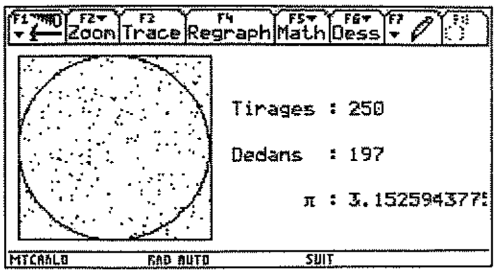
18. Programmer avec la Voyage 200 : écrire un programme.

Simulation du calcul de Pi par la méthode de Monte-Carlo.

Le principe : on place de manière aléatoire des points dans un carré de côté 2 dans lequel est inscrit un cercle de rayon 1. Le quotient du nombre de points tirés à l'intérieur du cercle sur le nombre total approche le rapport de l'aire du cercle à celle du carré qui vaut $\frac{\pi}{4}$.



On approche $\frac{\pi}{4}$ par le quotient $\frac{197}{250}$

- Ecrire un nouveau programme nommé par exemple `pimc`

Programme commenté.

```
pimc()
Prgm
```

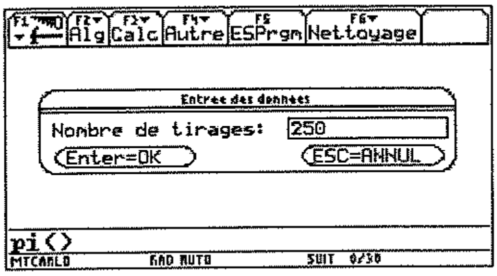
Les variables déclarées « locales » seront effacées à la fin de l'exécution du programme. De plus elles n'interfèrent pas avec d'éventuelles variables de même nom définies dans une autre application de la Voyage 200.

```
Local n,i,x,y,d,p
```

La séquence `Dialog` ... `EndDlog` ouvre, à l'exécution, une boîte de dialogue permettant de demander à l'utilisateur le nombre de tirages souhaité. Il sera stocké ici dans la variable n.

```
Dialog
Title "Entrée des données"
Request "Nombre de tirages",n
EndDlog
```

Les boîtes de dialogues ne sont pas autorisées dans l'écriture des fonctions.




```
expr(n)→n
```

L'instruction `request` affecte à une variable une chaîne de caractères. L'instruction `expr` transforme son argument en une expression.

Le symbole © permet de commenter le programme.

Un programme peut modifier des variables systèmes de la Voyage 200. Ce programme affecte la valeur des variables de cadrage de l'écran graphique.

Pour réunir sur une même ligne plusieurs instructions, il suffit de les séparer par « : ».

Les lignes suivantes initialisent l'écran graphique, tracent les côtés du carré, le cercle et les textes de la partie droite de l'écran

```
©Préparation des affichages
⁻1.1→xmin:3.8→xmax:⁻1.1→ymin:1
.1→ymax
EffDess:AffGraph:défGraph("Axe
s","Off")
Cercle Ø,Ø,1
Lign ⁻1,1,1,1:Lign ⁻1,⁻1,1,⁻1
Lign ⁻1,⁻1,⁻1,1:Lign 1,1,1,⁻1
PtTexte "Tirages :",1.2,.5
PtTexte "Dedans  :",1.2,Ø
PtTexte "      π :",1.2,⁻.5
```

L'instruction `PtTexte` affiche une chaîne de caractère à l'emplacement indiqué.

Le calcul de simulation.

On initialise à 0 la variable d qui comptera les points dans le cercle. Puis on effectue le tirage des n points à l'aide d'une boucle For … EndFor.

Un point du carré est modélisé par son abscisse x et son ordonnée y, comprises dans l'intervalle [-1,1] et tirées au hasard par un appel à la fonction nbrAléat(). Cette fonction retourne un nombre aléatoire de l'intervalle [0,1].

```
©
Ø→d
For i,1,n
2*nbrAléat()-1→x:2*nbrAléat()-
1→y
```

On affiche le point correspondant.

```
PtAff x,y
```

On teste par un calcul de distance si le point est dans le cercle, auquel cas on ajoute 1 à d.

```
If x^2+y^2<1 Then
d+1→d
EndIf
```

On met à jour à chaque tirage, la nouvelle valeur approchée de π et les affichages.

```
approx(4*d/i)→p
PtTexte chaîne(i),2.4,.5
PtTexte chaîne(d),2.4,Ø
PtTexte chaîne(p),2.4,⁻.5
```

Pour éxécuter le programme, taper `picm()` ENTER dans l'écran principal.

