuncia in partenza.

Questo disagio è peraltro confermato dai docenti, che lamentano una crescente difficoltà ad avviare il processo educativo e instaurare un dialogo costruttivo. Gli educatori trovano sempre più difficile ed estenuante interessare e coinvolgere gli allievi in un percorso di apprendimento, tenuto conto dei brevi e rari momenti che i giovani sono disposti a dedicare allo studio “codificato”.

L’esigenza di un rinnovamento nella didattica della matematica è ormai ampiamente condivisa da tutte le componenti della scuola e dell’università. Alle “tradizionali motivazioni” interne alla dinamica didattica, principalmente legate alle difficoltà di apprendimento, si stanno aggiungendo e sovrapponendo nuove e pressanti esigenze provenienti dal mondo esterno.

L’attuale “società della conoscenza” richiede, ad ogni livello, un continuo aggiornamento delle conoscenze e delle competenze individuali. Per affrontare e risolvere problemi e compiti del quotidiano e svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società, non solo è indispensabile saper utilizzare conoscenze ed abilità tradizionali, ma occorre anche utilizzare tecnologie e informazioni moderne.

1. Introduzione

L’esistenza di software di calcolo simbolico e di grafica digitale o di calcolatrici dotate di Computer Algebra System (CAS) modifica ormai radicalmente i contenuti dei corsi di matematica e le modalità d’insegnamento.

Così come più nessuno calcola a mano o con le tavole radici quadrate, o logaritmi o seni, ma con le calcolatrici, analogamente bisogna individuare quegli argomenti di matematica

che sono destinati a fare la stessa fine. Un tempo, la stessa calcolatrice scientifica era vietata all’esame di stato con la motivazione che non tutti gli studenti la possedevano. Oggi, questo divieto vige per quelle dotate di CAS, con la stessa motivazione, sebbene i costi siano scesi al livello della portata di tutti e una calcolatrice costi meno di uno zainetto firmato o di un telefonino. Per non parlare dei computer portatili che ormai quasi ogni studente possiede. Ad esempio (Sessione Suppletiva Esame di Stato LS 2004/2005 PNI) si chiede di calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}$$

Basta scriverlo su una tastiera di computer attrezzato con TI InterActive! (e fra poco anche su TI Nspire) per avere subito la risposta nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[x]{1-x} \right) = e^{-1}$$

o su una calcolatrice CAS, ad esempio la TI-89, per sapere che vale $1/e$. (Risposta 5 nel quiz).

2. Argomenti da eliminare

Per un politico i tagli per la sanità o per la spesa pubblica sono la cosa più difficile da effettuare. Questa dolorosa operazione è necessaria anche per la matematica. Già è troppo tardi per sedersi a un tavolo e mettere in chiaro cosa bisogna eliminare. Prima si fa e meglio è. L’odio per la nostra materia è arrivato a livelli mai visti prima. Il cittadino medio si vanta addirittura di non capire nulla di matematica e afferma orgoglioso di disprezzarla. E pensare che è il miglior prodotto della mente umana. Qualcuno ha scritto infatti: *se Dio esiste, allora deve essere un puro matematico*. Dovremmo, per esempio, smettere di fare:

a) i radicali; nel senso di calcoli inutili con i radicali che non sono serviti mai a niente;

b) i quattro metodi di risoluzione dei sistemi lineari due per due, visto che li risolve il computer in modo automatico anche quando i coefficienti sono numeri del tipo, 3,14159 oppure 2,7182818 oppure 1,7321 e 1936,27 ecc. cioè numeri veri con la virgola e con tante cifre e non quelli inventati come 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3 ecc. che quasi sempre stanno nei sistemi proposti;

c) le formule di trigonometria che venivano usate per applicarvi i logaritmi;

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica continua

d) il calcolo di limiti, derivate, integrali di espressioni artificiosamente e complicate e quindi inutili.

3. Il nuovo da mettere

Alcuni argomenti di matematica discreta come: alberi, grafi, funzioni aritmetiche, geometrie finite ecc. oppure frattali, variabili aleatorie, simulazioni Monte Carlo, teoria dei giochi per fare dei nomi, possono essere inseriti nei programmi. D'altra parte non ci sembra che tali argomenti siano stati trattati e proposti in modo adeguato dagli estensori di *Matematica 2003 - La matematica per il cittadino*, di recente pubblicazione inneggiante con enfasi alla novità.

A titolo esemplificativo la seguente tabella riporta le analisi mediche effettuate da un paziente negli ultimi anni:

Anni	Col	LDL	GGT	T	G	A
1985	201	135		92	90	
1991			56			
1992	273		61	125	113	
1997	263		70	153	82	24
2000	261		148	252	94	
2001	274		122	168		58
2002	244		143	180	86	
2004	252			121	98	55
2005	244	175	105	151	88	45

Eliminati la prima riga e la prima colonna si ottiene la nuova tabella:

135		92	90		
	56				
273	61	125	113		
263	70	153	82	24	
261	148	252	94		
274	122	168		58	
244	143	180	86		
252	121	98	55		
244	175	105	151	88	45

Questa tabella è una matrice? No, perché ci sono delle caselle prive di numeri: sono i casi in cui non sono stati rilevati dati al paziente. Allora che cosa è da un punto vista matematico tale tabella? Gli autori di questa nota non lo sanno. A cosa servono le matrici se si hanno tabelle come questa prive di significato matematico?

Visto che negli ultimi tempi sta furoreggiando il gioco del Sudoku, qual è la matematica necessaria per vincere? In quale programma ministeriale è svolta?

La disciplina che doveva essere una delle maggiori novità nella nuova didattica della Matematica, sia per le sue innumerevoli applicazioni che per l'importanza che riveste nell'educazione civica del cittadino (perché lo educa al dubbio e lo tiene fuori dai fondamentalismi e dalle certezze assolute), la Probabilità, è poco insegnata. E ciò rattrista l'animo perché il metodo Monte Carlo è stato una delle prime applicazioni delle *nuove tecnologie* ed è oggi uno dei maggiori motivi per cui si usa il computer, nei dipartimenti scientifici e non, delle università di tutto il mondo.

Steven Strogatz, docente di Matematica Applicata alla Cornell University, nel 2004 ha scritto per il New York Times un articolo dedicato alle grandi scoperte scientifiche di cinquanta anni fa. Si legge tra l'altro: "Il vero eroe scientifico del 1953 fu Enrico Fermi. Quella del DNA non fu la sola a cambiare il corso della storia. Un'altra scoperta, quella degli esperimenti col computer, o simulazioni al computer come si dice oggi, fu altrettanto importante. [...] Fermi non va ricordato soltanto come lo scopritore dell'atomo, ma anche come l'uomo che trasformò il computer *nel telescopio della mente*". Nell'ultimo mezzo secolo, scrive ancora Strogatz, la via da lui aperta ci ha aiutato a vedere l'invisibile e a immaginare l'inimmaginabile.

Ma da noi è ancora poco noto il metodo Monte Carlo, quando esso è un modo di pensare che sta facendo fuori buona parte della matematica classica nel senso di renderla obsoleta o semplicemente inutile. Questo però è un discorso che va approfondito e chiarito in altra sede.

4. A proposito di Storia della Matematica

Per qualcuno la novità potrebbe consistere nell'inserimento di argomenti di *Storia della Matematica*. Ben venga la storia purché si tratti di storia pertinente, cioè, quegli episodi che contribuiscono alla comprensione e all'approfondimento di concetti di matematica. Vanno bandite, invece, le notizie che si riferiscono e riguardano fatti personali o secondari e privi di contenuto matematico. Ad esempio bisogna evitare di parlare di Pitagora che non gradiva le fave, tralasciando il suo teorema e le applicazioni. Ugualmente si dica pure di Galois, accanito repubblicano, che morì in duello a 21 anni a patto che prima si sia spiegato bene che cosa è un gruppo e che Galois sia stato il primo a introdurre tale concetto, precedendo Ruffini e Abel. Ugualmente ci interessa poco sapere della famiglia di Hilbert, se aveva figli maschi o fem-

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica

continua

mine e quanti o che morì cadendo dal tram: a noi interessa sapere se David ha risolto o no definitivamente il problema fondamentale degli invarianti nella teoria delle forme quadratiche binarie.

Così lasciamo pure pubblicare a Novella 2000 e a programmi televisivi dello stesso genere fatti ed aneddoti di matematici senza attinenza con enti e concetti di matematica.

Siamo, ovviamente, favorevoli ad aneddoti e storielle come i problemi di Delo e di Didone o i ponti di Konisberg di Eulero o il primo problema risolto da Gauss bambino, perché possono servire a dare un volto più umano alla Matematica.

Come scriveva il Manzoni: *adelante Pedro i con judicio*. Altrimenti facciamo come quei letterati che parlano di Giulio Cesare, di quando è nato e quando è morto, che una delle quattro mogli si chiamava Calpurnia e la figlia Giulia, senza aver mai letto una riga del *De Bello Gallico*.

Per un maggiore approfondimento sui pericoli insiti in un cattivo insegnamento della Storia della Matematica, spesso confusa con la storia della matematica greca, si rimanda al capitolo *Una cattiva lettura della storia della matematica* che appare a pag. 93 del volume *Pensieri Discreti* di Gian Carlo Rota, edito da Garzanti nel 1993.

5. Il dramma della pedagogia invasiva

Negli ultimi anni si è spostato un po' troppo l'accento sul piano delle cosiddette *scienze dell'educazione* a scapito dei contenuti. Non c'è alcun dubbio sul fatto che l'insegnante nella scuola di oggi abbia bisogno, in misura molto maggiore dell'insegnante nella scuola di un tempo, di conoscenze che vanno al di là della materia che insegna e in particolare di fondamenti di psicologia e pedagogia, ma questo non deve voler dire abdicare al piano dei contenuti o peggio infiocchettarlo con qualche nozione pedagogica. Piuttosto si dovrebbe cercare, nelle sedi opportune, un rapporto proficuo con gli studiosi di Scienze dell'Educazione, in modo che ognuno porti le competenze che gli sono proprie nel processo di formazione degli insegnanti, senza indebite deleghe dall'una e dall'altra parte.

Tornando ai contenuti e cercando di esplicitare cosa possa voler dire "spostare l'accento sui contenuti", sono tre i punti su cui articolare un intervento su questi problemi.

Il primo è uno sforzo teorico, che vada nella direzione di identificare i nuclei fondanti irrinunciabili nell'insegnamento preuniversitario, non con lo scopo di *diminuire* il sapere matematico che si chiede alla scuola di trasmettere ai ragazzi, ma con lo scopo di lasciare il massimo spazio *alla libertà individuale*

dell'insegnante per quel che riguarda le possibili, diverse, aggiunte rispetto a un sapere minimale.

È inutile ossessionare gli insegnanti con l'idea che sia assolutamente necessario trattare trecento argomenti, quando tutti sappiamo che di questi trecento ce ne saranno sì e no tre o quattro che si possono dare per effettivamente acquisiti al termine della scuola e che, per quelli che continuano gli studi nei corsi di laurea delle Facoltà Scientifiche, già la vita sarebbe più facile se i concetti acquisiti fossero una decina, magari insieme a un po' di idee chiare sul significato del fare matematica.

Cerchiamo quindi di trovare la maniera per lasciare agli insegnanti sufficiente tranquillità per operare dei tagli e viceversa anche sufficiente spazio per approfondire alcuni argomenti sulla base della semplice motivazione che a loro piacciono di più di altri, o per cogliere e sfruttare le occasioni che di volta in volta si presentano e che, per essere sviluppate, richiedono del tempo e quindi dei tagli su altri fronti.

Dopotutto tutti noi sappiamo, più dalla nostra esperienza di studenti che da quella di insegnanti, che è facilissimo distinguere se un insegnante tratta un argomento che gli piace o no: se un insegnante non si sente sicuro di ciò che insegna, o non ama quello che insegna continuerà a non essere sicuro e a trasmettere insicurezza e a non divertirsi e quindi a trasmettere indifferenza o repulsione.

Il primo *comandamento* del *decalogo* di Polya per l'insegnante è proprio "*abbi interesse per la tua materia*" e purtroppo, non è affatto facile per un insegnante tenere fede a questo "comandamento" nel dilagare di impegni e coinvolgimenti su mille fronti che la scuola di oggi richiede.

Venendo al secondo punto, c'è bisogno anche di idee, di spunti, di problemi. Di problemi intelligenti, cioè. Riprendendo una definizione di Vittorio Checcucci "ricchi di interrelazioni con idee significative"; problemi che generino altri problemi, e che stimolino la fantasia di chi impara e anche di chi insegna; che forzino la persona a pensare, a discutere, a fare dei collegamenti.

Problemi e situazioni ricchi di spunti che diano la possibilità di fare matematica in modo attivo: fare degli esperimenti, intravedere un filo comune nei risultati di questi esperimenti, formulare delle congetture, cercare di giustificare queste congetture, provare l'entusiasmo della "scoperta". E fare anche degli errori, perché l'errore è uno stadio e una tappa naturale per impadronirsi di un concetto: ma avendo un retroterra nell'ambiente circostante e una sicurezza di fondo da parte dell'insegnante, che permetta di non esorcizzare e nascondere

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica continua

l'errore, ma di farne uno strumento di crescita collettiva, analizzandone l'origine e le cause.

Insomma una sorta di laboratorio, non necessariamente identificato come un luogo fisico, ma piuttosto come un modo di porsi di fronte al processo di apprendimento/insegnamento. Non è certo una scoperta di oggi il fatto che l'apprendimento, per essere reale, debba essere attivo: basta ricordare i bellissimi libri di Polya, gli scritti di Freudenthal e, per chi l'ha vissuta, l'esperienza della *palazzina* a Pisa nei primi anni '70. La *palazzina* era un luogo, voluto da Checcucci, con l'idea che potesse essere un punto di raccolta per persone diverse (studenti, insegnanti di diversi livelli scolastici) accomunate dal desiderio di imparare e insegnare la matematica. Una delle convinzioni sottostanti a quel tentativo era proprio il fatto che qualunque discussione o ripensamento sull'insegnamento non dovesse essere confinato nel "segmento" scolastico a cui si riferiva, ma non potesse che avvantaggiarsi dalla comunicazione con altri contesti. L'idea era quella di coagulare in un luogo una raccolta di testi, di modelli, di oggetti ricchi di contenuti matematici ed efficacemente utilizzabili, possibilmente a livelli diversi e da interlocutori diversi, senza nulla togliere alle potenzialità di fantasia e di "riscoverta" e anche, insieme, che fosse un luogo dove fosse piacevole andare.

Infine l'ultimo punto è quello dell'uso intelligente delle tecnologie che consente di privilegiare i contenuti e le idee portanti rispetto ad un insegnamento volto all'apprendimento di formule e regole di calcolo lasciando l'esecuzione dei calcoli alle macchine. I mondi artificiali, capaci di simulare la realtà con le sue leggi e le sue regole, rappresentano piacevoli opportunità per coinvolgere gli studenti riportando l'apprendimento nella sua dimensione naturale: quella dell'esplorazione ludica. La conoscenza scientifica è un grande gioco con la realtà, tra quella parte di essa che si pensa di conoscere e quella parte che invece sfugge alla comprensione, nel tentativo di rappresentarla entro schemi e modelli rappresentativi creati dalla mente. In tutti i campi della scienza il gioco gode ormai di una considerazione assai elevata, ben superiore a quella riconosciutagli dalla scuola, dove rimane tollerato come momento episodico di scarico delle tensioni, senza possibilità di confondersi con le attività "serie". Nel campo delle tecnologie informatiche il gioco diviene vero e proprio laboratorio di ricerca, in quanto il calcolatore offre enormi possibilità di sviluppo della dimensione ludico-virtuale.

