F8 – FONCTIONS COMPOSÉES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : fonctions composées, sens de variation de la composée de deux fonctions.

1. Objectifs

Introduire la composée de deux fonctions. Introduire le théorème relatif au sens de variation de deux fonctions de sens de variation connus. Contrôler les résultats à l'aide de la calculatrice.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

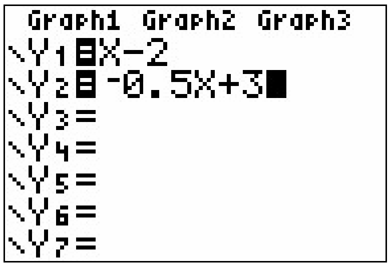
3. Mise en place

1) Exemple 1

On trouve $g(f(x)) = -0{,}5\,x + 4$ et $f(g(x)) = -0{,}5\,x + 1$.

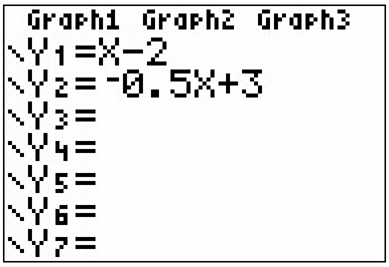
Afin de saisir dans l'éditeur de fonctions (touche **Y=**) les composées sous la forme Y1(Y2(X)) et Y2(Y1(X)), ne pas taper **Y** suivi de **1** sur le clavier mais procéder comme suit :

• On appuie sur la touche **Y=**.
On saisit l'expression de $f(x)$ et $g(x)$ en Y1 et Y2 (*écran* 1).

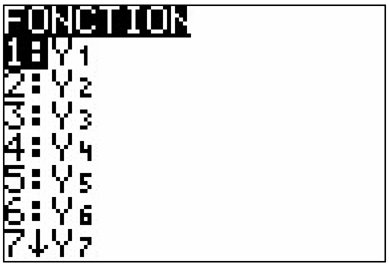


écran 1

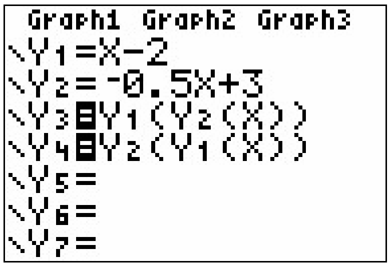
• On désactive les fonctions Y1 et Y2 en mettant le curseur sur le signe = et en appuyant sur la touche **ENTER** (*écran* 2).
• On place le curseur sur la ligne Y3 (menu **Y=**) et on appuie sur la touche **VARS**. On sélectionne alors le menu **Y-VARS**, on appuie sur **ENTER** pour entrer dans le sous–menu **1 : Fonction** (*écran* 3).
• On appuie sur **ENTER** deux fois de suite pour saisir l'instruction Y1, on procède de même pour saisir Y2 (*écran* 4).



écran 2

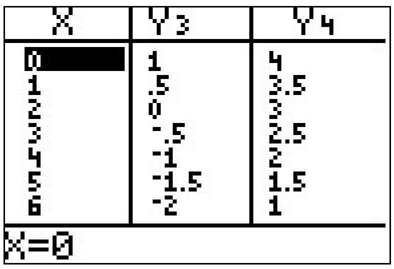


écran 3



écran 4

Il est alors possible de demander l'affichage de la table après avoir réglé les paramètres de celle-ci , touches **2nd TBLSET**. Seuls seront affichés les résultats associés aux seules fonctions activées, soit Y3 et Y4 (*écran* 5).



X	Y3	Y4
0	1	4
1	.5	3.5
2	0	3
3	-.5	2.5
4	-1	2
5	-1.5	1.5
6	-2	1

X=0

écran 5

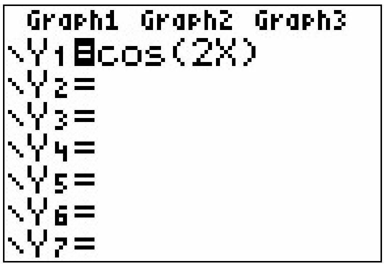
4) Étude du sens de variation d’une fonction à l’aide de sa décomposition

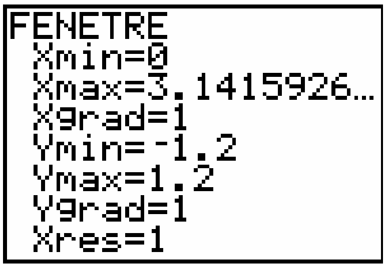
Les tableaux de variations demandés dans l'exemple **2** en fin d'activité sont les suivants :

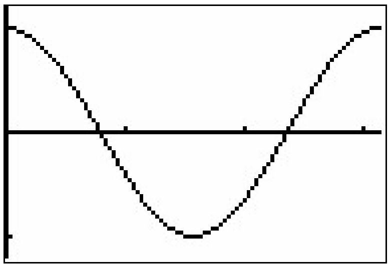
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(2x)$	1	↘	-1	↗	1

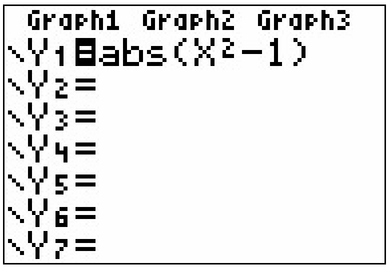
x	-3		-1		0		1		3
$\lvert x^2-1 \rvert$	8	↘	0	↗	1	↘	0	↗	8

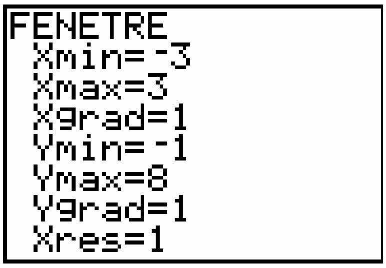
Les écrans suivants permettent le contrôle des résultats précédents :

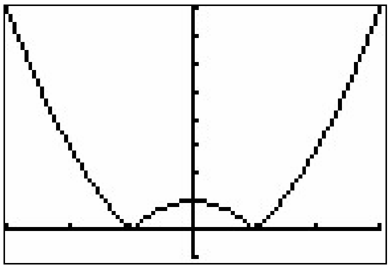












Nom .... Classe ....