<u>Prolongement</u> : écrire un programme qui approche l'aire limitée par la courbe d'une fonction, l'axe des abscisses et deux verticales données.

```
EndFor
EndPrgm
```

19. Utiliser le tableur CellSheet – Etude des suites géométriques.

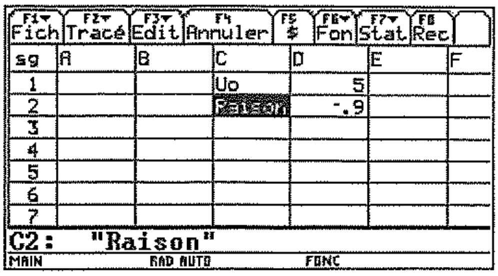
Etude de l'influence du premier terme Uo et de la raison r sur le comportement d'une suite géométrique Un.

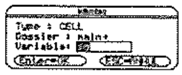
- Ouvrir une nouvelle feuille de calcul.

Choisir dans [APPS] l'application CellSheet, puis nouveau et nommer sg par exemple cette nouvelle feuille de calcul.

- Définir le premier terme et la raison.

On active une cellule en s'y déplaçant avec les flèches. Une chaîne de caractères est notée entre guillemets. Dans un tableur, les textes sont alignés par défaut à gauche, les valeurs numériques à droite.



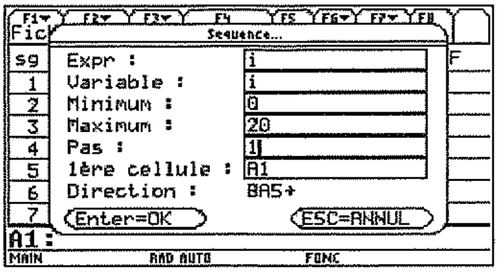


Noter les chaînes entre guillemets évite la confusion avec une éventuelle variable de même nom.

- Définir les indices et valeurs de la suite Un.

Dans la colonne A, on va entrer les indices de 0 à 20. Activer la cellule A1, puis choisir l'instruction séquence du menu [F3]. Renseigner les champs comme ci-contre.

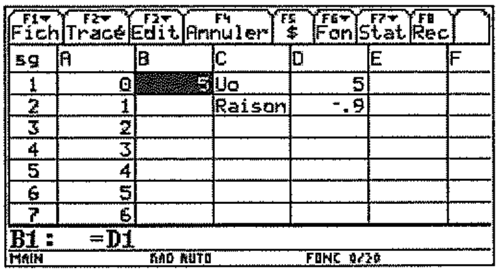
Après validation, la colonne A contient les entiers de 0 à 20.



- Définir en B1 le premier terme de la suite.

Se placer en B1 et définir son contenu comme étant égal à D1. La cellule B1 doit contenir le texte suivant : =D1.

On peut tout écrire au clavier ou faire écrire la référence d'une cellule dans une expression en utilisant la touche [STO▸], en activant la cellule voulue puis la touche [ENTER].



On peut paramètrer chaque colonne (largeur, format d'affichage, …) à l'aide du menu Edit ([F3][8])

- Définir en colonne B les termes de la suite.

On va utiliser ici une définition par récurrence. Chaque terme de la colonne B, à partir de B2 et jusqu'à B21, est défini en multipliant le terme précédent (référence relative) par la raison située en D2 (référence absolue).