Creatività è sinonimo di *pensiero divergente*, cioè capace di rompere continuamente gli schemi dell'esperienza. E' creativa una mente sempre al lavoro, sempre a far domande, a scoprire problemi dove gli altri trovano risposte soddisfacenti, a

suo agio nelle situazioni fluide nelle quali gli altri fiutano solo pericoli, capace di giudizi autonomi e indipendenti (anche dal padre, dal professore, dalla società), che rifiuta il codificato, che rimani oggetti e concetti senza lasciarsi inibire dai conformismi. Tutte queste qualità si manifestano nel processo creativo. E questo processo ha un carattere giocoso: sempre, anche se sono in ballo le "matematiche severe"...

6. Procedere per problemi concreti

Uno dei rompicapi spesso utilizzati per mettere in difficoltà qualche amico è il seguente:

un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?

La maggior parte delle persone intelligenti ha risposto: un chilo e mezzo. Dopo anni di liceo, pochi sanno scrivere l'equazione

$$x = 1 + x/2$$

che è il *modello matematico* adatto a risolvere il problema. La soluzione $x = 2$ è immediata. Si può fare a mano. Purtroppo nella realtà, un mattone non pesa esattamente 2 chili, ovvero le equazioni non hanno coefficienti come 1 e 2. Anche questo indovinello è inventato: artefatto. Quando l'equazione è

$$234,5678x = 119,4957 + x/2294,1897$$

ricorrere a una calcolatrice è inevitabile. Resta però il fatto che è inutile insegnare matematica pura se non si danno sempre problemi concreti. Vogliamo dare un esempio di nuova didattica della matematica riportando l'intervento *Sui sistemi lineari 2 per 2* presentato da Mauro Cerasoli e Anna Cerasoli a Otranto nel 2° Incontro ADT-Mathesis del settembre 2005 sul tema *La Matematica è la più odiata dagli italiani! Come farla amare?*.

a. Considerazioni generali

Sfogliando uno dei testi di algebra più usati nel biennio del liceo scientifico (comprese le classi PNI), ci siamo imbattuti in una grande quantità di pagine che l'amabile docente, protagonista del film *L'attimo fuggente*, non avrebbe esitato a strappare con gesto plateale, se al posto della letteratura, avesse dovuto insegnare la matematica su quel testo. Tra l'interminabile sfilza di formule e calcoli, assolutamente privi di riferimento a qualunque tipo di problema, spiccava, per astrattezza, ripetitività e autoreferenzialità, l'argomento *I sistemi lineari*.

Ad esso il testo dedica 35 pagine di teoria, 42 di esercizi e 6

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica

continua

di problemi; di questi ultimi, soltanto 7 sono problemi di tipo reale. Dunque, un'apoteosi di teoria e calcoli su cui lo studente è inchiodato per numerose lezioni! Più che in altri casi, su questo tema, è stridente il contrasto tra la *potenza* dello strumento matematico e la *noia* infinita che può ingenerare la ricerca della soluzione di un sistema con l'uso di tutti i metodi: sostituzione, riduzione, confronto e Cramer.

Il modo in cui vengono trattati i sistemi lineari è emblematico di come nella scuola *si sostituisce lo studio cavilloso dello strumento matematico al suo concreto utilizzo per risolvere problemi*. È come se a uno studente di chirurgia si insegnasse tutto sulla fabbricazione del bisturi, trascurando, però, di insegnargliene l'uso. Ma, il fine dell'insegnamento della matematica non dovrebbe essere proprio la risoluzione di problemi?

Il risolvere problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare il piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica [...] se desiderate imparare a nuotare, dovete gettarvi in acqua e se desiderate diventare un risolutore di problemi, dovete risolvere problemi.

(*La scoperta matematica*, George Polya, 1961, Feltrinelli).

Nella didattica tradizionale, i sistemi lineari vengono solitamente trattati seguendo questo schema:

- definizione di sistema
- esempio con numeri interi
- metodi di soluzione (sostituzione, confronto, riduzione, Cramer e determinanti)
- studio di sistemi possibili, impossibili e indeterminati
- risoluzione grafica
- verifica del sistema
- sistemi 3x3 (regola di Sarrus)
- esercizi.

Riteniamo che il tempo impiegato e le energie impegnate da parte dello studente sono sproporzionate rispetto alla effettiva competenza che lo stesso può acquisire con tale approccio. Sempre che non si sia perso strada facendo! Bisogna tenere presente, infatti, che i problemi reali, quelli che incontrerà nel proprio lavoro un futuro matematico o economista o fisico, solo molto raramente presentano numeri interi come negli esercizi del libro. I numeri che si incontrano nella realtà sono

1936,27 ... 9,8 ... 3,14 ...

1,4142... 2,718 ... 0,618 ... 1,732...

ed inoltre il numero di equazioni di un sistema è quasi sempre superiore a tre. È impensabile, quindi, far a meno del computer.

Per questi motivi, proponiamo un diverso approccio all'argomento:

- *analisi di un problema concreto*
- *traduzione del problema in sistema*
- *risoluzione con il computer*
- *discussione del risultato*
- *visualizzazione grafica*
- *generalizzazione*
- *esercizi su risoluzione di problemi.*

b. Un problema per esempio

Dovendo preparare una cena tra amici, acquisto sei bottiglie di birra e quattro di vino, pagando 40,1 euro. Alla stessa cena arriva il mio amico Carlo, con due bottiglie di birra e sette di vino, della stessa marca e acquistate nello stesso supermercato, pagando 46,8 euro.

Poco dopo arriva anche Luigi con cinque bottiglie dello stesso vino acquistato in super-offerta presso una enoteca, a sei euro ciascuna. Luigi sostiene che si tratta di un vero affare e invita gli amici a rifornirsi di vino presso quella enoteca. Conviene seguire il consiglio di Luigi?

Per sapere quanto costano le bottiglie di birra e di vino indichiamo con x il prezzo di una di birra e con y il prezzo di una di vino. Queste incognite devono soddisfare *simultaneamente* le equazioni

$$6x + 4y = 40,1$$

$$2x + 7y = 46,8$$

Per sapere quanto valgono x e y usiamo *TI-InterActive!* per mezzo dell'istruzione:

`simult([6,4;2,7],[40.1;46.8]).`

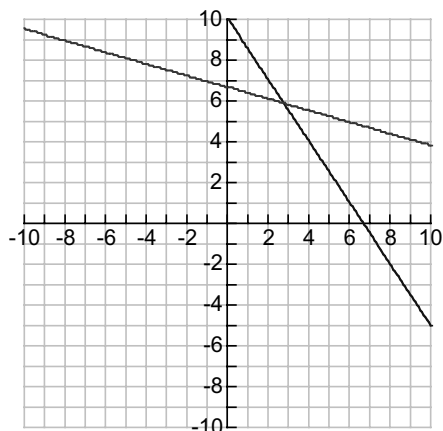
Quando si preme ENTER appare la schermata

$$\text{simult} \left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40.1 \\ 46.8 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 5.9 \end{bmatrix}$$

Così una bottiglia di birra costa 2,75 euro e una di vino costa 5,9 euro. Non conviene seguire il consiglio di Luigi.

Si può avere anche una visualizzazione grafica del problema:

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica continua



Modifichiamo il problema nel modo seguente.

Se Carlo avesse acquistato tre bottiglie di birra e due di vino, pagando 20,05 euro, avremmo potuto ricavare dai nostri dati il prezzo delle singole bottiglie di birra e vino?

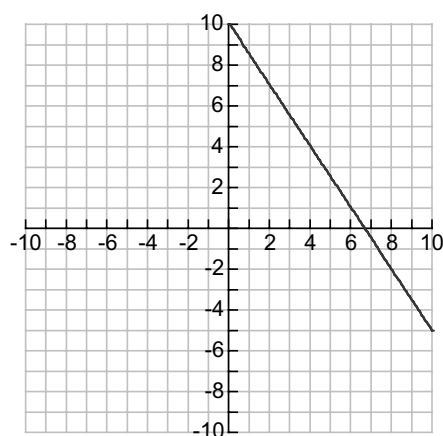
Riscriviamo l'istruzione, ma questa volta il computer ci segnala un errore:

$$\text{simult} \left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40.1 \\ 20.05 \end{bmatrix} \right)$$

EVAL ERROR : Singular matrix

Non è possibile determinare la soluzione del sistema. Infatti, in questo caso i dati forniti da Carlo non costituiscono una ulteriore informazione rispetto alla mia. Avremmo potuto dedurre i suoi dati dai miei, senza nemmeno recarci al supermercato!

La visualizzazione grafica ci conferma che siamo in possesso di una e non due informazioni.



Modifichiamo ulteriormente il problema.

Carlo ha acquistato tre bottiglie di birra e due di vino e ricorda di aver pagato 25 euro.

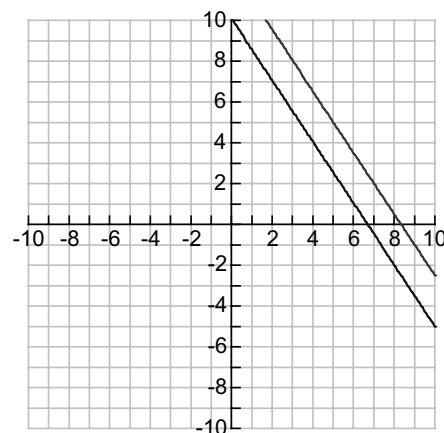
Scriviamo nuovamente l'istruzione, ma anche in questo caso il computer ci segnala errore.

$$\text{simult} \left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40.1 \\ 25 \end{bmatrix} \right)$$

EVAL ERROR : Singular matrix

Non è possibile trovare la soluzione: la seconda informazione contraddice la prima. Carlo non ricorda bene, oppure ha dimenticato di prendere il resto.

Il grafico ci chiarisce la natura di questo sistema.



A questo punto risulta facile, dopo una discussione sui risultati ottenuti, una generalizzazione del problema.

c. Commento finale

La risoluzione di sistemi con carta e penna, e una eventuale calcolatrice per i calcoli elementari, comporta elevato rischio di errore e impiego di molto tempo. Né, d'altra parte, nessuno dei quattro algoritmi di risoluzione, ha elevata valenza culturale: si tratta sempre di applicare in maniera automatica e ripetitiva alcune operazioni elementari.

Pertanto, ci sembra inderogabile l'uso del computer nell'insegnamento dei sistemi lineari. La domanda da porsi a questo punto è: quale parte della teoria è ancora necessaria? Cosa vuol dire *singular matrix*? Si noti che non è mai stata usata l'espressione *sistemi lineari*.

Riflessioni per una nuova Didattica della Matematica

continua

7. Internet e wikipedia

In tutti i discorsi fatti non può mancare il riferimento obbligato a Internet ed in particolare a siti che, gratuitamente, forniscono materiale matematico, come l'enciclopedia in rete

www.it.wikipedia.org

Ad esempio, per sapere qualcosa sul *calcolo umbrale*, basta andare sul sito:

it.wikipedia.org/wiki/calcoloumbrale.

Analogamente, navigando con

it.wikipedia.org/wiki/successionediFibonacci

si ottengono tante informazioni sui numeri di Fibonacci difficilmente reperibili sui libri.

Wikipedia è uno dei tanti siti dove trovare materiale matematico. Più in generale, sul motore di ricerca *Google*, digitando in inglese termini matematici, ad esempio *Fibonacci numbers*, si trovano tanti siti che trattano l'argomento. In tal caso è necessaria una buona conoscenza della lingua inglese. Un campo affascinante di ricerca in rete è quello relativo ai frattali.

Altri siti interessanti sono

www.cut-the-knot.org

dove, ad esempio, consigliamo di leggere tante belle cose sul Monty Hall Dilemma o Paradosso delle tre scatole nella Teoria delle Probabilità e

mathworld.wolfram.com

valido più per studenti universitari e appassionati del software Mathematica.

In questo ambito il MPI sta promuovendo progetti per l'uso della rete nella didattica quotidiana soprattutto per la Matematica, partendo dalla constatazione che le nuove tecnologie dell'informazione hanno modificato il modo di interagire, conoscere e comunicare. I giovani di oggi crescono in questa realtà: giocano, imparano e parlano usando il linguaggio digitale.

In un campione di scuole medie di primo e secondo grado è in atto la sperimentazione di nuove forme di insegnamento innovativo per l'italiano e la matematica.

Le classi coinvolte nella sperimentazione sono dotate di computer portatili collegati ad Internet, di lavagne multimediali e di videoproiettori. I docenti, opportunamente formati e coadiuvati da tutor, potranno scegliere durante l'anno scolastico un numero predefinito di 'Learning Object', disponibili in una Libreria virtuale Nazionale (Marketplace) all'interno di una piattaforma sulla rete.

I 'Learning Object' sono applicazioni didattiche digitali di piccole dimensioni e durata, flessibili e utilizzabili in modo autonomo dal docente per integrare le attività didattiche tradizionali.

Le tecnologie hardware saranno offerte alle scuole insieme a un'adeguata formazione per il personale docente sull'utilizzo dei computer e sulle possibilità che le tecnologie offrono per arricchire il processo didattico; i computer non saranno destinati solo alle apposite aule informatiche, ma sarà data la possibilità di utilizzo delle tecnologie nella classe e in orari extrascolastici.

8. La prova d'esame

L'attuale Esame di Stato riserva alla matematica un ruolo secondario in quanto è oggetto della seconda prova scritta solo nei licei scientifici, compare con altre discipline nella terza prova e occupa uno spazio ridottissimo nel colloquio. Peralto dove è oggetto di prova scritta, con i divieti d'uso delle calcolatrici programmabili, è anacronistica. Sono state fatte varie proposte di modifica ma tutte cadute nel vuoto, vuoi per volontà del MPI, vuoi per l'indifferenza dei docenti i quali, viste alcune statistiche, preferiscono in larga misura che la prova resti così come è. Contenti loro, contenti tutti. Ecco le statistiche sull'argomento.

Esame di Stato 2004

I risultati dell'indagine sulla prova scritta di matematica nei licei scientifici.

(Elaborati dagli Ispettori Tecnici Emilio Ambrisi, Annamaria Gilberti ed Antonino Giambò)

L'ultimo punto che l'indagine si riprometteva di mettere in luce riguarda il parere delle Commissioni circa *l'uso o meno di strumenti di calcolo automatico in sede d'esame*.

Si è fatto un gran parlare, negli ultimi 7-8 anni, circa la possibilità di consentire negli esami di Stato l'uso di una calcolatrice programmabile e grafica; alcuni davano addirittura ad intendere che su questo ormai fossero d'accordo tutti i docenti di matematica. Ebbene, le risultanze dell'indagine sono chiarissime: più di 4 Commissioni su 5 continuano a privilegiare una calcolatrice scientifica, purché però non sia grafica o programmabile; addirittura il 6% delle Commissioni ritiene che non dovrebbe essere consentito l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico in sede d'esame. Solo una Commissione su dieci è favorevole all'uso di una calcolatrice programmabile e grafica. Tutto questo quando in Europa la situazione è esattamente all'opposto.

