S1f - LA DICHOTOMIE

TI-89 – Voyage™ 200

Mots-clés : suite, convergence, dichotomie, suites adjacentes.

1. Objectif

Montrer les premiers termes de suites de rationnels.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

3. Commentaires

Les deux suites que l'on définit ici sont des suites de rationnels qui convergent vers $\sqrt[3]{2}$; le calcul formel engendre une certaine évolution par rapport à ce que l'on faisait auparavant en ne donnant que des troncatures des écritures décimales de ces rationnels.
En effet, le calcul formel en mode Exact, lorsque l'on a traité de nombres rationnels, permet de montrer véritablement ces nombres car ils sont donnés par la calculatrice sous forme de fractions irréductibles au lieu des troncatures des écritures décimales de ces rationnels.

4. Mise en place

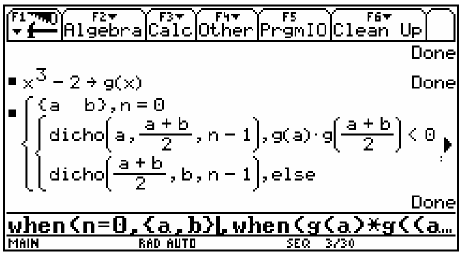
Partie A : définition de la dichotomie

$$x^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0$$

Définissons la fonction g par $g : x \mapsto x^3 - 2$, la syntaxe est :

x^ 3 – 2 → g(x)

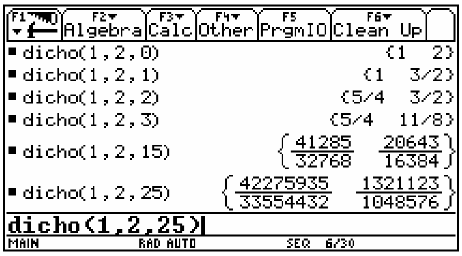
La suite dicho est une suite récurrente :
When(n=0,{a,b}, when(g(a)*g((a+b)/2)<0,dicho(a,(a+b)/2,n-1), dicho((a+b)/2,b,n-1))) →dicho(a,b,n)



écran 1

Partie B : obtention des premiers termes

On obtient alors des encadrements de plus en plus fins de $\sqrt[3]{2}$.

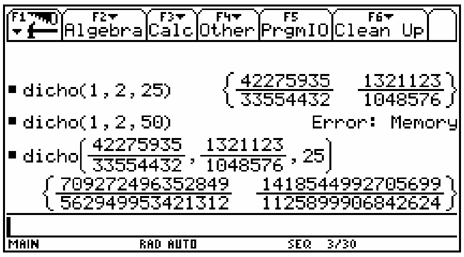


écran 2

Partie C : obtention de termes de rangs élevés

Lorsque l'on demande le 51$^{\text{ème}}$ encadrement à partir des valeurs initiales (1 , 2), la calculatrice affiche un dépassement de capacité de mémoire ; pour contourner ce dépassement, il suffit de demander d'afficher le 26$^{\text{ème}}$ à partir des valeurs renvoyées par dicho(1 , 2 , 25).

Remarque : on pourra à titre de prolongement montrer l'utilité d'avoir la valeur exacte de a_{51}, ainsi il est possible de faire calculer par la machine le cube de a_{51} et de montrer que le numérateur de la fraction obtenu diffère peu du triple de son dénominateur.



écran 3

Nom : ……………………………………………………………..….   Classe : ………………………

S1f - LA DICHOTOMIE

Soit la fonction $g : x \mapsto x^3 - 2$.

1) Montrer que la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On note $\sqrt[3]{2}$ cette solution.

2) On propose dans ce qui suit de construire des suites qui convergent vers $\sqrt[3]{2}$.
Soit (a_n) et (b_n) les deux suites définies par :
$a_0 = 1$ et $b_0 = 2$

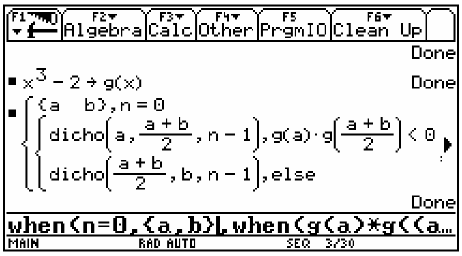
et pour tout n, $$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^3 < 2 \\ a_n & \text{si } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^3 \geq 2 \end{cases}$$

et pour tout n, $$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^3 < 2 \\ \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^3 \geq 2 \end{cases}$$

a) Donner les valeurs exactes de a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3 **.**

b) On se propose de trouver les premiers termes de ces suites avec la calculatrice.
Définir la fonction g ; la syntaxe est :

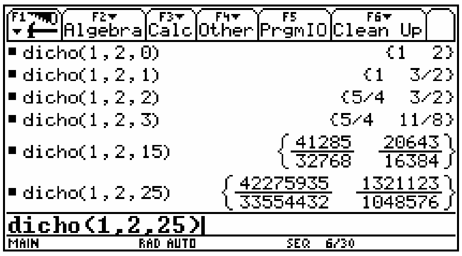
x^ 3 – 2 → g(x)



Définir ensuite la fonction dicho définie par :

When(n=0,{a,b}, when(g(a)*g((a+b)/2)<0,dicho(a,(a+b)/2,n-1), dicho((a+b)/2,b,n-1))) →dicho(a,b,n)

Taper dicho(1 , 2 , 0). Expliquer pourquoi la calculatrice renvoie $\{a_0 \;\; b_0\}$.
Que renvoie la calculatrice lorsque l'on tape dicho(1 , 2 , 1) ? dicho(1 , 2 , 2) ? dicho(1 , 2 , 3) ?



Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