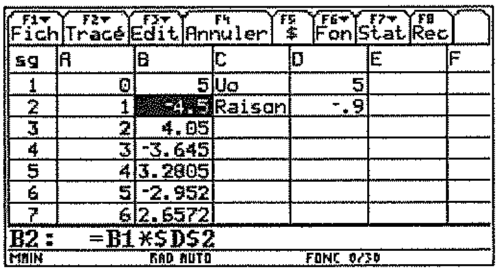
La définition de la cellule B2 est donc : =B1*D2, expression qu'on va recopier vers le bas. La référence relative B2 va s'incrémenter en B3…, au contraire de la référence absolue D2. Le caractère $ s'obtient par la touche [F5]

Pour recopier vers le bas :

sélectionner la cellule B2 et la copier (par [◆][C] ou par [F1][5])

sélectionner la plage de cellule B3:B21 (en utilisant la touche majuscule [⇑]en même temps que la flèche vers le bas ou par le menu Edit [F3][2])

Coller l'expression (par [◆][V] ou par [F1][6]).



On peut ensuite changer la premier terme ou la raison. Le calcul des termes de la suite s'actualise en quelques instants.

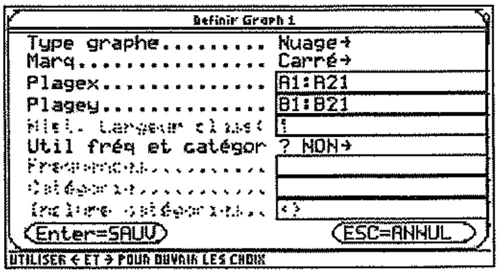
- Représenter graphiquement les termes de la suite Un.

On peut faire le lien entre les cellules d'une feuille de calcul et les graphiques statistiques.

Sélectionner la plage de cellules à représenter (A1:B21) par l'une des méthodes vue plus haut.

Choisir Config Tracé dans le menu Tracé ([F2][1]), sélectionner l'un des graphes et appuyer sur [F1] pour le définir.

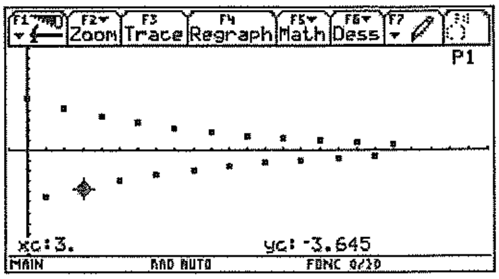
Remarque : on pourrait aussi indiquer à ce moment la plage de cellules à représenter, au lieu de la selectionner au préalable.



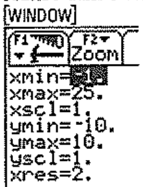
Penser éventuellement à desactiver les autres courbes et graphiques pour éviter des interférences à l'écran.

Afficher l'écran graphique permet alors la représentation des termes de la suite.

La touche [F3] active le mode Trace et permet de parcourir le graphique.



Le cadrage correspondant à l'écran ci_contre, réalisé dans l'écran [WINDOW]



- On peut maintenant faire des allers et retours entre le tableur et l'écran graphique pour illustrer l'influence du premier terme et de la raison sur le comportement de la suite.

(Pour l'actualisation du graphique, il est nécessaire après chaque modification de la feuille de calcul, d'ouvrir l'écran Config Tracé et de valider par [ENTER])

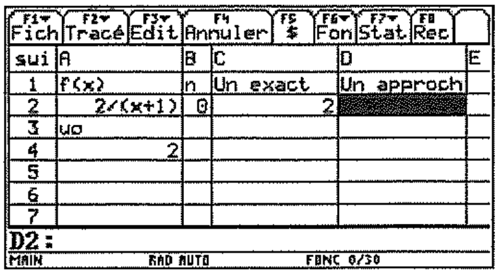
20. Utiliser le tableur CellSheet – Exploiter le calcul formel.

1) Fabriquer une feuille de calcul générale pour l'étude des suites récurrentes.

Soit u_n la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$.

On peut modéliser la relation de récurrence par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

Créer une nouvelle feuille de calcul, nommée Sr par exemple, puis remplir les cellules pour obtenir l'écran ci-contre.