TIZIANA BINDO, tibind@tin.it

MAURO CERASOLI, mauro.cerasoli@alice.it

CARLO COSTABILE, c.costabile@unical.it

Il Liceo Scientifico *Giovanni da Procida* di Salerno con il patrocinio di



organizza il **Convegno Nazionale**

Modelli e Tecnologie per la Nuova Didattica della Matematica

Mercoledì 11 aprile 2007

Salerno, Salone di Rappresentanza della Provincia, via Roma, 104

- 14:30 Iscrizioni al Convegno, 15:00 Saluti di benvenuto autorità
 15:30 *Pierre Brzakala* (Isp. Ministero Istr. Belgio c/o Scuole Europee –Resp. Matematica)
L'uso delle calcolatrici nelle scuole europee: implicazioni in classe, agli esami e nel baccalauréat
 16:20 *Anna Cerasoli* (Scrittrice) *Insegnare la matematica raccontando*
 16:50 Intervallo, 17:10 *Gioconda Bottiglieri* (U Salerno)
La didattica della matematica nella scuola primaria con le nuove tecnologie
 17:40 *Linda Giannini* (IC don Milani, Latina) *I numeri dell'infanzia*
 18:20-19:00 *Domenico Lenzi* (U Lecce) *Matematica vecchia e nuova: quale contrasto, quali difficoltà?*

Giovedì 12 aprile 2007, Positano, Hotel Pupetto

- 15:00 *Carlo Cattani* (U Salerno) *Le nuove frontiere della matematica sperimentale*
 16.00 *Roberto Cordeschi* (U Roma 1) *La Drosophila dell'Intelligenza Artificiale: scacchi e altri giochi*
 17:00 Intervallo
 17:30 *Domenico Cariello, Clementina D'Amico, M. Grazia Rubino* (LS da Procida -Salerno)
Ricerca-azione e CAS per l'eccellenza e contro la dispersione scolastica
 18:15-19:00 *Annarosa Serpe* (U Calabria) *Matematica e informatica con un gioco di fiammiferi*
 21:00 Proiezione dell'intervista di *Cesare Chiericati* a *Gian Carlo Rota* per la RTSI (1-6-1989)

Venerdì 13 aprile 2007

- 9:00 *Elvira Russo* (U Napoli), *Marisa Brunella Mastroianni* (SICSI)
Un progetto di e-learning per la scuola: formazione docenti e supporto all'apprendimento degli studenti
 10:00 *Domenico Senato* (U Basilicata) *Le idee fondamentali della matematica discreta*
 11:00 Intervallo
 11:30 *Mauro Cerasoli* (U L'Aquila) *La nuova matematica da portare in classe*
 12:30 *Antonio Scafuro* (LS Roccapiemonte), *R. Chiumento* (ICT Salerno) *Le leggi della dinamica*
 13:00 Intervallo
 15:00 *Francesco D. P. Bruno* (LS Castellamare di Stabia) *Grigliata di segmenti e curve alla Buffon-Barbier*
 15:30 *Ulderico Dardano* (U Napoli) *La matematica nella SICSI*
 16.30 *Renata Santarossa* (LC Sorrento)
La costruzione delle conoscenze matematiche: unità di apprendimento per la scuola di 2° grado
 17:00 Intervallo
 17:30 *Giangiaco Gerla* (U Salerno) *Macchine e materiali poveri per la logica matematica*
 18.30-19:00 *Vincenza Russo* *Tecnologia e matematica: un'esperienza didattica*, 20:30 *Serata di gala*

Sabato 14 aprile 2007

- 9:00 *Marcello Pedone* (LS Lecce) *Luoghi geometrici con Cabri II Plus*
 9:20 *Eugenio Mercuri* (LS Lamezia Terme) *I nuovi software per insegnare la matematica*
 10:00 *Rocco Fazio* (LS Gioia del Colle) *TI-nspire CAS: sistema integrato per studiare la matematica*
 11:00 Intervallo
 11:20 *Domenica Di Sorbo* (MPI) *La matematica nei blog*
 11:45 *Tiziana Bindo* (MPI) *Come imparare la matematica navigando in rete*
 12:10-13:00 *Mario Fierli* (MPI) *Il posto delle tecnologie nei nuovi curricoli*

L'iscrizione avviene durante il convegno. A causa del numero limitato di posti disponibili, si darà la precedenza per l'accesso nella sala all'Hotel Pupetto a chi effettua prima l'iscrizione all'indirizzo convegnomat@liceodaprocida.net. Ai partecipanti è richiesto un contributo di 40€ per le spese di organizzazione (30€ per i soci ADT e per gli iscritti alla SICSI). ADT rilascerà un attestato di aggiornamento in base alla CM 376, prot. 15218, del 23-12-1995 e successive modifiche. Onde partecipare al Convegno, il MPI concede l'esonero dal servizio per insegnanti di ogni ordine e grado, per il personale direttivo e ispettivo. Alla fine dei lavori saranno sorteggiati calcolatrici e software da donare ai convegnisti presenti in sala.

Comitato Organizzatore

Mauro Cerasoli (Direttore Scientifico), *Nicola Scarsi* (DS Liceo Scientifico G. da Procida, Salerno), *Domenico Cariello* (Coordinatore), *Clementina D'Amico, Maria Grazia Rubino, Emilio Polverino, Eugenio Mercuri* (Segretario ADT). Info: 3404178468, mauro.cerasoli@alice.it.

► Una svolta negli strumenti didattici per la Matematica

Sebastiano Cappuccio

Da oltre venti anni, (il Piano Nazionale Informatica è stato varato nel 1986), l'informatica è entrata ufficialmente nei curricula di matematica sia come oggetto di studio sia soprattutto come strumento per la didattica.

In questi anni alcune tipologie di software si sono affermate per la loro importanza e utilità nella didattica:

- i sistemi di elaborazione simbolica (CAS), che permettono allo studente, ad esempio, di tracciare e modificare grafici di funzioni, di concentrarsi sugli aspetti concettuali delle questioni che stanno affrontando, riducendo al minimo il peso del calcolo;
- i sistemi di geometria dinamica che permettono, tra l'altro, di costruire figure geometriche e di modificarle attraverso il trascinamento mantenendo le relazioni tra gli oggetti attraverso le quali sono state definite;
- un linguaggio di programmazione, per dare concretezza agli aspetti algoritmici della matematica;
- il foglio elettronico, indispensabile, ad esempio, per memorizzare e rappresentare dati o per eseguire calcoli statistici.

In ogni caso questi software sono particolarmente utili per favorire e sviluppare le attività di esplorazione e osservazione, di formulazione di congetture e di validazione o confutazione di queste, affidando allo studente un ruolo che non è più di passivo spettatore, ma di attore protagonista del proprio processo formativo.

Le più recenti tendenze della Didattica si rivolgono verso attività "volte alla costruzione di significati di oggetti matematici" (Matematica 2003) e verso strumenti che favoriscono una varietà di approcci alla formazione dei concetti attraverso diversi registri come il numerico, il visuale, l'algebrico simbolico ecc.

Dal punto di vista tecnologico e operativo un grosso passo avanti avvenne circa dieci anni or sono quando uscirono le prime calcolatrici grafiche e simboliche (le "mitiche" TI-92) che racchiudevano in un unico "guscio" proprio un programma di CAS, un linguaggio di programmazione, un programma di geometria dinamica e un piccolo foglio elettronico.

La calcolatrici si fecero subito apprezzare per le loro capacità e per la comodità di utilizzo in classe, proponendosi come valida alternativa al computer rispetto al quale, con l'unico svantaggio delle piccole dimensioni dello schermo, presentano l'utilissima caratteristica di essere utilizzabili in qualsiasi momento e in qualsiasi luogo, svincolate dalle rigidità di orario e dalla disponibilità di aule attrezzate.

Ora si sta affacciando all'orizzonte un nuovo sistema che costituisce un grande balzo in avanti: TI-Nspire (v. Fig. 1). La sua parola d'ordine è *integrazione*.

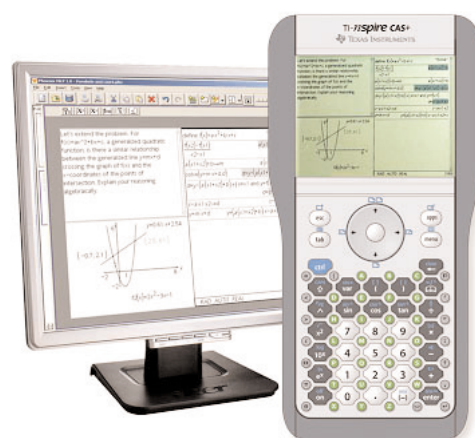


Fig. 1

Integrazione nell'hardware

Esiste una completa integrazione tra computer e calcolatrice (anzi, nel lessico di TI-Nspire, *Palmare*): lo stesso software "gira" sia sul palmare che sul computer e, pur nella totale indipendenza dei palmari, in futuro sarà possibile gestire una rete locale tra i palmari degli studenti attraverso il computer dell'insegnante.

I file dell'uno lavorano anche sull'altro e viceversa, con una interfaccia utente praticamente identica e con l'unica ovvia differenza delle dimensioni dello schermo del palmare (v. Fig. 2 e Fig. 3); comunque anche nella pagina grafica del palmare le dimensioni dell'area di lavoro utile sono molto superiori a quelle dello schermo e è possibile far scorrere le immagini in tutte le direzioni utilizzando così un'area di lavoro reale molto più estesa di quella visibile.

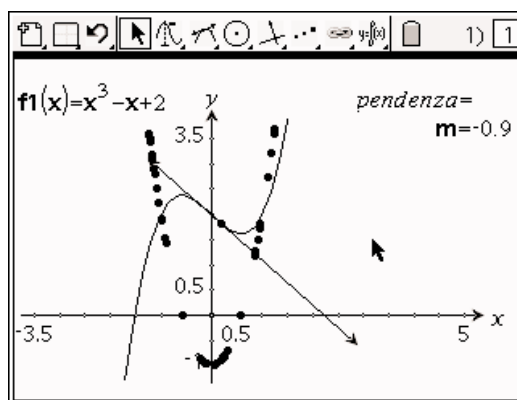


Fig. 2

Una svolta negli strumenti didattici per la Matematica

continua

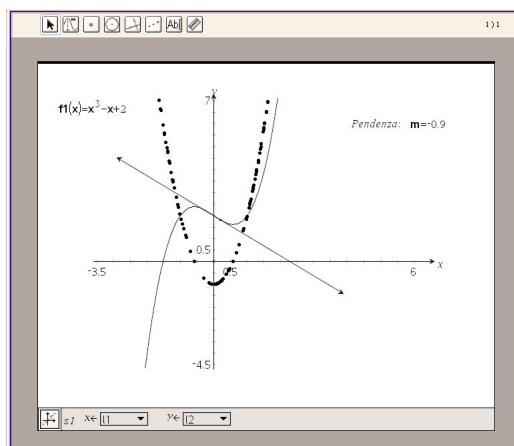


Fig. 3

Integrazione nel software

Il fatto più innovativo del sistema TI-Nspire è che tutti i software citati all'inizio di questo articolo non solo sono presenti nel sistema, ma sono sostanzialmente un unico software che si articola su diversi ambienti.

Immaginate ad esempio di tracciare il grafico di una funzione inserendo la sua equazione, poi di tracciare la retta tangente al grafico in un suo punto, poi ancora di trascinare con il mouse il punto di tangenza (e la corrispondente retta tangente) lungo il grafico e magari contemporaneamente "registrare" nel corso del trascinamento i valori della sua pendenza nel foglio elettronico, quindi successivamente rielaborare questi valori e rappresentare anch'essi graficamente. Si tratta dell'esempio mostrato nelle Figg. 2 e 3 (mostrate rispettivamente come appaiono sul palmare e su computer).

L'ambiente Calcolatrice

In questo ambiente è possibile eseguire calcoli numerici e simbolici, definire funzioni, manipolare espressioni algebriche (Fig. 4) e in generale eseguire tutti i calcoli che già da tempo siamo abituati a vedere nei Computer Algebra System.

In questo ambiente si possono anche definire funzioni utilizzando un linguaggio di programmazione dotato di tutte le principali strutture di controllo. Nelle Figg. 5 e 6 un esempio: l'arcinoto algoritmo euclideo del Massimo Comune Divisore tra due interi, anche se naturalmente esiste già la funzione predefinita GCD(a, b).

Il "Catalog" è particolarmente ricco, vantando oltre 200 tra funzioni e operatori, che interessano tutti gli argomenti studiati nella scuola secondaria: dall'algebra all'analisi matematica, dalla statistica alla logica.

Infine anche l'editing è particolarmente sofisticato, grazie a

ampie "tavolozze" e modelli per la costruzione di simboli ed espressioni.

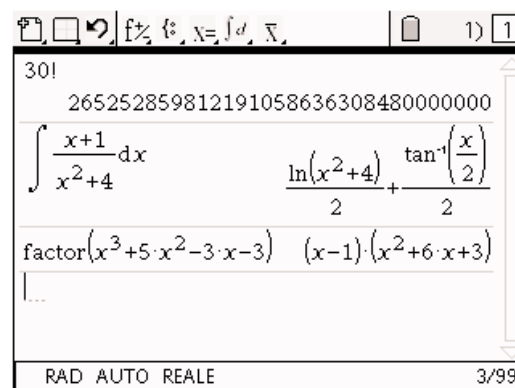


Fig. 4

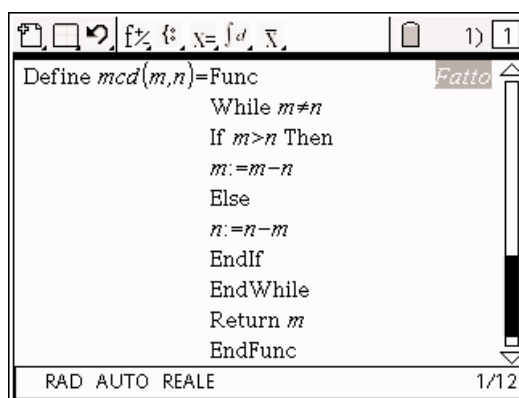


Fig. 5

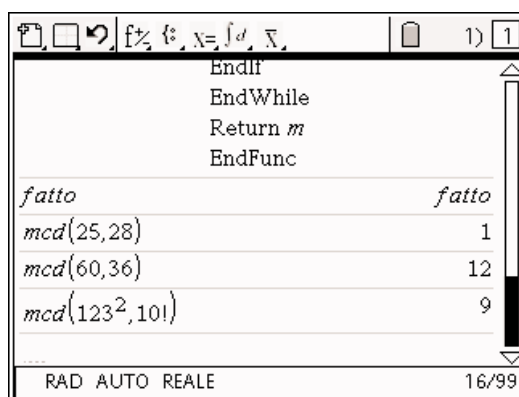


Fig. 6

Una svolta negli strumenti didattici per la Matematica

continua

L'ambiente Grafici e geometria

In questo ambiente si possono tracciare grafici di funzioni, definire oggetti geometrici, eseguire costruzioni in modo dinamico, fare animazioni,...

Le caratteristiche fondamentali dei software di geometria dinamica (costruzione di figure, trascinamento di oggetti, costruzione di luoghi ecc.) e di grafica tipiche dei CAS (grafici di funzioni, grafici in forma parametrica, rappresentazione di insiemi di punti ecc.) sono tutte presenti in unico ambiente.

In Fig. 7 è mostrato un esempio: il luogo dei punti medi del segmento che ha per estremi l'origine del sistema di riferimento e un punto mobile lungo una circonferenza di centro C. In questo esempio tutti gli oggetti collegati alla circonferenza, compresa la sua equazione, si modificano in tempo reale trascinandone il centro o modificandone il raggio.

