G1f – ÉTUDE DE LIEUX DE POINTS

TI-89 – Voyage 200

Mots-clés : lieu de points, transformations planes, nombre complexe, affixe.

1. Objectifs

Construire une figure. Visualiser certaines propriétés et conjecturer des lieux géométriques de points à l'aide de cette figure. Démontrer les résultats attendus à l'aide des nombres complexes, en se servant de la calculatrice.

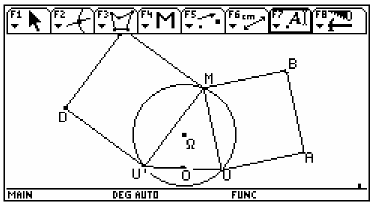
2. Énoncé

Voir fiche élève.

3. Mise en œuvre

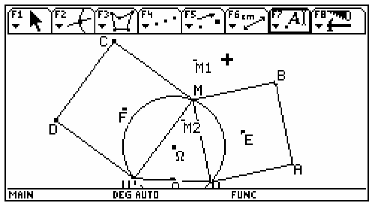
- **Construction de la figure**

On commence par créer un point, que l'on nomme Ω (**2nd [CHAR] 1 K**), puis un cercle de centre Ω, **F3 1**, sélectionner le point Ω , **ENTER**, puis un second point (sur la circonférence), **ENTER**.
U, *U'* et *M* sont trois points créés sur le cercle : **F2 2**, puis sélectionner pour chacun un point du cercle.
On trace ensuite le segment [*U U'*], ainsi que le milieu de ce segment (**F4 3**, puis sélectionner le segment). On nomme ce milieu *O*.
On construit les carrés (*écran* 1) ; on peut, par exemple, utiliser des rotations de mesure 90° (on vérifiera que l'on est bien en mode degré).



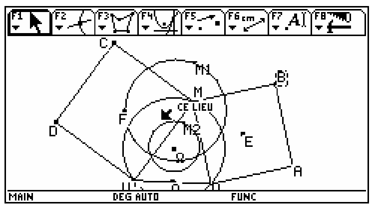
écran 1

On crée les centres des deux carrés : **F4 3 : Milieu**, on sélectionne *M* puis *A*. On opère de même avec *D* et *M*.
On crée les points M_1 et M_2 respectivement milieu de *B* et *C* d'une part et de *E* et *F* d'autre part (*écran* 2).
On peut aussi définir *V*, image de *U* par la rotation de centre *O* et de mesure 90° : **F7 6 : Nombre ENTER 9 0**,
F5 2 : Rotation, sélectionner *U*, puis *O*, puis le nombre 90.



écran 2

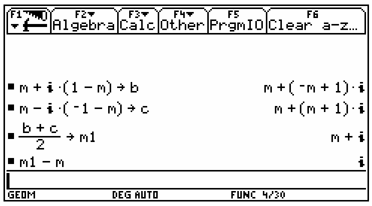
L'outil **lieu** permet de visualiser les lieux $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$: **F4 A**.
On sélectionne le point M_1, puis *M*. On obtient $\mathcal{L}_1$. C'est un cercle.
On obtient le lieu $\mathcal{L}_2$ en sélectionnant en premier le point M_2.
On peut conjecturer que les deux lieux sont des cercles (*écran* 3), il reste à le démontrer...
En saisissant le point *M* à l'aide de la touche ☞ et en le déplaçant sur le cercle, on peut aussi conjecturer que *V* est le milieu du segment [*AD*].



écran 3

- **Démonstration**

1) B d'affixe b est l'image de U (1) par la rotation de centre M (m) et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, C (c) étant l'image de U' (-1) par la rotation de même centre et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
Ceci se traduit par : $b - m = i(1 - m)$; $c - m = -i(-1 - m)$.
Attention, prendre $\boldsymbol{i}$ complexe : **2nd [*i*]** .
Le point M_1 (m_1) étant le milieu du segment [BC], on peut déterminer son affixe. On voit que M_1 est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OV}$, d'affixe i (*écran* 4).
Le lieu $\mathcal{L}_1$ est donc le cercle $t_{\overrightarrow{OV}}(C)$.

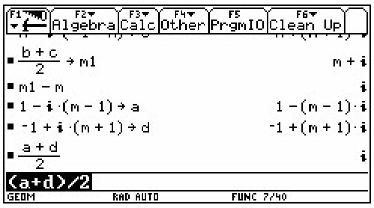


écran 4

2) Nous avons également A (a) image de M par la rotation de centre U et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$, et D (d) image de M par la rotation de centre U' et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ce qui se traduit par :

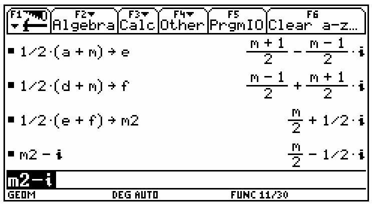
$$a - 1 = -i(m - 1) \ ; \ d + 1 = i(m + 1).$$

V, d'affixe i, est donc le milieu du segment [AD] (*écran* 5). La droite (AD) passe donc par un point fixe.



