N2 – LE NOMBRE D'OR

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : calculs numériques exacts et approchés, calculs algébriques, conjectures, preuves.

1. Objectifs

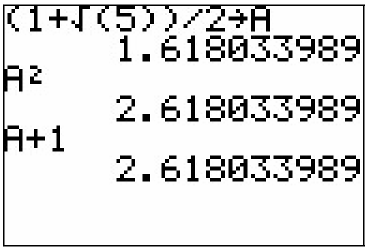
Utiliser la calculatrice pour établir des conjectures. Comparer des nombres. Effectuer des calculs algébriques et vérifier les résultats établis à l'aide de la calculatrice. Découvrir quelques propriétés algébriques et géométriques du nombre d'or.

2. Énoncé

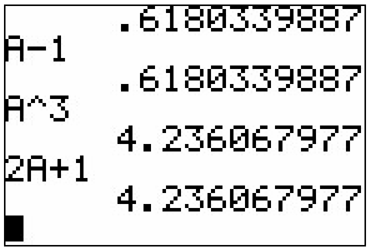
Voir fiche élève.

3. Mise en place et commentaires

Pour ranger la valeur approchée de a en mémoire A on saisit au clavier le calcul de a puis on appuie sur la touche **STO>** puis sur **ALPHA [A]** et sur **ENTER**.
Une fois le nombre a stocké en mémoire dans la calculatrice, celle-ci permet aisément de faire les conjectures souhaitées, comme le montrent les *écrans* 1 et 2.



écran 1



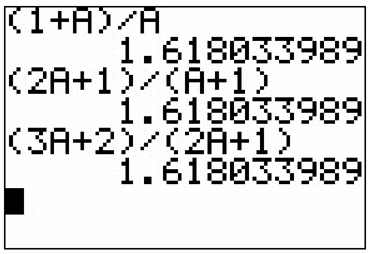
écran 2

L'égalité des nombres a^2 et $a + 1$ est établie à la main en développant $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2$.

Les autres égalités peuvent être établies d'une manière analogue, ou bien en utilisant la propriété maintenant démontrée : $a^2 = a + 1$.
On peut écrire par exemple : $a^3 = a^2 . a = (a + 1)\, a = a^2 + a = (a + 1) + a = 2\, a + 1$.

On peut faire remarquer que si $a^2 = a + 1$ alors $\dfrac{a^2}{a} = \dfrac{a+1}{a}$ ou encore $a = 1 + \dfrac{1}{a}$ qui conduit à $\dfrac{1}{a} = a - 1$.

Le début de la question **3)** se fait en utilisant la calculatrice comme le montre l'*écran* 3.



écran 3

On conjecture alors à ce stade que le quotient de la longueur par la largeur de chacun des rectangles semble rester égal au nombre d'or.

Rectangle 1 : $\dfrac{a}{1} = a$.

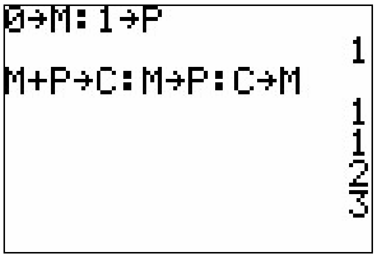
Rectangle 2 : $\dfrac{a+1}{a} = \dfrac{a^2}{a} = a$.

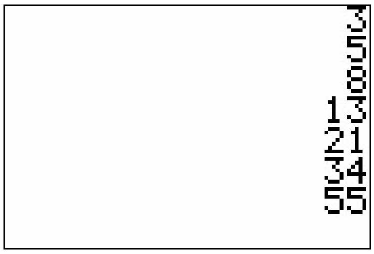
Rectangle 3 : $\dfrac{2a+1}{a+1} = \dfrac{a^3}{a^2} = a$ (il a été démontré question **2)** que $a^2 = a + 1$ et que $a^3 = 2\,a + 1$).

Rectangle 4 : $\dfrac{3a+2}{2a+1} = \dfrac{2a+1+a+1}{a^3} = \dfrac{a^3+a^2}{a^3} = \dfrac{a^2(a+1)}{a^3} = \dfrac{a^2.\,a^2}{a^3} = a$.

On trouve pour les questions **4b** et **4c** :
$a^5 = 5\,a + 3$ et $a^{n+1} = a^n.\,a = (m.\,a + p).\,a = m.\,a^2 + p.\,a = (m + p).\,a + m$.
La règle est alors établie, pour passer de a^n à a^{n+1}, le nouveau coefficient de a s'obtient en ajoutant les deux coefficients de a^n et le deuxième coefficient de a^{n+1} est égal au premier coefficient de a^n.
Le tableau est alors le suivant, on peut en vérifier le contenu avec la méthode présentée à l'écran de la calculatrice.

n	a^n	m	p
0	1	0	1
1	a	1	0
2	a^2	1	1
3	a^3	2	1
4	a^4	3	2
5	a^5	5	3
6	a^6	8	5
7	a^7	13	8
8	a^8	21	13
9	a^9	34	21
10	a^{10}	55	34

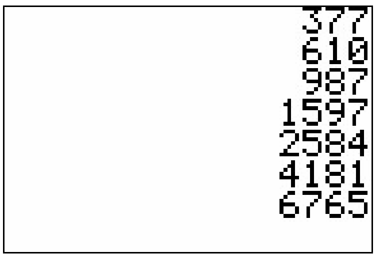




Question **4d** : $a^{10} = 55\,a + 34 = 55\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] + 34 = \dfrac{55}{2}\sqrt{5} + \dfrac{123}{2}$.