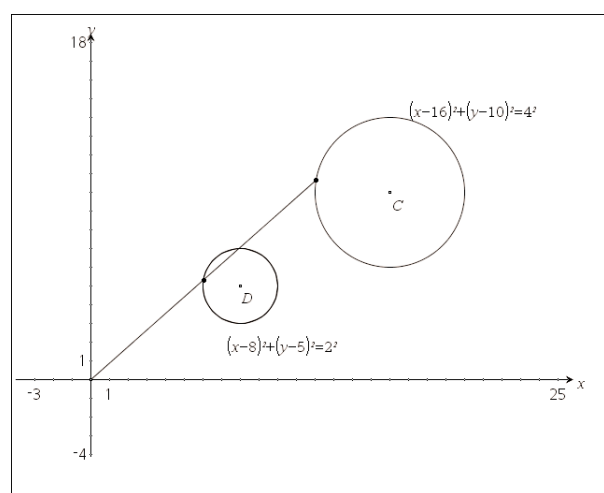


Fig. 7

Il tutto è arricchito da una sofisticata gestione delle variabili che permette di definire, collegare, modificare e interagire tra questo e gli altri ambienti del sistema TI-Nspire.

L'ambiente Foglio elettronico

Come dice il nome, in questo ambiente si possono definire formule, indirizzare e copiare celle, effettuare riferimenti assoluti e relativi, tabulare funzioni e successioni, utilizzare variabili definite in altri ambienti o, viceversa, definire variabili utilizzabili negli altri ambienti, catturare dati ecc.

Il tutto in un contesto simbolico! Ad esempio in Fig. 8 troviamo una "successione" di polinomi della forma $x^n - 1$, affiancati dalla loro scomposizione in fattori.

	A	B	C
• =seq(n,			
1	1	$x-1$	$x-1$
2	$2x^2-1$	$(x-1)*(x+1)$	
3	$3x^3-1$	$(x-1)*(x^2+x+1)$	
4	$4x^4-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^2+1)$	
5	$5x^5-1$	$(x-1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)$	
6	$6x^6-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^2+x+1)*(x^2-x+1)$	
7	$7x^7-1$	$(x-1)*(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	
8	$8x^8-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^4+1)$	
9	$9x^9-1$	$(x-1)*(x^2+x+1)*(x^6+x^3+1)$	
10	$10x^{10}-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^4-x^3+x^2-x+1)$	
11	$11x^{11}-1$	$(x-1)*(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	
12	$12x^{12}-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^2+x+1)*(x^2-x+1)*(x^4-x^2+1)$	
13	$13x^{13}-1$	$(x-1)*(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	
14	$14x^{14}-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$	
15	$15x^{15}-1$	$(x-1)*(x^2+x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$	
16	$16x^{16}-1$	$(x-1)*(x+1)*(x^2+1)*(x^4+1)*(x^8+1)$	
17	$17x^{17}-1$	$(x-1)*(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	

Fig. 8

Citiamo anche l'ambiente **Notes**. Non si tratta solo di editor di testi ma di un vero e proprio ambiente per la documentazione del proprio lavoro, per la creazione di schede con le consegne per gli studenti, per somministrare questionari ecc. Non manca infine la possibilità di collegare il sistema con apparecchiature esterne, come sensori di moto, di temperatura per acquisire dati e successivamente elaborarli.

Per concludere

Il sistema TI-Nspire non è ancora in commercio, anche se la sua uscita è ormai vicina. Un fatto molto interessante è che il prodotto viene sviluppato soprattutto tenendo conto delle esigenze e delle richieste provenienti dall'Europa, in particolare Germania, Francia, Norvegia, Danimarca e Italia.

I Lettori di Ipotesi sanno bene che da sempre Texas Instruments adotta una lungimirante politica di marketing, preferendo ai caroselli televisivi o ai cartelloni lungo le strade una informazione alla clientela basata sul supporto alla didattica, ad esempio attraverso il sostegno a corsi di aggiornamento, favorendo la produzione e la diffusione di materiali didattici, partecipando come sponsor a molti Convegni disciplinari, organizzando un utilissimo programma di prestito gratuito alle scuole delle sue apparecchiature.

Anche per TI-Nspire è in corso una imponente attività di supporto: sono in preparazione materiali e unità didattiche sviluppate sia a livello europeo che a livello dei singoli Paesi, per meglio adattare ai vari curricula.

Sono anche già in corso sperimentazioni sia scientifiche, da parte di istituzioni universitarie, che "sul campo" in classi pilota di molti Paesi Europei, Italia compresa.

► Le Gare di Matematica con le Tecnologie

Carmelo Di Stefano

Lo scorso 1 Dicembre, a Reggio Emilia, nell'occasione del convegno nazionale di ADT, tenuto in parte in comune con quello UMI-CIIM, si è svolta la finale nazionale della terza edizione delle GMT. Come consuetudine la finale ha seguito la selezione on-line. Questa è stata svolta il 6 Novembre 2006 a partire dalle ore 15:00 e per un massimo di 3 ore. A questa fase si sono iscritti 136 studenti di 38 scuole distribuite in tutta Italia. 19 studenti di biennio e 117 di triennio. Hanno poi inviato le soluzioni 85 studenti di 26 scuole.

I numeri appaiono certamente ridicoli se confrontati con quelli di gare ormai affermate come le Olimpiadi della Matematica o i giochi della Bocconi, che vedono decine di migliaia di partecipanti. Sono invece incoraggianti se consideriamo che:

1. Le nostre gare non coinvolgono direttamente le scuole;
2. siamo appena alla terza edizione;
3. e soprattutto, la diffusione dell'uso delle tecnologie nell'insegnamento della matematica nelle scuole italiane continua a essere ancora a percentuali decimali.

Senza volere innescare polemiche inutili, vogliamo sottolineare che non intendiamo né fare i soliti piagnoni, né confortarci con il solito discorso della bottiglia mezza piena – mezza vuota.

Consideriamo i testi assegnati nella selezione, ricordando che questi opportunamente svolti e commentati, insieme con quelli assegnati nelle varie prove degli anni precedenti, si trovano nel mio sito

<http://xoomer.alice.it/mathontheweb/gmt.htm>.

1. Qual è il minimo valore di n per cui 2006^n ha più di 1000 cifre?
A. 100 B. 271 C. 303 D. 412
2. Sia

$$x = \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} - \sqrt[5]{5} + \dots + \sqrt[98]{98} - \sqrt[99]{99}$$

possiamo dire che è

- A. $x < 0$ B. $0 < x < 0,4$ C. $0,4 < x < 0,7$ D. $0,7 < x < 0,9$
3. Nella tabella seguente sono riportati i dati relativi al costo di un dato prodotto rilevato a prefissati e uguali intervalli di tempo.

Tempo	1	2	3	4	5
Costo	5,12	7,92	11,51	14,62	17,84
Tempo	6	7	8	9	10
Costo	20,98	25,01	27,42	30,12	32,99

Supponendo un andamento quasi lineare, possiamo dire che all'unità di tempo $t = 15$, il costo del prodotto sarà circa

- A. 43 B. 46 C. 49 D. 52
4. La somma dei quadrati delle radici reali dell'equazione $x^5 - 0,4x^4 - 2x^3 + 0,7x^2 + 0,8x - 0,2 = 0$ è circa
A. 1,64 B. 3,81 C. 4,16 D. 7,32
 5. Malcom deve scegliere fra gli abbonamenti ADSL elencati in tabella, ciascuno dei quali prevede un impegno almeno annuale. Detto h il numero di ore che Malcolm usa in rete per anno, quando gli conviene scegliere il servizio C?

Servizio	Canone	Periodo	Costo per ora
A	€ 9,95	Mensile	€ 0,15
B	€ 12,00	Mensile	€ 0,12
C	€ 25,00	Trimestrale	€ 0,18
D	€ 45,00	Semestrale	€ 0,20

- A. $647 \leq h \leq 733$ B. $501 \leq h \leq 646$
C. $501 \leq h \leq 733$ D. $h \leq 647$
6. Un titolo, che ha un valore nominale di € 1,00, viene acquistato a € 0,87 pagando una commissione dello 0,23%. Il titolo ha un tasso di interesse del 8,75% sul valore nominale, su cui viene effettuata una ritenuta del 12,50%. Dopo 157 giorni il titolo viene venduto a € 0,89, pagando una commissione dello 0,25%. € 1000,00 investiti, alla fine sono diventati
A. € 1027,82 B. € 1030,89
C. € 1056,37 D. € 1062,49
 7. Le leggi del moto di due particelle che partono allo stesso istante $t = 0$ sono $s_1(t) = t^4 - t + 3$, $s_2(t) = -t^3 + 1$. Quanto vale la minima distanza a cui possono trovarsi?
A. circa 1,68 B. circa 1,42
C. circa 1,28 D. circa 0,2
 8. Una nave si trova in avaria in un punto dell'oceano che in un certo sistema cartesiano ortogonale monometrico ha coordinate (5,25; 4,13). Il suo S.O.S. è captato da 6 navi le

Le Gare di Matematica con le Tecnologie

continua

cui coordinate e la rispettiva velocità in unità di misura orarie è elencata nella seguente tabella. Se la nave colasse a picco in 3 ore, quante delle 6 navi riuscirebbero a raggiungerla in tempo?

Posizione	Velocità (u/h)
(3,12; 1,92)	0,95
(1,14; 6,87)	1,28
(3,75; 8,11)	1,42
(7,28; 0,53)	1,33
(7,53; 6,21)	1,02
(10,31; 4,15)	1,72

A. meno di 2 B. 2 C. 3 o 4 D. Più di 4

9. Definiamo una funzione nel seguente modo. Di ogni numero naturale si stabilisce nell'ordine se è multiplo di 2, 3, 5, 7, fermandosi quando la risposta è positiva. Se il numero è multiplo di uno dei detti numeri, k per esempio, lo moltiplica per k e gli aggiunge 1, diversamente lo moltiplica per 11 e gli aggiunge 1.

Per esempio

$$f(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13,$$

$$f(15) = 3 \cdot 15 + 1 = 46,$$

$$f(35) = 5 \cdot 35 + 1 = 176,$$

$$f(49) = 7 \cdot 49 + 1 = 344,$$

$$f(13) = 11 \cdot 13 + 1 = 144.$$

Consideriamo la seguente catena di applicazioni della funzione

$$f(2) = 5 \Rightarrow f(5) = 26 \Rightarrow f(26) = 53,$$

e così via per 100 volte. Quante cifre ha il numero così ottenuto?

A. 64 B. 75 C. 100 D. 320

10. Un giorno un titolo azionario ha avuto uno strano comportamento in borsa. Nelle prime 10 rilevazioni è salito ogni volta dell' $x\%$, nelle successive 10 rilevazioni è sceso ogni volta dell' $x\%$, per altre 10 rilevazioni è salito dell' $y\%$ ogni volta e nelle ultime 10 rilevazioni è sceso ogni volta dell' $y\%$. Sapendo che all'inizio valeva € 100,00 e alla fine € 94,69 e che se fosse salito dell' $x\%$ in ognuna delle prime 20 rilevazioni e sceso dell' $y\%$ in ognuna delle successive 20 rilevazioni, il suo valore finale sarebbe stato di circa € 77,51, determinare quanto vale all'incirca $|x - y|$.

A. 0,01 B. 0,02 C. 0,03 D. 0,04.

Il punteggio massimo ottenibile era 30 punti, dato che ogni risposta esatta valeva 3 punti, ogni risposta non data 0 e ogni risposta errata comportava una penalizzazione di 1 punto.

Il 36% di chi ha inviato la soluzione ha ottenuto la "sufficienza", cioè dal 18 in su; il 25% ha ottenuto punteggi da 10 a 17 e solo il 10% ha ottenuto punteggi non positivi.

Il quesito più facile è risultato il primo, con l'83% di risposte esatte, quello più difficile il sesto, con il 17% di risposte esatte e ben il 41% di risposte non date. Questo fatto appare molto strano perché nel quesito in questione non erano richieste particolari conoscenze. Le nostre attese presumevano invece che i quesiti più difficili dovessero essere gli ultimi due. Infatti hanno avuto entrambi circa il 22% di risposte esatte e il 44% di risposte errate.

Dopo qualche vicissitudine dovuta alla mancata conferma di partecipazione entro i termini previsti e il forfait all'ultimo momento di alcuni studenti, hanno partecipato alla gara finale, tenuta presso l'Università di Reggio Emilia il 1° Dicembre 2006 alle ore 16:00 per complessivi 90 minuti, 11 studenti.

Ecco i testi delle prove.

1. Il metodo dei minimi quadrati consiste nel determinare, fra le curve di un certo tipo, quale ha minima la somma dei quadrati delle differenze fra i valori dati e quelli stimati sulla curva. Quale fra le seguenti curve esponenziali è quella dei minimi quadrati per i dati in tabella?

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,34	0,95	2,61	6,71	19,02
	6	7	8	9	10
	49,37	134,12	370,15	984,01	2654,12

A. $0,129 \cdot 2,70^x$ B. $0,131 \cdot 2,69^x$

C. $0,130 \cdot 2,71^x$ D. $0,128 \cdot 2,72^x$

2. Consideriamo la somma

$$s(k) = 1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{8}{9}\right)^k,$$

Le Gare di Matematica con le Tecnologie

continua

per quali valori interi di k si avrà $8,15 < s(k) < 8,79$?

A. $k \leq 30$ B. $19 \leq k \leq 30$ C. $20 \leq k \leq 30$ D. $20 \leq k \leq 29$

3. Per stimare l'età di un reperto fossile si usa misurare la percentuale dell'isotopo C_{14} presente, dato che nel momento in cui l'organismo muore essa comincia a diminuire in modo che ogni 5730 anni si dimezza. Se in un certo fossile si è rilevato che tale percentuale, rispetto ad un organismo vivente, è del 31,23%, possiamo stimare quanti anni fa circa il detto organismo è morto?

A. 7881 B. 8451 C. 9620 D. 10023

4. Il signor Gauss ha acquistato 1015 azioni del titolo GMT a € 0,75 per azione. Successivamente ha acquistato e venduto azioni GMT secondo la seguente tabella. Tenuto conto che le variazioni si riferiscono sempre al valore della riga precedente e che per ogni operazione il signor Gauss paga alla sua banca lo 0,35% della quota trattata, si vuol sapere quale sarà il saldo finale del signor Gauss. Si precisa che ogni valore si tronca per difetto (prima cifra esclusa da 0 a 4) o per eccesso (prima cifra esclusa da 5 a 9) alla seconda cifra decimale.

Num. Azioni	Variazione	Tipo di operazione
752	-5,73%	Acquisto
815	+9,32%	Vendita
531	-4,13%	Acquisto
253	+3,12%	Vendita
491	-6,12%	Acquisto
Azioni rimanenti	+8,31%	Vendita

A. +€ 107,09 B. + € 111,19

C. +€114,43 D. + € 118,51

5. Una tipografia si rivolge a tre rivenditori per acquistare un massimo di 1 tonnellata di carta. Il primo gli prospetta le seguenti possibilità: € 1,20 al Kg per ordini fino a 1 quintale di carta, dopodiché applica uno sconto del 10% per ordini fino a 5 q solo per la parte eccedente 1 q, e uno ulteriore del 15% per ordini superiori a 5 q, sempre solo per la parte eccedente tale quantità. Un altro fornitore invece propone un prezzo di € 1,00 il Kg più un fisso per il trasporto di € 30,00 per ogni mezza tonnellata o porzione, cioè se si ordina 500 Kg, di carta paga € 30 di fisso, se ne ordina 501 paga € 60. Un terzo fornitore invece chiede € 1,35 il Kg fino a 250 Kg., ogni 250 Kg. sconta di € 0,05 il prezzo al Kg, fino a che il prezzo non si stabilizzi a € 1,00: così se ordina 251

Kg, pagherà € 1,30 il chilo, per 501 Kg. € 1,25, e così via. Quanti Kg di carta si devono ordinare affinché sia più conveniente il secondo fornitore?