F1 Fich | F2 Tracé | F3 Edit | F4 Annuler | F5 $ | F6 Fon | F7 Stat | F8 Rec

sui	A	B	C	D	E
1	f(x)	n	Un exact	Un approch	
2	2/(x+1)	0	2		
3	uo				
4	2				
5					
6					
7					

D2:

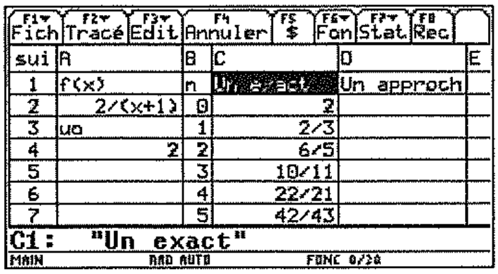
MAIN RAD AUTO FONC 0/30

Un tableur est particulièrement adapté au calcul des termes d'une suite.

Les cellules de la première ligne sont des étiquettes permettant d'indiquer la nature du contenu des colonnes.

La colonne B va contenir à partir de B2, l'indice des termes de la suite. On peut la construire à l'aide de la fonction `séquence`, ou en ajoutant 1 à la cellule précédente.

La colonne C va contenir les termes successifs de la suite u_n.
Connaissant le terme u_n de la suite, $u_{n+1}=f(u_n)$, ce qui peut s'exprimer pour la cellule C3 par `=A2|x=C2` (c'est à dire calculer 2 /(x+1) sachant que x vaut 2)



F1 Fich | F2 Tracé | F3 Edit | F4 Annuler | F5 $ | F6 Fon | F7 Stat | F8 Rec

sui	A	B	C	D	E
1	f(x)	n	Un exact	Un approch	
2	2/(x+1)	0	2		
3	uo	1	2/3		
4	2	2	6/5		
5		3	10/11		
6		4	22/21		
7		5	42/43		

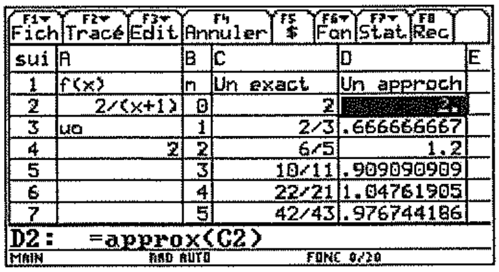
C1: "Un exact"

MAIN RAD AUTO FONC 0/30

Il suffit ensuite de reproduire le processus en recopiant ves le bas.
La calculatrice donne en colonne C les valeurs exactes des termes de la suite. Dans le cas particulier de cette suite, il est possible de remarquer une régularité, qui une fois prouvée, peut donner une démonstration de la convergence.

L'écriture décimale approchée est obtenue en définissant la cellule D2 par `=approx(C2)` et en recopiant vers le bas.

Pour recopier une expression vers le bas :
Sélectionner puis copier la cellule à recopier, sélectionner la plage devant recevoir la recopie, puis coller.
Les commandes nécessaires sont présentes dans le menu F1 et F3.
Voir aussi la fiche précédente.



F1 Fich | F2 Tracé | F3 Edit | F4 Annuler | F5 $ | F6 Fon | F7 Stat | F8 Rec

sui	A	B	C	D	E
1	f(x)	n	Un exact	Un approch	
2	2/(x+1)	0	2	2.	
3	uo	1	2/3	.666666667	
4	2	2	6/5	1.2	
5		3	10/11	.909090909	
6		4	22/21	1.04761905	
7		5	42/43	.976744186	

D2: =approx(C2)

MAIN RAD AUTO FONC 0/30

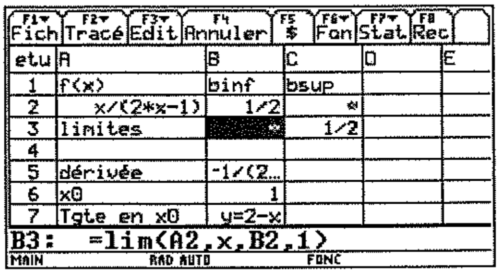
Pour étudier une autre suite, il suffit de redéfinir l'expression saisie en A2 ou la valeur du premier terme située en A4.
Après quelques instants, l'ensemble de la feuille est recalulée.

Pour éviter le recalcul systématique de toute la feuille dès le moindre changement, il est possible de régler dans le format de la feuille (F1 9), la valeur `Autocalc` à NON. La recalcul sera réalisé sur ordre à l'aide de la touche F8.