Le calcul de a^{20} peut alors se faire de plusieurs manières :

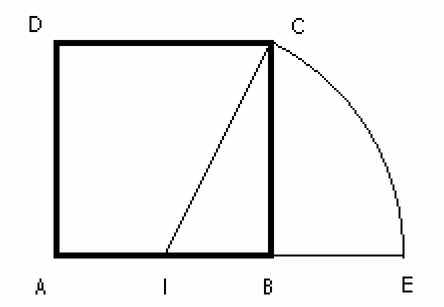
- en écrivant $a^{20} = (a^{10})^2 = (55\,a + 34)^2 = 3025\,a^2 + 3740\,a + 1156 = 6765\,a + 4181$.
$$a^{20} = \frac{6765}{2}\sqrt{5} + \frac{15127}{2},$$
- ou bien en prolongeant le calcul des coefficients à l'aide de la calculatrice :



Nom .... Classe ....

N2 – LE NOMBRE D'OR

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

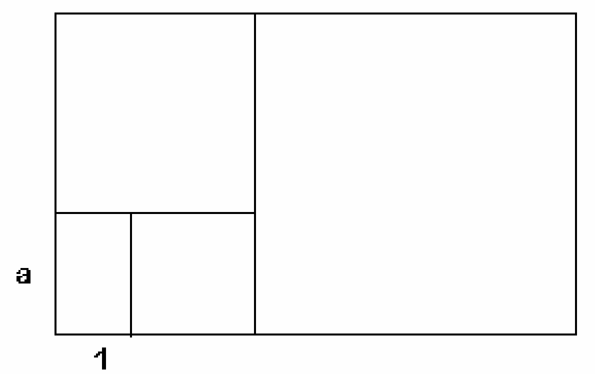


Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 1, I est le milieu de $[AB]$; on a construit sur (AB) le point E tel que $IE = IC$.

1) Calculer la valeur **exacte** de la longueur AE.
Dans tout ce qui suit, ce nombre sera noté a
(ce nombre s'appelle le nombre d'or).

2) Saisir le nombre a et le ranger dans la mémoire A de la calculatrice.

A l'aide de la machine, calculer a^2 et $a + 1$. Procéder de même avec les nombres $\frac{1}{a}$ et $a - 1$ puis avec les nombres a^3 et $2\,a + 1$. Qu'observe-t-on ?
En utilisant la valeur exacte de a et en effectuant les calculs **à la main**, établir les égalités observées à la calculatrice.



3) Au rectangle de largeur 1 et de longueur a (un tel rectangle est appelé rectangle d'or), on accole un carré de côté a. Au nouveau rectangle ainsi obtenu on accole un carré de côté $1 + a$ et on répète ainsi l'opération ... (voir la figure ci-contre).
Calculer en fonction de a les dimensions des cinq premiers rectangles obtenus, puis, à la calculatrice, calculer une valeur approchée du quotient de la longueur par la largeur de chacun de ces rectangles.
Recopier et compléter le tableau suivant.

Rectangle	1	2	3	4
Longueur L	a			
Largeur l	1			
$\frac{L}{l}$				

A la main, et sans faire de longs calculs, démontrer ce qui vient d'être observé.
(On pourra remarquer que $a + 1$ peut être remplacé par a^2, $2\,a + 1$ par a^3…)

4) Recherche des puissances successives de *a*
a) Compléter le tableau ci-après en écrivant les nombres a^3, a^4 et a^5 sous la forme $m\,a + p$ où les deux nombres m et p sont des entiers que l'on calculera (on vérifiera chacun des résultats trouvés à l'aide de la calculatrice).

a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
$0.a + 1$	$1.a + 0$	$1.a + 1$			

b) Généralisation
On suppose que, n désignant un nombre entier, on a réussi à trouver deux nombres m et p tels que $a^n = m\,a + p$. Comment, dans ce cas, va s'écrire a^{n+1} ?
Comment passe-t-on de a^n à a^{n+1} ?
Contrôler la réponse à l'aide des résultats donnés au **4 a**.

Nom .... **Classe** ....

c) Recopier et compléter le tableau ci-contre.

n	a^n	m	p
0	1	0	1
1	a	1	0
2	a^2	1	1
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Afficher la séquence ci-contre à l'écran de la calculatrice et appuyer ensuite plusieurs fois sur la touche **ENTER**. Observer et expliquer.

```
0→M:1→P
                  1
M+P→C:M→P:C→M
```

d) Déduire de ce qui précède l'écriture des réels a^{10} et a^{20} sous la forme $r\sqrt{5}+s$ où r et s sont des nombres que l'on calculera.
Vérifiez les réponses en calculant à l'aide de la calculatrice les réels a^{10} et a^{20} et en les comparant aux résultats trouvés.