A. Non è mai conveniente B. più di 225 C. meno di 500 D. più di 225 e meno di 500

6. In una lontana galassia un pianeta si muove su un'orbita ellittica i cui fuochi, in un certo sistema di riferimento, hanno coordinate $(-0,13; 2,11)$ e $(2,15; 3,12)$ e asse maggiore lungo 3,27. Una cometa, che si muove nello stesso piano dell'orbita del pianeta, ha una traiettoria parabolica di fuoco $(4,11; 1,79)$ e direttrice di equazione $2,13x - 3,11y + 0,72 = 0$. Si sa che un meteorite si muove lungo una traiettoria rettilinea che incontrerà le due orbite rispettivamente nei punti P e Q di ascissa 1,15 e 2,37. Dato che di tali punti ve ne sono più di due, quanto vale la somma delle distanze PQ?

A. 15,31 B. 16,29 C. 18,53 D. 21,12

Quesiti a risposta numerica

7. Un'azienda ha una spesa fissa di €300,00 per produrre un certo bene A e di € 250,00 per produrre un bene B, inoltre ogni unità del bene A costa € 6,00 e ogni unità di B costa € 4,00. Sappiamo che

a) il prezzo di vendita unitario è rispettivamente di € 8,00 e € 5,50;

b) il mercato non assorbe più di 500 pezzi di tipo A e 350 di tipo B;

c) non possono prodursi più di 700 pezzi complessivi per volta.

Determinare il massimo guadagno che si può ottenere, nell'ipotesi che il mercato assorba tutto il prodotto.

8. Alla variabile n dell'espressione n^2+3 sostituiamo tutti i multipli di 23 positivi e minori di 2006. Quanti dei numeri così ottenuti sono multipli di 7?

9. Il numero 2006^{2006} ha 6625 cifre, quante di queste sono uguali a 0, 2 o 6?

10. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 2345 biglie numerate da 1 a 2345, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà:

a) sia un numero divisibile per 4 minore di 1234;

Le Gare di Matematica con le Tecnologie

continua

- b) sia un numero divisibile per 6 maggiore di 956;
 c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 547 e 1256.

Il risultato deve essere approssimato al primo decimale e scritto in percentuale.

Cominciamo con l'osservare che in questa prova solo i primi 6 quesiti erano a risposta multipla, gli altri 4 erano invece a risposta numerica.

Vediamo adesso qualche dato statistico, riferito ai singoli quesiti, che sono risultati mediamente difficili, come dovrebbe essere per una finale nazionale.

Il quesito più facile è risultato il secondo, svolto correttamente da 9 studenti e tentato da tutti, seguito dal quesito numero 5 e poi dai quesiti 1 e 8. Il più difficile il 6 che non è stato affrontato da alcuno. La motivazione in questo caso può essere dovuta a una non approfondita conoscenza sulle coniche come luoghi geometrici o anche al fatto che fra tutti era quello più lungo. Altrettanto difficili sono risultati i quesiti 9 (con 2 sole risposte una esatta), e il 10 che ha avuto però 7 risposte, 2 delle quali esatte. In questo caso probabilmente gli studenti hanno usato in modo non del tutto corretto il principio di inclusione-esclusione.

Il massimo punteggio ottenibile era 48 punti, dato che

- il punteggio assegnato a ogni risposta corretta era di 3 punti per gli esercizi a risposta multipla di 5 punti per gli altri;
- le risposte errate comportavano una penalizzazione di 1 punto;
- vi era un bonus di 10 punti, per evitare punteggi finali negativi.

Più di metà dei partecipanti hanno ottenuto un punteggio superiore alla metà del punteggio massimo.

Ecco la classifica finale.

Nome	Scuola	Totale
Cimetta Leone	Liceo S. L. da Vinci di Treviso	34
Lavacca Simone	Liceo S. E. Fermi di Canosa di Puglia	31
Morgante Enrico	Liceo S. G. Marinelli di Udine	30
Fava Elisabetta	I.I.S.S. A. Manzoni di Suzzara	29
Pecorino Alessio	ISIS C. Facchinetti di Busto Arsizio	27
Modonutti Alberto	Liceo S. G. Marinelli di Udine	26
Del Nin Giacomo	Liceo S. G. Marinelli di Udine	22
Massaro Antonio	Liceo S. G. da Procida di Salerno	14
Patruno Silvio	Liceo S. E. Fermi di Canosa di Puglia	13
Scarciotti Giordano	Liceo S. di Zagarolo	13
Cariello Giuseppe	Liceo S. G. da Procida di Salerno	10

Osserviamo che il vincitore della fase finale è stato anche quello che aveva ottenuto, fra gli undici partecipanti, il migliore punteggio nella selezione. Solo due dei partecipanti, gli studenti del Liceo Scientifico E. Fermi di Canosa di Puglia, avevano partecipato alla passata finale, in particolare Lavacca, risultato secondo, lo scorso anno non si era classificato neanche fra i primi otto.

Gli studenti hanno ricevuto in premio una calcolatrice offerta da Texas Instruments, di diverso valore, in particolare i primi due hanno ricevuto una TI-89, terzo e quarto una TI-84 plus. Tutti hanno anche ricevuto un libro di matematica offerto da Ghisetti & Corvi editore, un cappellino e uno zaino offerti anch'essi da Texas Instruments.

Concludiamo con la speranza che questi Giochi possano diffondersi viepiù e con essi l'uso reale ed efficace delle nuove tecnologie nell'insegnamento della matematica, che non è solo una moda, ma una necessità reale. Invitiamo inoltre tutti gli interessati a consultare periodicamente il sito www.adt.it e il mio sito precedentemente citato, in cui troveranno diverso materiale di esercitazione, nonché annunci di altre gare. Invitiamo altresì a inviare proposte di quesiti da inserire nelle prossime gare e anche, chi fosse interessato ad organizzare gare locali, a richiedere eventualmente il nostro aiuto per la preparazione dei testi. A questo proposito ricordiamo che è attiva una apposita casella e-mail: giochi_gmt@alice.it.

CARMELO DI STEFANO, carmelodst@alice.it

L'Istituto Tecnico Commerciale e Turistico *S. Pugliatti* di Taormina col patrocinio di:
Comune di Taormina, AIF Sezione di Messina,
Dipartimento di Matematica-Università di Messina e



organizza il 7° Convegno Nazionale
MATEMATICA, FORMAZIONE SCIENTIFICA E NUOVE TECNOLOGIE
Concepire, insegnare la Matematica e le Scienze oggi per le future applicazioni:
argomenti e metodi

Aula Magna ITCT "S. Pugliatti", Contrada Arancio-Trappitello, Taormina

Giovedì 22 marzo

14:00 Iscrizioni e apertura del convegno; 15:00 *Mauro Cerasoli* (U L'Aquila) *Il metodo Monte Carlo*
 16:00 *Mario Barra* (U Roma La Sapienza) *Matematica seduttrice*; 17:00 Intervallo
 17:30 *Bruno Firmani* (U Trento) *Uso delle macchine calcolatrici per stimolare intelligenza e curiosità*
 18:15-19:00 *Bruno Barigelli* (U Ancona) *Problemi di secondo grado tra storia e informatica*

Venerdì 23 marzo

9:00 *Alessandro Sarritzu* (U Messina)
L'armonia musicale come esempio di rappresentazione matematica del mondo
 10:00 *Renato Migliorato* (U Messina) *Strutture cognitive e formazione matematica*
 11:00 Intervallo, 11:30 *Anna Cerasoli* (Scrittrice) *Racconti di matematica*
 12:00 *Linda Giannini* (IC don Milani, Latina) *Carlo Nati* (MPI)
Apprendimento per modelli e personalizzazione della didattica: comunicazione didattica, modelli e costruzione della conoscenza
 13:00 Intervallo pranzo
 15:00 *Giuseppe Gentile* (U Messina) *La situazione a-didattica e l'apprendimento: panorama ed esempi*
 15:40 *Roberto Cordeschi* (U Roma La Sapienza) *I 50 anni dell'Intelligenza Artificiale*
 16:40 Intervallo, 17:00 *Eraldo Giuli* (U L'Aquila) *Le più belle idee della topologia*
 18:00-19:00 *Eugenio Mercuri* (LS Lamezia Terme) *Introduzione a TI-nspire CAS*; 20:30 *Serata di gala*

Sabato 24 marzo

9:00 *Domenica Di Sorbo* (MPI) *Matematica e scienze sperimentali*
 9:30 *Tiziana Bindo* (MPI) *Imparare la matematica navigando in rete*
 10:00 *Anna Alfieri* (LS Catanzaro) *Cicloid, epicycloidi e ipocicloid con Cabri*
 10:30 Intervallo, 11:00 *Carmelo Di Stefano* (LS Gela) *Insegnare matematica con TI-nspire CAS*
 12:00 *Luisa Carini* (U Messina) *Aritmetica modulare e Crittografia*
 13:00 Intervallo pranzo
 16:00 Finali delle *Gare di Matematica con le Tecnologie* e premiazione dei vincitori

Domenica 25 marzo Gita sull'Etna e a Taormina

L'iscrizione avviene durante il convegno. A tutti i partecipanti è richiesto un contributo alle spese di organizzazione di 40€ (ridotto a 30€ per i soci ADT e per gli iscritti alle SSIS). Per i pasti è a disposizione la mensa della scuola. Informazioni: convmat@libero.it

Al termine dei lavori, ADT rilascerà un attestato di aggiornamento in base alla CM 376, prot. 15218, del 23-12-1995 e successive modifiche. Al fine di partecipare al Convegno il MPI concede l'esonero dal servizio. Nella mattina di sabato 24 marzo saranno sorteggiati calcolatrici e software da donare ai presenti in sala. Nel pomeriggio si svolgeranno le finali delle Gare di Matematica con le Tecnologie. Bando e regolamento sul sito www.adt.it (Info: gmt_giochi@alice.it, Tel. 3404178468).

Comitato organizzatore

Mario Gregorio (Dirigente Scolastico, Presidente) *Venera Brigandi, Cinzia Catanzaro, Mauro Cerasoli* (Direttore Scientifico).

► Un problema proposto alla SSIS

Libero Verardi

A conclusione del corso di Laboratorio di Didattica della Matematica 1 del 2004-05, corso nel quale tra l'altro si insegna l'uso delle calcolatrici TI-92 Plus e delle sorelle TI-89 e Voyage™ 200, si è proposto ai partecipanti il seguente problema, con l'invito a trovarne soluzioni algebriche o grafiche mediante l'uso del CAS e della programmazione, oppure geometriche mediante l'uso dell'applicazione Cabri Geometry.

PROBLEMA. Sono dati nel piano due vettori non nulli

$a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ tali che $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \sqrt{3}$, $\widehat{AOB} = 150^\circ$. Posto $A = (1,0)$, si determinino:

- Le coordinate di B .
- Le equazioni delle riflessioni w_a e w_b rispetto alle rette per O ortogonali rispettivamente ad a e b .
- Tutti i vettori che si ottengono a partire da a e b , applicando ripetutamente le riflessioni w_a e w_b .
- Il gruppo W generato dalle due riflessioni w_a e w_b .

§1. La prima soluzione proposta si colloca nell'ambito della Geometria Analitica, con un minimo di Trigonometria per semplificare le cose. L'intervento delle calcolatrici, dapprima un po' marginale, via via diventerà sempre più determinante.

a) $B = (\sqrt{3} \cdot \cos(150^\circ), \sqrt{3} \cdot \sin(150^\circ)) = (-3/2, \sqrt{3}/2)$.

Il calcolo si può eseguire anche con la calcolatrice, ma ovviamente non dovrebbe essere necessario, se non per illustrare come si possano calcolare funzioni circolari di angoli in gradi nonostante siano predisposti i radianti.

b) La retta perpendicolare ad a è l'asse y , allora si ha subito:

$$w_a = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow W_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La retta ortogonale a b ha equazione $y = \sqrt{3}x$; posto $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$, il punto medio di PP' le appartiene e la retta PP' è perpendicolare ad essa. Allora si ha il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}(x + x') - (y + y') = 0 \\ (x' - x) + \sqrt{3}(y' - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w_b = \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow W_b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Il sistema si può risolvere per sostituzione con la calcolatrice, ma in tal caso occorre ribattezzare con u e v le incognite x' ed y' , altrimenti si creano equivoci con i simboli usati per le equazioni differenziali.

c) Per rispondere a questa domanda, apparentemente poco chiara, ci sono vari metodi proponibili.

La prima idea, per sfruttare la calcolatrice, è definire le quattro matrici seguenti:

Define a=[1;0]

Define b=[-3/2;√(3)/2]

Define wa=[-1,0;0,1]

Define wb=[-1/2,√(3)/2;√(3)/2,1/2]

Moltiplichiamo dapprima le matrici wa e wb per le colonne a e b , ottenendo quattro nuove colonne; poi, moltiplichiamo wa e wb per ciascuna di queste quattro e continuiamo moltiplicando wa e wb per ogni nuova colonna così ottenuta, finché ne troviamo delle nuove. Ne troveremo 12 in tutto, comprese a e b .

Dopo avere dapprima pulito e poi predisposto la pagina grafica con gli zoom opportuni, si possono "accendere" i punti le cui coordinate sono nelle varie colonne via via trovate.

Questo tuttavia non è l'uso migliore della calcolatrice. Conviene esprimere i trasformati di a e b mediante le due riflessioni w_a e w_b come combinazioni lineari di a e b .

$$\begin{aligned} w_a(b) = ha + kb &\Rightarrow \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} h - 3/2 k = 3/2 \\ \sqrt{3}/2 k = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente, } w_b(a) = ha + kb \Rightarrow \begin{cases} h = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

In definitiva, si ha:

Un problema proposto alla SSIS continua

$$\begin{cases} w_a(a) = -a & w_b(a) = a + b \\ w_a(b) = 3a + b & w_b(b) = -b \end{cases}$$

A questo punto, sfruttando la linearità delle due riflessioni, si ha:

$$w_a(ha + kb) = h \cdot w_a(a) + k \cdot w_a(b) =$$

$$= -ha + k(3a + b) = (3k - h)a + kb$$

Analogamente si ricava:

$$w_b(ha + kb) = ha + (h - k)b.$$

Ora possiamo cancellare a e b e poi definire una coppia di funzioni, che chiameremo ancora w_a e w_b , per calcolare i trasformati dei vari vettori $ha + kb$:

$$\text{Define } w_a(h,k) = (3*k-h)*a+k*b$$

$$\text{Define } w_b(h,k) = h*a+(h-k)*b$$

Per esempio, il corrispondente di $a+b$ mediante w_a è $w_a(1,1) = 2a+b$.