2) Une feuille de calcul pour automatiser l'étude d'une fonction.

Le principe utilisé généralise l'idée de l'exemple précédent.
En A2 est définie l'expression de la fonction, en B2 et C2 les bornes de l'intervalle d'étude.

En B3 on calcule $\lim f(x)$, *pour* $x \to \frac{1}{2}+$, ce qui s'écrit comme l'indique l'écran ci-contre, en C3 la limite à l'infini, …



F1 Fich | F2 Tracé | F3 Edit | F4 Annuler | F5 $ | F6 Fon | F7 Stat | F8 Rec

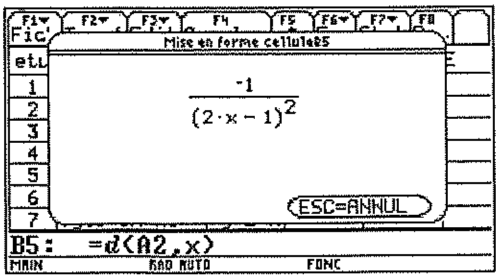
etu	A	B	C	D	E
1	f(x)	binf	bsup		
2	x/(2*x-1)	1/2	∞		
3	limites	∞	1/2		
4					
5	dérivée	-1/(2…			
6	x0	1			
7	Tgte en x0	y=2-x			

B3: =lim(A2,x,B2,1)

MAIN RAD AUTO FONC

Pour obtenir une équation cartésienne de la dérivée en x0, on peut utiliser la fonction `tg` définie dans la fiche 12, ou réécrire entièrement l'expression.

L'affichage de l'expression de la dérivée dépasse la largeur de la colonne. Pour obtenir un affichage complet et sous la forme usuelle d'une expression, sélectionner la cellule B5 et utiliser le menu `Affich. mise en forme (F3 9)`



Pour étudier avec cette feuille, une autre fonction définie sur un autre intervalle, il suffit de changer l'expression de f(x) et les valeurs de `binf` et `bsup`.
On peut aussi imaginer faire calculer une table de valeurs, une primitive, un développement limité …

A2. Problème du bac 2002 Série S.

Introduction : *cette fiche a pour objectif de réaliser une synthèse, en situation de résolution de problème, des principales fonctions de la Voyage 200.*
Bien qu'elle réalise la totalité des calculs et graphiques nécessaires à la résolution, la Voyage 200 n'indique pas quels calculs effectuer, n'en donne pas automatiquement les détails, et ne rédige pas la solution du problème...

Partie A - Enoncé :

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = 0,5(x + (1-x)e^{2x})$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O; i , j).(Unité graphique 2 cm)
1)a) *Déterminer les limites de f en -oo et en +oo.* ***b)*** *Montrer que la droite (d) d'équation y = x/2 est asymptote à C. Etudier la position de C par rapport à (d).*
2) *Montrer que f est dérivable sur* ***R*** *et calculer f '(x).*
3) *Soit u la fonction définie sur* ***R*** *par $u(x) = 1+ (1 - 2x)e^{2x}$.* ***a)*** *Etudier le sens de variation de u.* ***b)*** *Montrer que l'équation u(x)=0 possède une solution unique α dans l'intervalle [0;1]. Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.*
c) *Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x.*
4) *Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.*

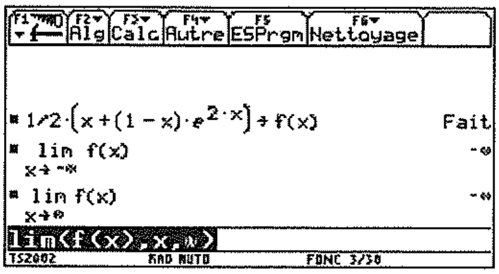
Question 1

- Définition de la fonction f. (*fiche 10*)

On pourait aussi mémoriser l'expression de f(x) dans Y1 à partir de l'écran [Y=]de définition des fonctions à représenter.

