

S3 – SUITES INSTABLES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : suite récurrente, suite récurrente double, suite géométrique, suite définie par une intégrale, convergence, démonstration par récurrence, intégration par partie.

1. Objectifs

Acquérir un esprit critique sur les conjectures établies sur la base de calculs approchés des calculatrices, mobiliser l'ensemble de ses connaissances pour résoudre des problèmes sur les suites.

2. Commentaires

Les compétences et connaissances en jeu dans ces problèmes, relèvent d'activités complémentaires aux applications directes du programme. Le niveau n'est pas élémentaire et relève donc de travaux dirigés bien encadrés. Toutefois, les exemples proposés sont importants puisqu'ils montrent que les calculs approchés, même avec une très grande précision, peuvent donner des résultats aberrants lorsqu'ils sont réitérés plusieurs fois. Il ne s'agit pas d'une curiosité anecdotique, mais d'une question centrale pour les programmeurs d'algorithmes.

3. Mise en œuvre

Exemple 1 :

1) Il faut vérifier l'hypothèse de récurrence pour $n = 0$ et $n = 1$, car l'égalité $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ n'est définie que pour $n \geq 0$, donc pour $n + 2 \geq 2$.

L'hypothèse de récurrence n'est pas triviale et mérite d'être précisée aux élèves :

Hypothèse à l'ordre n ($n \geq 1$) : **quel que soit** $p \leq n$, $u_p = k^p$.

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = k^n + k^{n-1} = k^{n-1}(k+1)$. On montre alors qu'avec $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $1+k = k^2$.

On en déduit que $u_{n+1} = k^{n+1}$ et donc que, pour tout $p \leq n+1$, $u_p = k^p$.

2) L'annexe à la fin de la fiche élève, montre comment obtenir une table de valeurs avec la calculatrice. Pour le nombre k , il est assez commode de stocker sa valeur dans la variable K (écran 1). Ainsi, à chaque fois que l'on en a besoin, il suffit de taper **ALPHA [K]**.

On saisit les deux formes de la suite (u_n) dans la machine (écran 2).

```
(1-√(5))/2→K
-.6180339887
```

écran 1

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
:u(n)▣u(n-1)+u(n
-2)
u(nMin)▣(K,1)▣
:V(n)▣K^n
v(nMin)▣(1)
:w(n)=
```

écran 2

n	U(n)	V(n)
20	6.6E-5	6.6E-5
30	5.3E-7	5.4E-7
40	-5E-7	4.4E-9
50	-6E-5	4E-11
60	-.008	3E-13
70	-.9809	2E-15
80	-120.6	2E-17

écran 3

À partir d'un certain rang, les deux définitions ne donnent pas les mêmes termes sur la calculatrice (écran 3). Si la deuxième définition donne une suite qui semble bien converger vers 0, ce n'est pas le cas de la première.

3) a) (v_n) est une suite géométrique, elle converge si et seulement si $|k'| < 1$ ou $k' = 1$.

On arrive à : (v_n) converge si et seulement si $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < \varepsilon \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) La démonstration se fait en posant l'hypothèse de récurrence à l'ordre n ($n \geq 1$) suivante :

$$\text{quel que soit } p \leq n, w_p = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p + \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p.$$

La divergence de la suite lorsque ε est non nul vient du 2^{ème} terme qui diverge puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

c) $(u_n) = (w_n)$ lorsque $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or, lorsque l'on saisit cette valeur dans la calculatrice, c'est une approximation à 10^{-14} près (i. e. $k + \varepsilon$) qui est mémorisée. D'où la divergence apparente de (u_n) .

Par contre, (v_n) converge car ε , très proche de 0, reste dans l'intervalle $\left] \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

Exemple 2 :

1) a) $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{5-t} dt$, d'où : $I_0 = \ln \frac{5}{4}$.

b) Pour démontrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4(n+1)}$, on encadre $\frac{t^n}{5-t}$ à partir de $0 \leq t \leq 1$. La limite de I_n est 0.

c) De $\frac{t^{n+1}}{5-t} = -t^n + 5 \frac{t^n}{5-t}$, on déduit facilement la formule de récurrence : $I_{n+1} = 5 I_n - \frac{1}{n+1}$.

2) Il faut rentrer $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$. La formule de récurrence devient donc $u_n = 5 u_{n-1} - \frac{1}{n}$ (écran 4). Tout va bien au début (écran 5), mais ... les soucis arrivent à partir de u_{18} (écran 6) !

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=5u(n-1)-1/
n
u(nMin)=ln(5/4)
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=

```

écran 4

n	u(n)
0	.22314
1	.11572
2	.07859
3	.05961
4	.04805
5	.04026
6	.03659

u(n)=.034655951

écran 5

n	u(n)
17	.00629
18	-.0241
19	-.1732
20	-.9161
21	-4.628
22	-23.19
23	-116

n=23

écran 6

3) **Explication :** Soit la suite (u_n) de 1^{er} terme u_0 et de terme général $u_n = I_n + 5^n \left(u_0 - \ln \frac{5}{4} \right)$.

a) La limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si $u_0 < \ln \frac{5}{4}$, $+\infty$ si $u_0 > \ln \frac{5}{4}$, et 0 si $u_0 = \ln \frac{5}{4}$.

b) Pour tout entier n , $u_{n+1} = 5 u_n - \frac{1}{n+1}$. Donc (u_n) et (I_n) sont définies avec la même relation de récurrence. Donc, si $u_0 = \ln \frac{5}{4}$, alors $(u_n) = (I_n)$ et elles ont pour limite 0. Si $u_0 \neq \ln \frac{5}{4}$, alors (u_n) diverge vers l'infini.

c) Lorsque l'on saisit $\ln \frac{5}{4}$ comme valeur de u_0 sur la calculatrice, l'approximation mémorisée est : 0,2231435513142 (les 3 derniers chiffres étant cachés). C'est une approximation par défaut. On est dans le cas où $u_0 < \ln \frac{5}{4}$, la limite est donc $-\infty$ et non 0.