écran 5

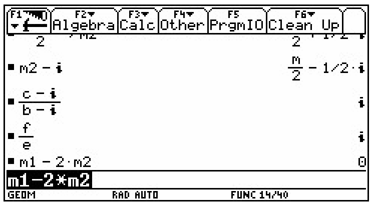
3) Compte tenu des résultats précédents, le point M_2 est l'image de M par l'homothétie de centre V et de rapport $\frac{1}{2}$ (*écran* 6).
On en déduit que le lieu $\mathcal{L}_2$ est le cercle image de C par cette homothétie.
On pourrait voir ce résultat en utilisant l'outil **Homothétie** du menu **F5**.



écran 6

4) Le but de la question est de montrer que C est l'image de B par la rotation de centre V et de mesure $\frac{\pi}{2}$, soit $c - i = i\,(b - i)$ (*écran* 7).
Le triangle VBC est bien rectangle isocèle en V et de sens direct.

5) a) Il s'agit d'abord de montrer que F est l'image de E par la rotation de centre O et de mesure $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, $f = i\,e$ (*écran* 7). Le triangle OEF est rectangle isocèle en O et de sens direct.



écran 7

b) En utilisant la réponse précédente, pour établir que le quadrilatère OEM_1F est un carré, il suffit, par exemple, de montrer que M_2 est le milieu de [OM_1], ce qui est immédiat.
En effet, $2\,m_2 = m + i = m_1$ (*écran* 7).

Nom ………………………………………………………………………………… Classe ………….

G1f – ÉTUDE DE LIEUX DE POINTS

1. Énoncé

Dans le plan $\mathcal{P}$ supposé orienté, soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, deux points U et U' de ce cercle, O le milieu du segment $[UU']$. L'unité de longueur dans $\mathcal{P}$ étant celle du segment $[OU]$, on note V le point tel que le repère (O, U, V) soit un repère orthonormal direct du plan $\mathcal{P}$.

À chaque point M de $\mathcal{C}$, on associe les points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ tels que les quadrilatères $MUAB$ et $U'MCD$ sont des carrés[1] de sens direct. On désigne respectivement par E et F les centres de ces carrés et par M_1 et M_2 les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[EF]$.

1) Déterminer le lieu $\mathcal{L}_1$ du point M_1.

2) Montrer que la droite (AD) passe par un point fixe.

3) Déterminer le lieu $\mathcal{L}_2$ du point M_2.

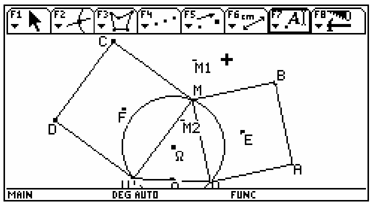
4) Montrer que le triangle VBC est rectangle isocèle en V, et de sens direct.

5) Montrer que le triangle OEF est rectangle isocèle en O, et de sens direct, puis que le quadrilatère OEM_1F est un carré.

2. Mise en oeuvre

- **Construire la figure à l'aide de Cabri-Géomètre et conjecturer**

On commence par créer un point, que l'on nomme Ω :
2nd [CHAR] 1 K,
puis un cercle de centre Ω.
U, U' et M sont trois points créés sur le cercle (**F2 2**, puis sélectionner, pour chacun, un point du cercle).
Pour construire les carrés et le point V ; on peut utiliser des rotations de mesure 90° (on vérifiera au préalable que l'on est en mode degré).



L'outil **lieu** du menu **F4** permet de visualiser les lieux $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Que remarque-t-on ?
Tracer la droite (AD) et faire varier le point M à l'aide de la touche . Quel résultat peut-on envisager ?

- **Démontrer**

Déterminer à l'aide de la calculatrice l'affixe m_1 de M_1 en fonction de celle de M. Que peut-on en conclure ?
Faire de même pour M_2.
Toujours en se servant des nombres complexes, montrer que V appartient au segment $[AD]$.
Démontrer les questions **4** et **5** en utilisant des transformations planes et les affixes des points considérés.

[1] On convient que les carrés $MUAB$ et $U'MCD$ sont respectivement réduits à un point dans les deux cas : $M = U$ ou $M = U'$.