F8 – FONCTIONS COMPOSÉES

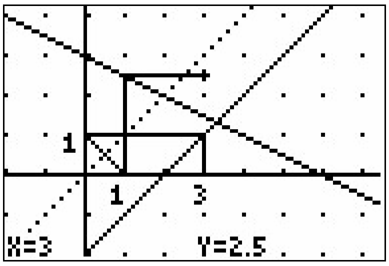
TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

1) Étude d'un premier exemple

f et g sont les fonctions affines définies sur ℝ par : $f(x) = x - 2$ et $g(x) = -0,5\,x + 3$.

a) Calculer l'image $f(3)$ du réel 3 par f, puis l'image par g de $f(3)$. Ce nombre se note $g\,[f(3)]$ ou $g{\circ}f(3)$ et se lit g rond f de 3.
Calculer de même les réels $g{\circ}f(1)$, $g{\circ}f(2)$, $g{\circ}f(0)$.

b) Expliquer comment la figure ci-contre permet, en utilisant les courbes représentatives de f et g, la construction du point de coordonnées (3 ; $g{\circ}f(3)$).



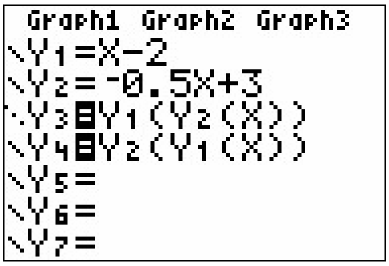
écran 1

c) En utilisant un repère orthonormal (unité graphique le centimètre) tracer les droites d'équations respectives : $y = x - 2$, $y = -0,5\,x + 3$, $y = x$, puis construire plusieurs points de la représentation graphique de la fonction $g{\circ}f$.
Quelle remarque peut-on faire?

d) Exprimer $g{\circ}f(x)$ en fonction de x puis vérifier la réponse en utilisant le graphique.
A-t-on $g{\circ}f(x) = f{\circ}g\,(x)$?

e) On se propose de vérifier les réponses précédentes.
Saisir les fonctions f, g, $g{\circ}f$ et $f{\circ}g$ sur la calculatrice (*écran* 2) :
les instructions Y1 et Y2 sont obtenues à l'aide de la touche **VARS** menu **Y-VARS**, option **1 : Fonction**.
Remarque : les fonctions Y1 et Y2 ont été désactivées afin de ne faire apparaître dans la table que Y3 et Y4.

Faire afficher la table de valeurs pour quelques réels : régler la table (**2nd TBLSET**), puis afficher les valeurs choisies (**2nd TABLE**).



écran 2

2) Étude d'un deuxième exemple

On se donne maintenant les fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x) = -x + 1$ et $g(x) = x^2$.

a) Quel est le sens de variation de f sur ℝ ?

b) Quel est l'ensemble des images des réels de $I = [-2\ ;\ 1]$ par f ? On notera J cet ensemble.

c) Après avoir rappelé le sens de variation de g sur ℝ donner l'image K de J par g.

d) Établir le sens de variations de $g{\circ}f$ sur $[-2\ ;\ 1]$ puis sur $[1\ ;\ 2]$.

e) Dresser le tableau de variations de $f{\circ}g$ sur $[-2\ ;\ 2]$.

f) Vérifier les résultats à l'aide des graphiques de f, g, $g{\circ}f$ et $f{\circ}g$ construits à l'écran de la calculatrice.

3) Généralisation

a) f est une fonction définie et strictement croissante sur $I = [a\ ;\ b]$.
Soit J l'image de I par f et g une fonction définie et strictement croissante sur J.
Démontrer que $g{\circ}f$ est strictement croissante sur I.

b) Recopier et compléter le tableau ci-contre, f et g étant des fonctions définies respectivement sur I et J.

Sens de variation de f sur $I = [a\ ;\ b]$	Image J de I par f	Sens de variation de g sur J	Sens de variation de $g{\circ}f$ sur $I = [a\ ;\ b]$
croissante		croissante	
croissante		décroissante	
décroissante		croissante	
décroissante		décroissante	

4) Étude du sens de variation d'une fonction à l'aide de sa décomposition

Exercice 1

a) Rappeler le sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

b) Étudier le signe de $g(x) = -2x + 3$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction $f \circ g$ sur [0 ; 3].

d) Contrôler vos réponses à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2

a) La fonction $x \mapsto \cos(2x)$, définie sur $[0 ; \pi]$ est la composée de la fonction $x \mapsto 2x$ par la fonction $x \mapsto \cos x$. En déduire le sens de variation de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ sur $[0 ; \pi]$.

b) La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$, définie sur [-3 ; 3] est la composée de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ par la fonction $x \mapsto |x|$. En déduire le sens de variation de la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$, définie sur [-3 ; 3].

c) Recopier et compléter les tableaux de variations ci-dessous.

x	0 …. π
$\cos(2x)$	

x	-3 … … … 3
$\lvert x^2 - 1 \rvert$	