Exemple 3 :

1) a) $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$, d'où : $I_0 = \frac{e^3 - 1}{3}$.

b) (I_n) est positive et décroissante (il suffit d'étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$). La suite (I_n) est donc convergente.

2) Par une intégration par parties, on démontre que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{e^3}{3} - \frac{n}{3} I_{n-1}$.

Après avoir saisi la suite (u_n) , on génère une table de valeurs des termes de la suite. Ca se passe comme prévu jusqu'à ce que ça déraile ... (à partir du 24^{ème} terme) !

S3 – SUITES INSTABLES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = k \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ avec $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n = k^n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2) La suite (u_n) peut donc se définir de 2 manières différentes :

1^{re} manière : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = k \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$; 2^{de} manière : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = ku_n \end{cases}$.

a) En utilisant le **MODE Sequence** de la calculatrice (voir l'**annexe** en fin de document), remplir la table de valeurs suivante, en prenant l'une puis l'autre définition de la suite :

rang n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
u_n 1 ^{re} définition										
u_n 2 ^{de} définition										

b) Qu'observe-t-on ?

3) **Explication** : On pose $k' = k + \varepsilon$ (ε est "epsilon", lettre de l'alphabet grec).

a) Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = k'v_n \end{cases}$. Pour quelles valeurs de ε la suite (v_n) converge ?

b) Soit la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 1, w_1 = k' \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n entier : $w_n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

En déduire que la suite (w_n) converge lorsque $\varepsilon = 0$, mais diverge dès que $\varepsilon \neq 0$.

c) Donner une explication au phénomène observé à la 2^{ème} question.

Exemple 2

1) Soit la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{5-t} dt$.

a) Calculer I_0 .

b) Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4(n+1)}$. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que, pour tout nombre réel $t \neq 5$, $\frac{t^{n+1}}{5-t} = -t^n + 5\frac{t^n}{5-t}$, puis prouver que, pour tout

entier naturel n , $I_{n+1} = 5I_n - \frac{1}{n+1}$.

2) En utilisant les résultats précédents, calculer les termes de rang 15 à 30 de la suite (I_n) .
Qu'observe-t-on ?

3) **Explication** : Soit la suite (u_n) de 1^{er} terme u_0 et de terme général $u_n = I_n + 5^n \left(u_0 - \ln \frac{5}{4}\right)$.

a) Étudier la limite de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0 .

- b) Démontrer que, pour tout entier n , $u_{n+1} = 5 u_n - \frac{1}{n+1}$.
- c) En déduire une explication du phénomène observé à la 2^{ème} question.

Exemple 3 :

Soit la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

- 1) a) Calculer I_0 .
- b) Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
- 2) On souhaite vérifier ces résultats à l'aide de la calculatrice.
- a) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{e^3}{3} - \frac{n}{3} I_{n-1}$.
- b) Avec le **MODE Sequence** de la calculatrice, calculer les termes successifs de cette suite pour vérifier les résultats précédents, puis chercher la limite de la suite. Qu'observe-t-on ?

ANNEXE

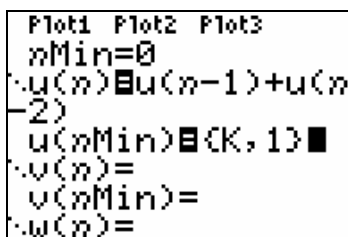
OBTENIR UN TABLEAU DE VALEURS D'UNE SUITE
Utilisation du MODE SEQUENCE de la calculatrice

- Dans **MODE** sélectionner **SEQ** (en français : **Suit**).
- Dans **Y=** (écran 1),
 - n_{Min} = indice du terme initial
 - $u(n)$ = terme général
 - $u(n_{\text{Min}})$ = valeur du terme initial (pour une suite définie par récurrence seulement).

N.B.

- $u(n)$ est défini en fonction de n , de $u(n-1)$, ou de $u(n-1)$ et $u(n-2)$
- Dans le cas d'une suite récurrente double, il y a 2 termes initiaux, $u(n_{\text{Min}})$ est alors la liste de ces valeurs initiales sous la forme $\{u_1, u_0\}$, **dans cet ordre**.
- Pour taper n : **X,T,0,n** . Pour taper u ou v : **2nd 7** ou **2nd 8** .

- Dans **2nd TBLSET** indiquer le rang du 1^{er} terme que l'on veut calculer (qui n'est pas forcément le terme initial de la suite), puis le pas avec lequel on veut lire les résultats (il doit être entier). On vérifiera que le mode **Auto** est sélectionné (écran 2).
- Appuyer sur **2nd TABLE** pour obtenir la table de valeurs des termes de la suite (écran 3).
 Flèche vers le bas pour obtenir les termes suivants de la suite.
 Flèche vers la droite pour mettre le curseur sur une valeur de la suite et obtenir en bas de l'écran une meilleure approximation.



écran 1



écran 2

n	u(n)	
0	1	
10	.00813	
20	-.00013	
30	5.3E-7	
40	-5E-7	
50	-6E-5	
60	-.008	
u(n)=6.610693E-5		

écran 3

N.B. : Dans l'écran 1, la valeur de $u(1)$ a été stockée préalablement dans la variable K .