- Calcul des limites (*fiche 13*)

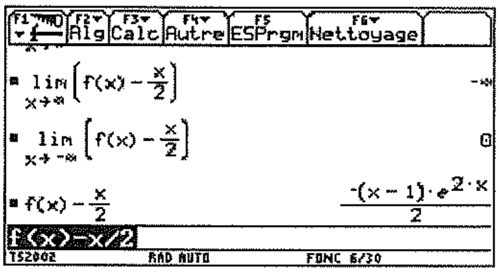
La fonction `lim` se trouve dns le menu `Calc` accessible par [F3][3].



Le symbole [∞] ne doit pas être précédé du signe +.

- Recherche d'une asymptote.

Les calculs de limites montrent que (d) est asymptote à la courbe de f au voisinage de moins l'infini.
L'étude du signe de l'expression f(x)-x/2 qui est celui de -(x-1) permet de déterminer le position relative de la courbe C et de son asymptote. Au voisinage de -∞, C est au dessus de son asymptote.



Question 2

- Calcul de la dérivée

La calculatrice n'indique pas si f est dérivable, mais calcule l'expression de la fonction dérivée. (*fiche 12*)

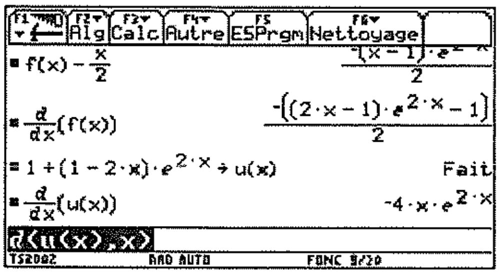
Question 3

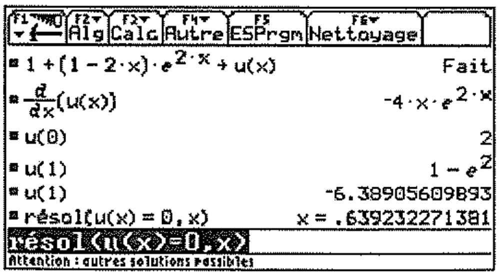
- Définir u(x).

L'expression de u'(x) permet de lire son signe et d'en déduire que u est croissante sur]-∞,0] et décroissante sur [0,∞].
u est donc décroissante et continue entre 0 et 1.

- Calcul de u(0) et de u(1).

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on prouve l'existence et l'unicité de α sur]0,1[tel que u(α)=0.
La fonction `résol` (*fiche 7*) permet de résoudre des équations de manière exacte si c'est possible, en donnant un résultat approché sinon.
Une alternative pour encadrer α serait d'utiliser une table de valeurs de la fonction f (*fiche 10*).





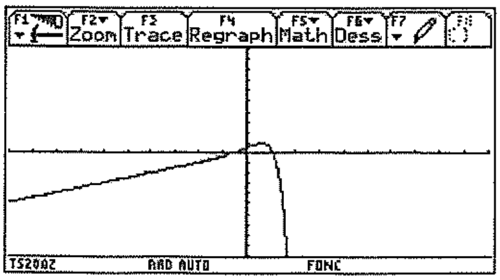
On obtient un calcul approché en utilisant simultanément les touches [◆][ENTER].

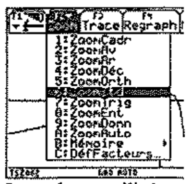
Si plusieurs solutions approchées existent, la Voyage 200 ne retourne que la première trouvée.

- **Représentation graphique**

Tous les élements nécessaires à la réalisation du tableau de variation sont réunis. Pour obtenir la représentation graphique de f, deux méthodes possibles :

- Définir `Y1(x)` par f(x) dans l'écran [Y=] et afficher l'écran graphique [◆][GRAPH] (*fiche 11*)
- Utiliser la commande de graphe depuis l'écran principal [F4][2] `f(x)` [ENTER].





Le cadrage utilisé ici est celui du zoom standard.