Con l'aiuto delle due funzioni si hanno le tabelle seguenti. In tutto ci sono 12 vettori soltanto, a coefficienti interi. Poiché le due riflessioni sono isometrie, di questi 12 vettori ce ne sono sei "corti", e sono quelli ottenuti a partire da a : $\pm a$, $\pm(a+b)$, $\pm(2a+b)$; gli altri sei sono "lunghi" perché ottenuti a partire da b : $\pm b$, $\pm(3a+b)$, $\pm(3a+2b)$.

	a	$-a$	$a+b$	$-a-b$	$2a+b$	$-2a-b$
w_a	$-a$	a	$2a+b$	$-2a-b$	$a+b$	$-a-b$
w_b	$a+b$	$-a-b$	a	$-a$	$2a+b$	$-2a-b$

	b	$3a+b$	$-b$	$3a+2b$	$-3a-b$	$-3a-2b$
w_a	$3a+b$	b	$-3a-b$	$3a+2b$	$-b$	$-3a-2b$
w_b	$-b$	$3a+2b$	b	$3a+b$	$-3a-2b$	$-3a-b$

Ora definiamo a e b non come matrici, ma come liste, eventualmente usando l'apposita funzione:

$$\text{Define } a = \text{MAT} > \text{LIST}(a)$$

$$\text{Define } b = \text{MAT} > \text{LIST}(b)$$

Quindi avremo $a = \{1,0\}$, $b = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Eseguiamo le

combinazioni lineari indicate nella tabella, ricavando le coordinate cartesiane dei 12 vettori come liste. Ciò si può fare con la calcolatrice, ma possiamo fare di più. Con un programmino apposito, nella pagina della grafica si può tracciare un segmento ed un cerchietto per ciascun vettore $x = ha + kb = \{h,k\}$.

```
:onp(x)
:Prgm
:Define xx=x[ 1]
:Define xy=x[ 2]
:Circle xx,xy,.1
:Line 0,0,xx,xy
:DelVar xx,xy
:EndPrgm
```

Si immettono via via i 12 vettori a , $-a$, $a+b$, ..., $-3a-2b$, contenuti nella prima riga della nostra tabella.

Fig. 1

La figura ottenuta nella pagina grafica è mostrata qui di seguito:

d) La figura 2 evidenzia una stella a sei punte "regolare", o se

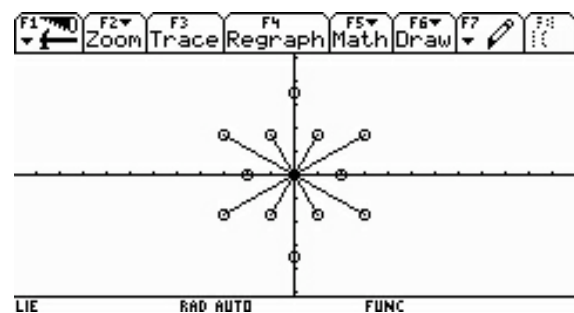


Fig. 2

Un problema proposto alla SSIS

continua

si preferisce, due esagoni regolari concentrici, ma sfasati di 30° ; perciò il gruppo W dovrà essere isomorfo al gruppo diedrale dell'esagono regolare. Una verifica si può fare calcolando il prodotto M delle due matrici W_a e W_b :

$$M = W_a \times W_b = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Con la calcolatrice se ne possono calcolare le potenze:

$$M^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi M ha periodo 6. M è la matrice della rotazione di ampiezza 300° . Ciò si può dedurre dal fatto che i due assi delle riflessioni formano un angolo di 150° , quindi il loro prodotto dev'essere una rotazione di ampiezza doppia.

52. Esiste un altro modo di costruire i 12 vettori, con il Cabri Geometry della calcolatrice o del computer. Qui di seguito descriverò il procedimento, che ha una piccola difficoltà iniziale: dato un vettore, identificato con \overrightarrow{OA} , da assumere come unità di misura, come costruire \overrightarrow{OB} possibilmente senza ricorrere alle misure? Dividiamo la sua costruzione in due parti.

Si tracci da O la perpendicolare ad \overrightarrow{OA} e si determini il simmetrico A' di A rispetto a tale retta (con F5 4:Reflection). Si tracci la circonferenza di centro A e raggio AA' . Detto Q quello dei due punti intersezione, tale che $\angle A'OQ = 90^\circ$, il triangolo AQA' è equilatero ed il lato è $2 \cdot \overrightarrow{OA}$, quindi, $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{3} \cdot \overrightarrow{OA}$.

Nascondiamo la circonferenza e il punto A' (con F7 1:Hide/Show) e poi tracciamo le circonferenze di centri O e Q e raggio QO : esse s'intersecano in due punti, uno dei

quali, quello più lontano da A , è il punto B cercato. Infatti, $\triangle OBQ$ è equilatero, quindi $\angle A'OB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Tracciamo quindi il vettore \overrightarrow{OB} .

Nascondiamo ora le due circonferenze ed il punto Q e poi mandiamo da O la perpendicolare al vettore \overrightarrow{OB} . La figura di partenza è pronta.

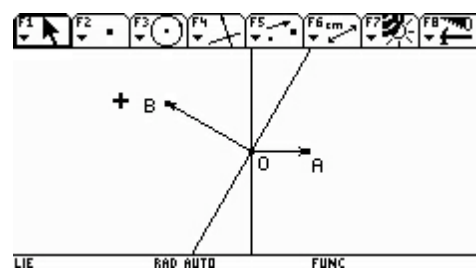


Fig. 4

Applichiamo ripetutamente ad \overrightarrow{OA} e ai vettori che via via otterremo le riflessioni rispetto alle due rette: otterremo i sei vettori "corti". Successivamente faremo lo stesso con il vettore \overrightarrow{OB} . La figura 5 seguente mostra i 12 vettori, insieme con le due rette che per maggiore visibilità sono state tratteggiate:

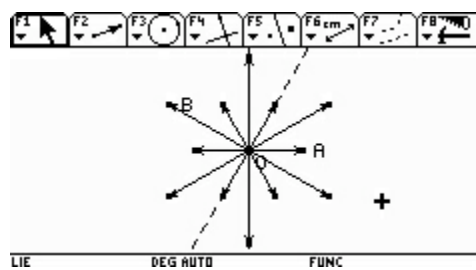


Fig. 5

Nascondiamo ora le rette tratteggiate e con l'opzione F3 4:Polygon colleghiamo i punti finali dei 12 vettori per formare una stella a 12 punte. Cancelliamo le etichette O , A , B e poi

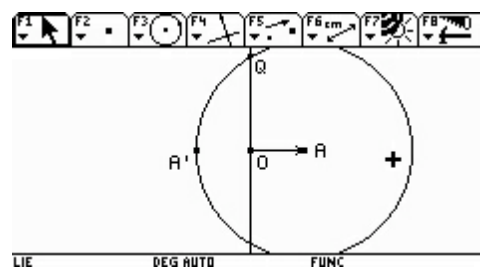


Fig. 3

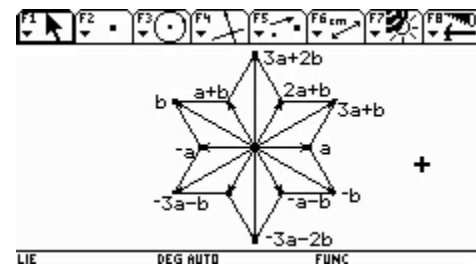


Fig. 6

Un problema proposto alla SSIS continua

mettiamo accanto ad ogni vertice come etichetta la combinazione di a e b corrispondente. La figura ottenuta è la 6 mostrata qui sotto:

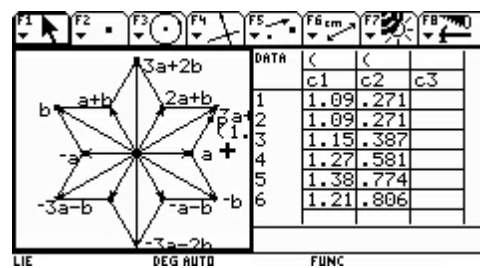


Fig. 7

Un virtuosismo finale, a soli fini estetici, può essere quello di prendere un punto P sul poligono, che è un oggetto, determinarne le coordinate con F6 5:Equation & Coordinates, aprire F6 7:Collect Data, poi selezionare 2>Select Data e, nella figura, selezionare l'ascissa e l'ordinata di P . Fatto ciò, riaprire F6 7 e selezionare 1:Store Data. Come noto, le coordinate di P sono collocate in due colonne di un documento denominato Sysdata dell'applicazione Data/Matrix Editor, collocato sempre nel folder MAIN, anche se stiamo lavorando in un altro folder.

Ora animiamo il punto P . Non appena esso avrà percorso l'intero poligono, fermiamo l'animazione. Scegliendo F8 8:Data View, viene mostrato lo schermo diviso in due parti:

Nella parte destra della fig. 7 è mostrato il risultato: mentre il punto P percorreva il poligono, le sue coordinate sono state via via raccolte in questa tabella. Ma ora ci spostiamo in questa parte dello schermo, (con 2ND APPS), selezioniamo F2 Plot Setup, premiamo F1 per definire il Plot 1 di tipo 2:xyline, con punti 5:Dot, ed impostiamo come x la colonna $c1$ e come y la $c2$.

Andiamo ora nell'ambiente GRAPH, in cui far disegnare la nostra stella. Gli zoom opportuni aiutano a migliorarne la forma. Se la velocità di P non sarà stata eccessiva, la forma di quest'ultima stella non è disprezzabile. Se poi si avrà avuto cura di scegliere il vettore \overline{AB} di lunghezza 1, si potranno ridisegnare le linee ed i cerchietti e ottenere il disegno finale (fig. 8).

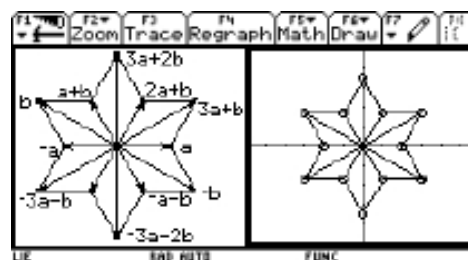


Fig. 8

NOTA. Il problema non deriva da esercizi di scuola superiore o universitari, ma è collegato con una particolare algebra di Lie, denominata G_2 . I vettori a e b , col rapporto delle lunghezze uguale a $\sqrt{3}$ e con un angolo di 150° , rappresentano le cosiddette *radici fondamentali*, mentre gli altri dieci sono le altre *radici* e sono combinazioni lineari a coefficienti interi di a e b . Il gruppo di isometrie generato dalle due riflessioni w_a e w_b è detto *gruppo di Weyl* di G_2 , e come abbiamo visto è isomorfo al gruppo dell'esagono regolare.

Altre informazioni su questo argomento si possono trovare nell'articolo:

L. VERARDI, La TI-92 e le radici di un'algebra di Lie semplice, Ipotesi, Anno 2, n.1/1999, pp 7-9.

LIBERO VERARDI, verardi@dm.unibo.it

► **Misure elettriche di autoinduzione**

Angelo Giancaspro

L'analisi di segnali elettrici rapidamente variabili nel tempo può essere approfondita in laboratorio con l'uso di sensori per le misure di tensione/corrente, programmando con il software Coach5 le modalità di acquisizione e di elaborazione dei dati al computer. Ad esempio, si può studiare l'andamento temporale dei segnali elettrici in un circuito RL, utilizzando un generatore periodico di tensione. È importante stabilire la durata e la frequenza di campionamento del segnale nel circuito in relazione al segnale prodotto dal generatore.

In seguito, sono discussi i risultati ottenuti in laboratorio durante l'anno scolastico 2005-2006 con la classe V E del Liceo Scientifico "M. Curie"- Monopoli (BA).

Realizzazione del circuito elettrico

Per lo studio del fenomeno di autoinduzione nei circuiti elettrici, si è realizzato il circuito illustrato in figura 1.

Il generatore di segnali elettrici può generare diverse forme di segnale periodico di tensione (sinusoidale, ad onda quadra, a rampa, ecc.) e si è scelto in particolare un segnale ad onda quadra di ampiezza $A = 3,6$ V e di frequenza $\nu = 0,6$ Hz. Il segnale viene generato ai capi di una bobina di $N = 10000$ spire, di diametro $d = 2,5$ cm e di lunghezza $l = 5$ cm. Si è scelto un numero N elevato di avvolgimenti della bobina e un valore non elevato della frequenza ν del segnale ad onda quadra per evidenziare il fenomeno di autoinduzione nel circuito. Il sensore di tensione rileva il segnale ai capi della bobina e invia le misure tramite l'interfaccia hardware (ULAB) al computer. Il programma software (Coach5) permette di stabilire le modalità di acquisizione (intervallo di tempo, frequenza, start/stop di misura) e di analizzare i dati acquisiti con l'uso della rappresentazione grafica o tabulare dei dati [1]. Per la misura del segnale periodico generato nel circuito, si è scelto un intervallo di acquisizione del segnale $\Delta t = 10$ s e una frequenza di campionamento $f = 20$ Hz.

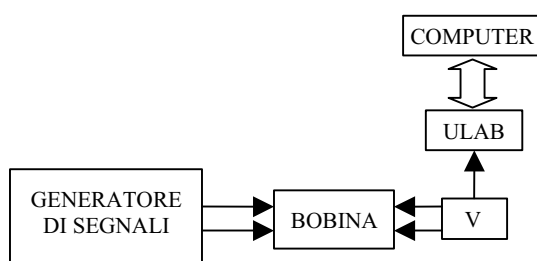


Figura 1: Schema a blocchi del circuito elettrico utilizzato per lo studio del fenomeno di autoinduzione

Il sensore di tensione ha un range di input di ± 10 V e un potere risolutivo di 7,9 mV. Un convertitore A/D a 12 bit inter-

no al sensore converte in forma digitale il segnale analogico misurato dal sensore, che è acquisito dal computer tramite l'interfaccia ULAB. Per misurare il segnale di tensione in uscita dal generatore di segnali a circuito aperto, si può modificare il circuito illustrato in figura 1, collegando i morsetti del sensore di tensione direttamente ai capi del generatore (figura 2).

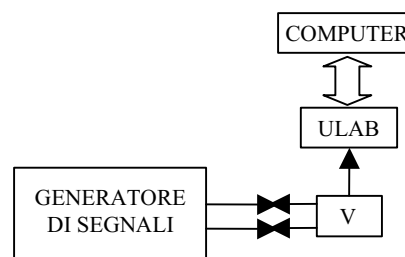


Figura 2: Schema a blocchi del circuito elettrico per la misura del segnale di tensione in uscita dal generatore di segnali a circuito aperto

Il segnale periodico di tensione ad onda quadra del generatore di segnali rilevato dal sistema di acquisizione è illustrato in figura 3.

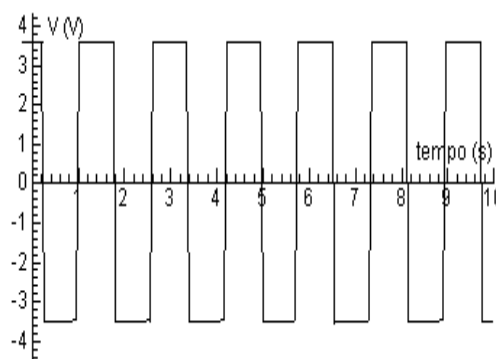


Figura 3: Segnale periodico di tensione ad onda quadra in uscita dal generatore di segnali a circuito aperto

Discussione dei risultati sperimentali

Con il circuito illustrato in figura 1, si può studiare il fenomeno di autoinduzione nel circuito [2]. Ad ogni transizione del segnale di tensione illustrato in figura 3 dal livello $V = -V_0$ al livello $V = V_0$ e viceversa, è prevista una corrente indotta nel circuito attraverso la bobina. Infatti, applicando la 2ª legge di Kirchhoff alla maglia del circuito, si ha la seguente equazione:

$$V_0 - R \cdot I - |V_L| = 0 \quad (1)$$

Misure elettriche di autoinduzione continua

V_0 = tensione del generatore

I = corrente elettrica nel circuito

V_L = tensione di autoinduzione ai capi dell'induttanza

R = resistenza totale nel circuito.

La resistenza totale R è la somma della resistenza interna alla bobina e della resistenza parassita presente nella maglia del circuito:

$$R = R_L + R_0, \quad (2)$$

R_L = resistenza interna alla bobina

R_0 = resistenza parassita nel circuito.

La tensione V_L ai capi dell'induttanza è data dalla legge di Faraday-Neumann:

$$V_L = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt}, \quad (3)$$

ove L = induttanza della bobina.

Sostituendola nell'equazione (1), si ha:

$$V_0 - R \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0, \quad (4)$$

con la condizione iniziale $I(0) = -\frac{V_0}{R}$.

La corrente nel circuito aumenta quindi in maniera esponenziale:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) - \frac{V_0}{R} \cdot e^{-t/\tau}, \quad (5)$$

con $\tau = \frac{L}{R}$.

La tensione V_L ai capi dell'induttanza è data, sostituendo la (5) nella (3), da :

$$V_L(t) = -2 \cdot V_0 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (6)$$

La tensione $V(t)$ ai capi della bobina, considerando la resistenza interna R_L , è:

$$V(t) = R_L \cdot I(t) + |V_L(t)|, \quad (7)$$

e, inserendo le (5) e (6) precedenti, si ha:

$$V(t) = V_0 \cdot \frac{R_L}{R} \cdot (1 - 2 \cdot e^{-t/\tau}) + 2 \cdot V_0 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (8)$$

Dunque, la tensione $V(t)$ ha un andamento in cui si ha all'istante $t = 0$ un salto pari a $2 \cdot V_0$ dal valore iniziale

$V(t < 0) = -V_0 \cdot \frac{R_L}{R}$, seguito da una decrescita esponenziale

fino al valore $V_0 \cdot \frac{R_L}{R}$.

In seguito, quando la tensione del generatore di segnali passa dal livello $V = V_0$ al livello $V = -V_0$, l'andamento della tensione $V(t)$ diventa l'opposto di quanto previsto dalla (8).

La tensione $V(t)$ ha complessivamente un andamento periodico che segue il segnale di tensione ad onda quadra del generatore, con un'attenuazione in ampiezza $A = \frac{R_L}{R}$.

Questo andamento è stato verificato nel circuito illustrato in figura 1, misurando il segnale di tensione ai capi della bobina (figura 4).

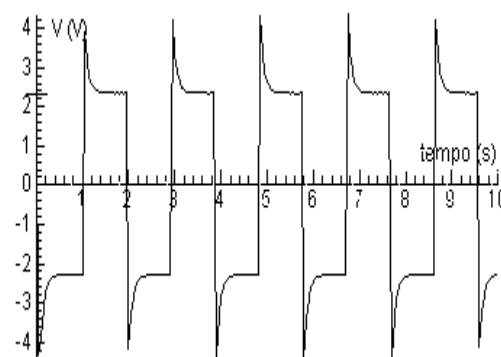


Figura 4: Andamento del segnale di tensione ai capi della bobina

L'attenuazione in ampiezza misurata è

$$A = \frac{R_L}{R} = 0,67 \pm 7\%. \quad (9)$$

Misure elettriche di autoinduzione continua

Gli andamenti di crescita e di decrescita esponenziale evidenziati in figura 4 permettono di misurare la costante di tempo τ del circuito.

Infatti, dalla (8) si ha:

$$\ln\left(V(t) - V_0 \cdot \frac{R_L}{R}\right) = \ln\left(2 \cdot V_0 - 2 \cdot V_0 \cdot \frac{R_L}{R}\right) - \frac{t}{\tau} \quad (10)$$

in cui vi è una correlazione lineare tra e il tempo t con pendenza $-1/\tau$.

Considerando in figura 4 l'andamento di decrescita esponenziale della tensione $V(t)$ a partire dall'istante $t = 1$ s, si può rappresentare $\ln(\Delta V)$ in funzione del tempo t , verificando la dipendenza lineare illustrata in figura 5, con coefficiente di correlazione lineare $r = 1,0$.

Applicando la (10), si è misurata una costante di tempo del circuito $\tau = 0,074 \pm 1\%$.

La resistenza R_L interna alla bobina è stata misurata mediante il rapporto tensione/corrente ed è $R_L = 2,4 \text{ k}\Omega \pm 14\%$. La resistenza totale R è dunque $R = R_L/A = 3,6 \text{ k}\Omega \pm 21\%$.

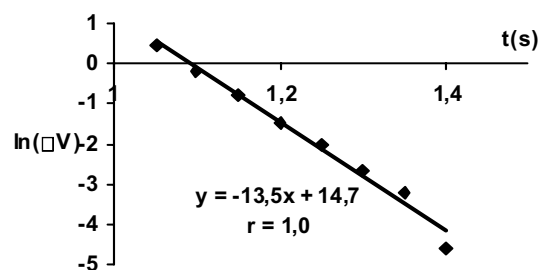


Figura 5: Dipendenza lineare tra $\ln(\Delta V)$ e il tempo t a partire dall'istante $t = 1$ s.

Essendo $\tau = \frac{L}{R}$, si ha $L = \tau \cdot R = 0,27 \text{ kH} \pm 22\%$.

Per un segnale sinusoidale di tensione del generatore, l'equazione (4) precedente diventa:

$$V_0 \sin(2\pi ft + \varphi_0) - R \cdot I(t) - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0, \quad (11)$$

con andamento sinusoidale per il segnale di corrente nel circuito. Per la relazione (3) precedente, si ha un segnale sinusoidale di tensione ai capi della bobina.

Con un segnale sinusoidale di tensione di ampiezza $V_0 = 1,4 \text{ V}$, la tensione ai capi della bobina ha l'andamento illustrato in figura 6, con un'attenuazione in ampiezza $A = 0,6 \pm 0,1$ in accordo con il valore misurato nella (9) precedente.

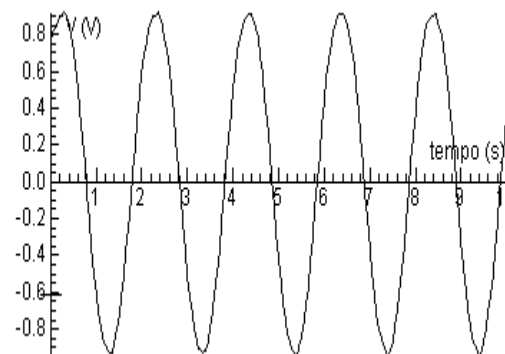


Figura 6: Andamento del segnale di tensione ai capi della bobina per un segnale sinusoidale di tensione del generatore

Conclusioni

Con le tecnologie di misura utilizzate si sono ottenute verifiche sperimentali su segnali nei circuiti elettrici, con la rapidità e con la sensibilità richiesta. L'acquisizione dei dati con il software Coach5 si è rivelata significativa per la rappresentazione grafica on-line dei segnali elettrici misurati e per un'attenta analisi dei risultati ottenuti. Bisogna anche evidenziare la flessibilità dimostrata dal sistema di misura nel poter variare i diversi parametri di acquisizione in relazione alle caratteristiche dei segnali elettrici considerati. Le operazioni di misura effettuate in laboratorio hanno dato diversi spunti di discussione e una partecipazione attiva da parte degli studenti.

Bibliografia

- [1] <http://www.cma.science.uva.nl/english>
- [2] U. Amaldi, *Fisica: idee ed esperimenti*, Zanichelli, Bologna, 2001

ANGELO GIANCASPRO

Liceo Scientifico "M. Curie", Monopoli (BA)

giancasproangelo@interfree.it

► Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove

continua

1. Cos'è PISA

La rilevazione PISA (Programme for International Student Assessment) è un'indagine internazionale promossa dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico (OCSE) iniziata nell'anno 2000, che ha cadenza triennale e valuta le competenze dei quindicenni scolarizzati. Nel 2006 vi hanno partecipato 52 paesi. L'indagine mira a verificare in che misura i giovani all'uscita dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita. PISA mira a valutare non tanto la padronanza di parti del curriculum scolastico (che oltretutto sono diversi nei differenti paesi partecipanti), ma la capacità di utilizzare conoscenze e abilità apprese anche e soprattutto a scuola per affrontare problemi e compiti analoghi a quelli che si possono incontrare nella vita reale. Gli ambiti di indagine sono: *lettura*, *matematica* e *scienze* e ogni volta l'attenzione è posta prevalentemente su uno dei tre: nel 2000 *lettura*, nel 2003 *matematica* e nel 2006 *scienze*.

Nel framework del 2003, la competenza matematica (**mathematical literacy**) testata nelle prove, viene così definita: *la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.*

La rilevazione è costituita da prove scritte strutturate: domande a scelta multipla, domande aperte a risposta univoca e domande aperte a risposta articolata. Studenti e dirigenti (nel 2006 anche i genitori) hanno anche risposto ad un questionario finalizzato a raccogliere informazioni su variabili di sfondo. Gli ambiti (*idee chiave*) di indagine sono quattro: *spazio e forma* (geometria), *cambiamento e relazioni* (algebra), *quantità* (aritmetica), *incertezza* (statistica e probabilità). Sono stati inoltre individuati tre raggruppamenti di competenze, che riflettono categorie concettuali di complessità crescente, ma non una reale gerarchia di prestazioni degli studenti sulla base delle difficoltà (Tabella 1).

Tabella 1

Riproduzione	Connessioni	Riflessione
<ul style="list-style-type: none"> • Rappresentazioni e definizioni standard • Calcoli di routine • Procedure di routine • Analisi e soluzione di problemi di routine 	<ul style="list-style-type: none"> • Modellizzazione • Analisi e soluzione di problemi standard, traduzione e interpretazione • Uso di molteplici metodi ben definiti 	<ul style="list-style-type: none"> • Formulazione, analisi e soluzione di problemi complessi • Riflessione e intuizione • Approccio matematico creativo • Uso di molteplici metodi complessi • Generalizzazione

La tabella seguente mostra la distribuzione dei quesiti di matematica del 2003 per ambito e per raggruppamento di competenza:

	Cambiamento e relazioni	Spazio e forma	Quantità	Incertezza	Totale
Riproduzione	7	5	9	5	26
Connessioni	8	12	11	9	40
Riflessione	7	3	3	6	19
TOTALE	22	20	23	20	85

Per classificare i risultati degli studenti è stata costruita una scala a sei livelli che misura l'abilità degli studenti di interpretare i problemi matematici incontrati nel loro mondo, di tradurli nel contesto matematico, di usare le conoscenze matematiche e le procedure per risolverli al suo interno, di inter-

pretare i risultati nella situazione originale, di riflettere sul metodo applicato, di formulare e comunicare i risultati (Bolletta 2006).

Ordinando per punteggio medio ottenuto i 40 paesi partecipanti, l'Italia si trova al 31° posto e i risultati dei nostri studenti non possono essere considerati soddisfacenti principalmente per due motivi:

- la media di 466 punti è significativamente al di sotto di quella internazionale (500 punti)
- la variabilità interna è alta se confrontata con quella di altri paesi, ad esempio Finlandia, Canada, Belgio che, oltretutto, ottengono punteggi complessivamente molto superiori.

Il dato nazionale medio, le marcate differenze rilevate fra aree geografiche e tra tipi di istruzione, l'andamento non significativamente diverso da quello del 2000, inducono a pensare che

Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove continua

un livello accettabile di competenza per tutti e prestazioni eccellenti per una fascia sufficientemente grande di studenti sono ancora obiettivi non conseguiti (Bolletta 2005).

In particolare i ragazzi italiani hanno ottenuto risultati migliori nei quesiti che richiedono conoscenze specifiche e nei quali la formalizzazione gioca un ruolo preponderante: *quantità e spazio e forma*. Mentre i risultati sono meno soddisfacenti negli altri due ambiti.

Inoltre sia nel 2003 che nel 2000 le omissioni alle domande a risposta aperta sono sensibilmente più frequenti di quelle degli altri paesi: in particolare sono stati omessi i quesiti in cui si chiede di spiegare, di verbalizzare, di dimostrare o di giustificare. Questo fatto sembra essere in contraddizione con la dichiarazione di centralità di verifiche articolate, complesse ed aperte che caratterizza la scuola italiana (Bolletta 2002 e 2005). In realtà, nella prassi didattica italiana più diffusa le prove di verifiche sono spesso costituite da esercizi di diversa complessità, ma raramente da situazioni problematiche in cui vengano richieste l'analisi, l'individuazione di un modello matematico adeguato, la formalizzazione e la risoluzione.

2. Il rapporto fra risultati PISA 2003 e utilizzo della tecnologia

La posizione del progetto PISA riguardo all'uso della calcolatrice è che gli studenti dovrebbero poter utilizzare gli strumenti che normalmente usano a scuola e quindi non vi sono preclusioni o divieti rispetto agli strumenti.

Nella parte del questionario, indirizzato agli studenti, relativa all'utilizzo delle tecnologie erano presenti domande di carattere generale (disponibilità di un computer a casa e/o a scuola, da quanto tempo e con quale frequenza viene utilizzato, ...), relative al tipo di utilizzo (Internet, giochi, foglio elettronico, programmazione, software matematici, word processor, ...), di rilevazione di competenze specifiche (OECD 2005).

Più dell'80% degli studenti italiani dichiara di avere la possibilità di utilizzare un computer a casa e, nella stessa percentuale, a scuola. I dati cambiano quando la domanda si riferisce all'utilizzo frequente: ancora l'80% a casa, ma la percentuale scende al 50% a scuola. Due ipotesi possono essere fatte in merito alle cause di questa diversità: difficoltà logistico-organizzative di accesso ai laboratori e mancanza di prassi didattiche diffuse nell'utilizzo delle tecnologie. Non bisogna peraltro trascurare una certa diffidenza di una parte degli insegnanti nei confronti di calcolatrici e computer. A questo proposito si può ricordare che circa due anni fa nel

corso della formazione e-learning degli insegnanti del ciclo primario sulla riforma (INDIRE), il forum che ha riscosso più successo e in cui la partecipazione è stata più intensa è stato "Abbasso le calcolatrici". E frasi del tipo "gli studenti non sanno più fare i calcoli perché alle elementari lasciano usare le calcolatrici" sono ancora stereotipi diffusi fra gli insegnanti.

Nelle elaborazioni dei dati PISA 2003 sono state anche messe in relazione le performance degli studenti con i dati relativi alla disponibilità del computer.

L'ordine in cui compaiono i diversi paesi non varia sostanzialmente. Per quanto riguarda la situazione italiana, fra le performance degli studenti che dispongono di un computer a casa e quelli di coloro che non ne dispongono ci sono circa 60 punti, mentre per gli studenti finlandesi, che hanno ottenuto performance eccellenti, la differenza è di circa 40. Anche questo è un elemento che incide in modo consistente sulle differenze interne alla scuola italiana.

3. Ma perché utilizzare le tecnologie?

Innanzitutto va ricordato che in tutti i documenti europei negli ultimi anni viene sottolineata l'importanza dell'uso delle tecnologie nell'insegnamento. Ad esempio il documento dell'UNESCO del 2002 su *Information and Communication Technologies in Teacher Education* sottolinea due punti che sono da considerare nodali:

- Il potere delle ICT sarà determinato dall'abilità degli insegnanti di usare i nuovi strumenti per creare ambienti di apprendimento per i loro studenti, che siano ricchi e coinvolgenti.
- La sfida delle ICT nella formazione degli insegnanti è assicurare che sia i nuovi insegnanti sia quelli in servizio siano ben preparati ad usare i nuovi metodi, i processi, i materiali con i nuovi strumenti per l'apprendimento.

Ultimamente si stanno sviluppando nel mondo ricerche scientifiche tese a dimostrare l'effettivo guadagno formativo legato all'uso di software matematici e calcolatrici grafiche (o grafico-simboliche) nell'insegnamento/apprendimento della matematica.