Partie B. - Enoncé :

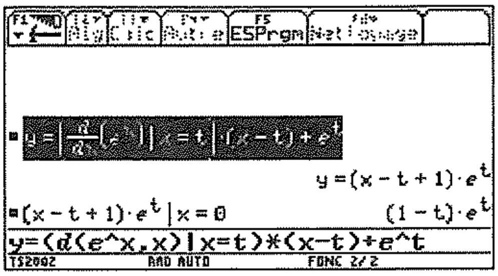
Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; i , j), on considère la courbe Γ d'équation y=e^x et la droite D d'équation y=x
1) *Soit t un réel ; on désigne par Mt le point de Γ d'abscisse t. La tangente à Γ au point Mt coupe l'axe des ordonnées au point Nt. Déterminer les coordonnées du point Nt.*
2) *On désigne par Pt le point de D d'abscisse t et par Gt l'isobarycentre des points O, Mt, Pt et Nt.* ***a)*** *Placer les points M_{-2}, P_{-2} et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la feuille annexe.* ***b)*** *Déterminer en fonction de t les coordonnées du point Gt.*
3) *Quel est l'ensemble des points Gt, quand t décrit R ?*

Question 1

- Equation de la tangente à Γ au point d'abscisse t (*fiche 12*)

On utilise la formule y=f '(t)(x-t)+f(t).
d(e^x,x) | x=t, peut se lire : dériver l'expression e^x par rapport à x et remplacer x par t.

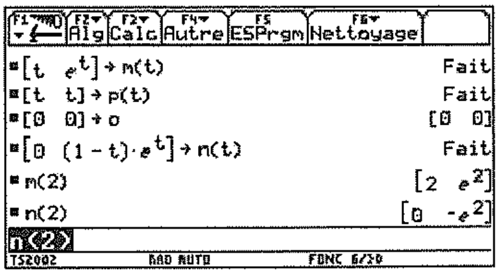
- L'ordonnée de Nt s'obtient en remplaçant x par 0.



On aurait pu aussi utiliser l'une des méthodes décrites la fiche 12.

Question 2

- Les 3 points dont les coordonnées dépendent de t peuvent être modélisés par une fonction paramétrique. L'origine 0 peut être représentée par le vecteur [0,0]

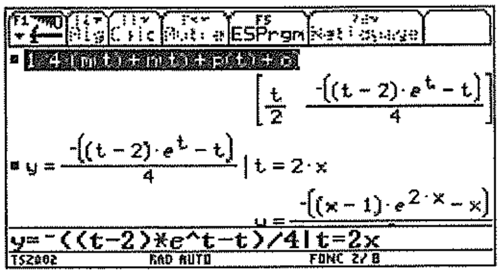


Dans la voyage 200, la structure de vecteur est en fait assimilée à une matrice ligne, d'où la syntaxe qui utilise des doubles crochets.

- Les coordonnées de l'isobarycentre Gt s'obtiennent alors par un calcul de moyenne.

Question 3

- On retrouve l'équation de la courbe C en substituant 2x à t.

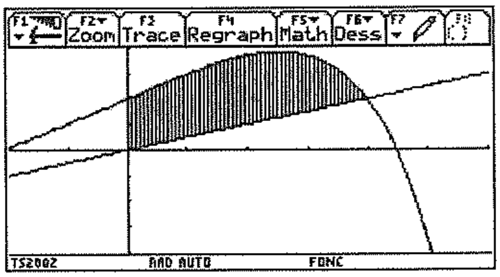


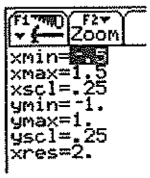
Partie C- Enoncé :

1) Construire la courbe C de la partie A sur la feuille annexe à votre sujet.
2) Calculer l'aire A, en cm², du domaine plan délimité par la courbe C, la droite (d) et les droites d'équation x = 0 et x = 1 (on pourra utiliser une intégration par parties).

Question 1

Le tracé de la courbe C et de la droite (d) a été obtenu en définissant respectivement Y1(x) par f(x) et Y2(x) par x/2 dans l'écran [Y=]. Le cadrage de l'écran [WINDOW] a été choisi en fonction de l'aire à calculer.
Les hachures s'obtiennent dans le menu Math par [F5][C]. Il suffit ensuite de désigner les courbes et les bornes.





Question 2

L'aire à calculer est donc l'intégrale de f(x)-x/2 prise entre 0 et 1.
L'unité du repère étant 2cm, l'aire en cm² en est donc le quadruple.