In campo algebrico esiste una ricerca americana (Khoju, Jaciw, Miller 2005) che ha indagato l'effetto dell'uso delle calcolatrici, incluse quelle grafiche, sull'apprendimento della matematica. Nel report sono indicati 13 studi diversi che mostrano in modo evidente il guadagno formativo legato all'utilizzo delle calcolatrici.

Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove continua

4. Due esempi dalle prove PISA 2003

Analizziamo due quesiti PISA¹ e poniamoci la domanda "quale vantaggio potrebbe avere uno studente abituato ad utilizzare tecnologia nello studio della matematica?"

Entrambe gli esempi si riferiscono al raggruppamento delle Connessioni.

DISTANZA – Maria abita a due chilometri di distanza dalla scuola. Martina a cinque. Quanto abitano lontane Maria e Martina l'una dall'altra?

Il problema fu presentato nella fase preliminare agli insegnanti, che reagirono in modo completamente diverso:

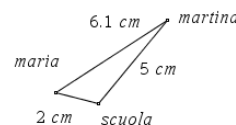
- Un gruppo consistente affermò che il quesito andava scartato perché troppo facile: "Si può facilmente vedere che la risposta è 3 chilometri".
- Un altro gruppo affermò che non era un buon quesito perché non vi era una risposta univoca.
- Un piccolo gruppo infine lo ritenne un ottimo quesito perché non aveva una soluzione già nota, ma imponeva la ricerca di una strategia e non esisteva una risposta univoca.

Proviamo ad immaginare come uno studente, abituato ad utilizzare software nello studio della matematica potrebbe affrontarlo. A questo scopo verrà utilizzato TI-nspire².

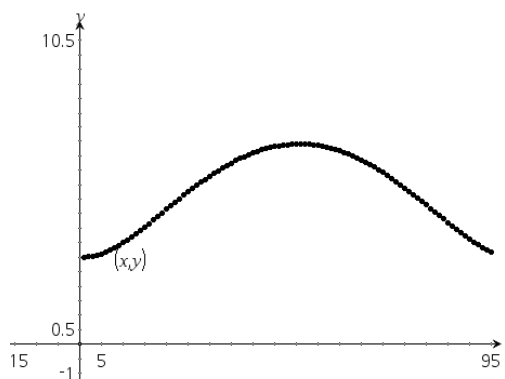
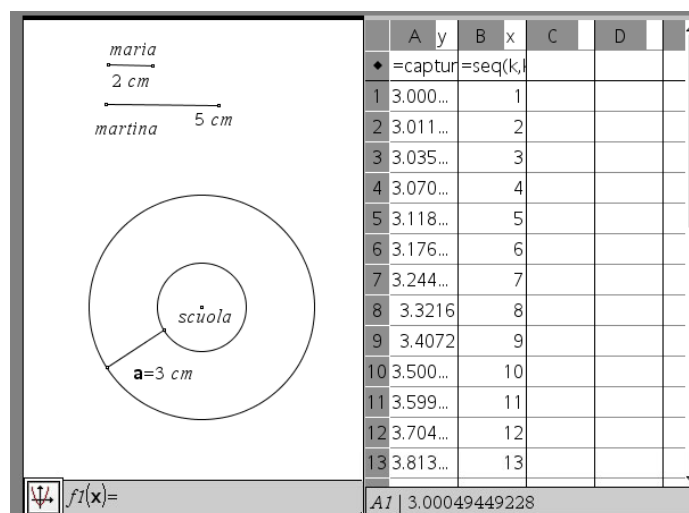
Si può ipotizzare che inizialmente uno studente provi a rappresentare la situazione nella pagina GRAFICI E GEOMETRIA, disegnando un triangolo qualsiasi, facendo inserire le lunghezze dei lati e bloccando le due distanze fisse (Maria-scuola e Martina-scuola). A questo punto comincerà l'esplorazione della situazione: ad esempio proverà a muovere Maria e la scuola controllando come varia il valore della distanza fra Maria e Martina.

¹ Per chi fosse interessato a conoscere le prove rilasciate, è possibile scaricarle dal sito INValSI, alla pagina: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2006.php?page=pisa2006_it_05, mentre quelle scartate si trovano nel volume citato in bibliografia (OECD 2004).

² Questo software della TEXAS INSTRUMENTS non è ancora commercializzato ed è stata utilizzata una β -version



$f1(x)=$



$s1$ $x \leftarrow x$ $y \leftarrow y$

Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove continua

L'esplorazione dovrebbe portarlo a vedere che la distanza fra Maria e Martina varia fra 3 e 7 chilometri e che i punti si muovono su circonferenze con centro nella scuola.

Quindi potrebbe procedere alla costruzione di due circonferenze concentriche, una di raggio 2 e l'altra di raggio 5 che rappresentino le possibili posizioni delle abitazioni di Maria e Martina rispetto alla scuola, costruire un segmento che unisca due punti presi sulle circonferenze e, muovendone uno vedere come cambia la distanza fra le case delle due amiche. TI-nspire consente anche di affiancare due pagine, in questo caso una GRAFICI E GEOMETRIA e l'altra FOGLIO ELETTRONICO; la variabile **a** (distanza fra le case) è "riconosciuta" in entrambe gli ambienti. Ora si può costruire un'animazione di uno dei due punti nella

pagina di sinistra e "catturare" i valori che assume **a** in una colonna del foglio elettronico. Scorrendo i valori si vede come la distanza fra le due abitazioni è minima (3 Km) quando sono in "congiunzione" e massima (7 Km) quando sono in "opposizione". Questo fatto può essere reso più evidente costruendo un grafico a dispersione relativo alle distanze rilevate.

Si potrebbe obiettare che non era necessario il software per rispondere alla domanda iniziale, ma è mia convinzione che essere stati abituati ad affrontare situazioni problematiche con software che aiutino a "fare esperienze" aiuti gli studenti anche nella costruzione di "immagini mentali" mettendoli in grado di fare congetture, confutarle/verificarle e rispondere a quesiti di questo tipo in modo semplice.

Analizziamo ora un altro esempio.

BATTITO CARDIACO

Per motivi di salute, le persone dovrebbero limitare i loro sforzi, ad esempio durante le attività sportive, per non superare una determinata frequenza del battito cardiaco. Per anni, la relazione tra la frequenza cardiaca massima consigliata e l'età della persona è stata descritta dalla seguente formula: **Frequenza cardiaca massima consigliata = 220 - età**

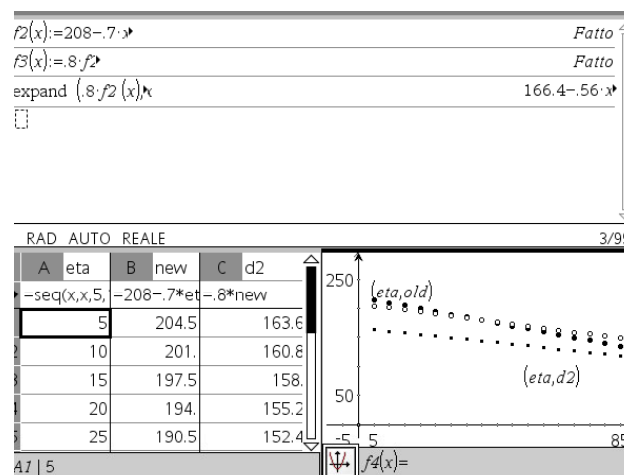
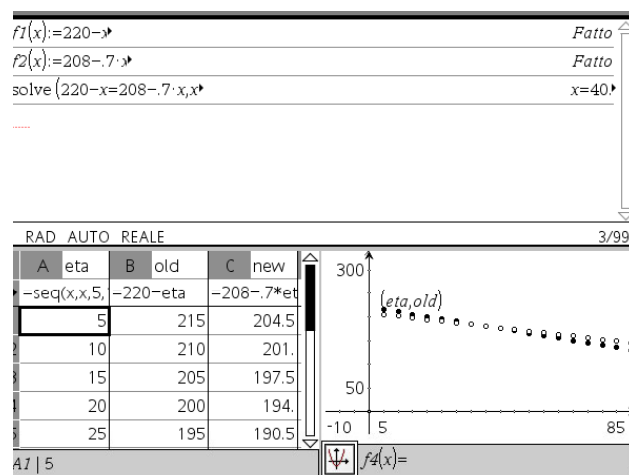
Recenti ricerche hanno mostrato che questa formula dovrebbe essere leggermente modificata. La nuova formula è la seguente: **Frequenza cardiaca massima consigliata = 208 - (0,7 × età)**

Domanda 1 - Un articolo di giornale afferma: "Una conseguenza dell'uso della nuova formula al posto della vecchia è che il numero massimo consigliato di battiti cardiaci al minuto diminuisce leggermente per i giovani e aumenta leggermente per gli anziani". A partire da quale età la frequenza cardiaca massima consigliata diventa maggiore come risultato dell'introduzione della nuova formula? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Domanda 2 - La formula **frequenza cardiaca massima consigliata = 208 - (0,7 × età)** viene usata anche per determinare quando l'esercizio fisico ha efficacia massima. Alcune ricerche hanno mostrato che l'esercizio fisico ha la massima efficacia quando i battiti sono all'80% della frequenza cardiaca massima consigliata.

Scrivi una formula che fornisca la frequenza cardiaca, in funzione dell'età, affinché l'esercizio fisico abbia la massima efficacia.

A puro titolo esemplificativo si riportano due videate di TI-nspire che mostrano come uno studente potrebbe affrontare questo quesito.



Prove PISA e tecnologia: considerazioni sulle prove

continua

È interessante osservare che le due domande, apparentemente molto simili, richiedono però competenze diverse: nel primo caso si tratta di confrontare due formule, nel secondo di "costruire" una formula, seppure molto semplice, esercizio non usuale nella prassi scolastica. Oltretutto le formule sono espresse in *linguaggio naturale*, mentre gli studenti sono abituati a confrontarsi con formule in *linguaggio algebrico* e anche questo può costituire un elemento di disorientamento. Entrambe i quesiti sono risultati essere difficili per gli studenti quindicenni.

In conclusione le capacità di modellizzazione e matematizzazione risultano molto importanti nei quesiti PISA e l'uso di software matematici che consentano esplorazioni, costruzione e verifica/confutazione di congetture può essere un supporto molto valido allo scopo della loro acquisizione.

Bibliografia

- R. Bolletta, *Le competenze matematico scientifiche in PISA*, Bologna 6 dicembre 2006, <http://www.qualser.it/index.html>
- R. Bolletta (2002), *La comparazione internazionale PISA* Lettera matematica Pristem, 43, 43-50. Springer.
- R. Bolletta (2005), *L'indagine PISA 2003*. Archimede, 2, 59-66. Le Monnier
- M. Khoju, A. Jaciw, G.I. Miller, *Effectiveness of Graphic Calculators in K-12 Mathematics Achievement: A systematic review*, Empirical Education Inc., Palo Alto, 2005
- OECD, *PISA 2003: Valutazione dei quindicenni*, OECD, Armando Editore, Roma, 2004
- OECD, *Are students ready for a technology-rich world?*, OECD Publications, 2005

AURELIA ORLANDONI, aurelia.orlandoni@libero.it

Errata - Corrigere

Gentili Lettori, nella rubrica "Domande e risposte" pubblicata nel n. 1/2006 di Ipotesi è apparsa solo una parte della mia risposta al sig. V.B.

Ecco la parte che manca all'inizio della mia risposta:

Il problema proposto dal sig. V.B. ha la immediata soluzione $X^{(-1)}*(-Y)$ per la matrice A e $(-Y)*X^{(-1)}$ per la matrice B, ove $X^{(-1)}$ e $Y^{(-1)}$ rappresentano rispettivamente le matrici inverse di X e Y (non singolari) che vengono automaticamente calcolate dalla TI-89.

Approfittiamo dell'occasione per proporre anche un'altra soluzione che utilizza la funzione di trasformazione MAT▶LIST e una interessante caratteristica offerta dal nuovo Sistema Operativo 3.10 (vedi l'articolo relativo su questo stesso numero della Rivista).

.....

*Al punto 4 c'è un errore di segno: MAT▶LIST(X*A=Y) va invece letta come
MAT▶LIST (X*A=-Y).*

Mi scuso con i Lettori e ringrazio il collega (e amico) Prof. Michele Impedovo per la pronta segnalazione degli errori.

Sebastiano Cappuccio

Prestate attenzione!

Prestiamo attenzione!

Texas Instruments, da sempre attenta alle esigenze didattiche dei docenti delle discipline scientifiche e tecniche, offre la possibilità di **richiedere in prestito** senza alcun impegno, le sue calcolatrici grafiche, per permettere agli insegnanti di sperimentarne personalmente le potenzialità senza alcuna spesa.

La richiesta può essere effettuata da insegnanti sia per workshops/training che per uso individuale.

La durata massima del prestito è di 4 settimane.

Il programma prevede la disponibilità dei seguenti prodotti

■ **TI-83 Plus** ■ **TI-84 Plus** ■ **TI-89 Titanium** ■ **Voyage™ 200** ■ **CBL 2™**
 ■ **CBR™** ■ **Kit per TI-GRAPH LINK™** ■ **ViewScreen™** ■ **TI-Presenter™**

Chiedere le calcolatrici in prestito è facile!

Le calcolatrici e i materiali richiesti vi verranno consegnati dal corriere - in una apposita valigetta - uno o due giorni prima della data richiesta. Al termine di quest'ultima, dovrete semplicemente riporre il materiale nella valigetta, applicare l'etichetta per la spedizione prepagata e chiamare il servizio consegne per il ritiro. Istruzioni più dettagliate vi verranno fornite in occasione di ciascuna spedizione.

Come si richiede il prestito?

Due modalità:

- Riempire il formulario direttamente in Internet: www.ti.com/italia/prestito.htm
- Contattare il nostro CSC Texas Instruments - Programma di prestito
Tel.: 02 80663038 - Fax: 02 80663038 - e-mail: ti-loan@ti.com

4 settimane per scoprire, provare e valutare i prodotti Texas Instruments

**Questo numero di Ipotesi e quelli precedenti
sono sul sito Internet
education.ti.com/italia**

Norme per gli autori

Vengono pubblicati articoli riguardanti l'insegnamento della matematica e delle discipline sperimentali con l'utilizzo di tecnologie.

Gli articoli, al più di 5 pagine, vanno inviati al Direttore Responsabile via e-mail:

mauro.cerasoli@alice.it

I manoscritti e il materiale non richiesto non vengono restituiti.

education.ti.com/italia

Informazioni Generali

Per maggiori informazioni o per continuare a ricevere la rivista vi preghiamo di utilizzare uno dei seguenti mezzi.

Call Center

e-mail: ti-cares@ti.com

telefono: 02 80663007

Fax: 02 80663038

Scrivi: Texas Instruments CSC
c/o SITEL
Woluwelaan 158
B-1831 Diegen, Belgio

ti-cares@ti.com

Programma Scuola

Per maggiori informazioni sul Programma Scuola TI:

Raffaella Fiz
Marketing Manager Italy

telefono: 039 6568254

fax: 039 6890120

e-mail: r-fiz1@ti.com

Texas Instruments Italia S.p.A
Via Paracelso, 14 - C.D. Colleoni
20041 Agrate B.za (MI)

Coordinamento editoriale Nicola Labianca

Tutte le calcolatrici disponibili in Europa sono prodotte secondo certificazione ISO 9000. Tutti i marchi sono proprietà dei rispettivi proprietari. Texas Instruments si riserva il diritto di modificare prodotti, specifiche, servizi e programmi senza preavviso.

Impaginato da: NEXUS S.r.l.

Stampato da: Arti Grafiche Bianca e Volta S.r.l. - Truccazzano (MI)

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

TI Technology - Beyond Numbers