F6n – CLORE UN JARDIN

Auteurs : Tom Reardon et Jean-Pierre Bouvier **TI-Nspire™ CAS**

Mots-clés : optimisation, recueil de données, ajustement, représentation graphique, maximum, dérivée.

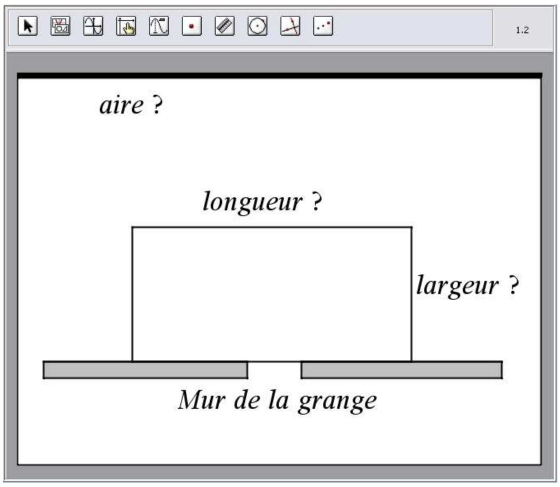
Fichiers associés : F6nElev_ClorerJardin_CAS.tns, F6nProf_ClorerJardin_CAS.tns

1. Objectifs

Résoudre un problème d'optimisation en utilisant plusieurs registres : géométrie, recueil de données, graphique, calcul algébrique et analyse.
Utiliser les fonctionnalités de TI-Nspire pour passer d'un registre à l'autre.

2. Enoncé

On souhaite entourer un jardin rectangulaire d'une clôture grillagée.
Le jardin est limité d'un côté par le mur d'une grange muni d'une porte (cf. figure, ci-contre).
On utilisera la totalité du grillage disponible, soit 25 m, pour limiter les **trois** autres côtés du jardin.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le jardin, répondant aux conditions ci-dessus, de plus grande aire possible.



3. Commentaires

Ce problème, classique, est ici traité de trois façons différentes.
Dans la première méthode, l'élève, invité à construire des jardins possibles, fait un relevé de données. Ce relevé permet alors de tracer un graphique. Il procède ensuite à une recherche de maximum à partir de la courbe.
Dans la deuxième méthode, l'élève détermine l'expression de l'aire du jardin en fonction de la longueur x d'un des côtés perpendiculaires au mur. Il demande alors le tracé de la représentation graphique de la fonction. Il procède, de même qu'en **1)**, pour déterminer une valeur approchée du maximum.
Dans la troisième méthode, l'élève utilise les outils de la classe de Première (dérivation) pour déterminer le maximum de la fonction.

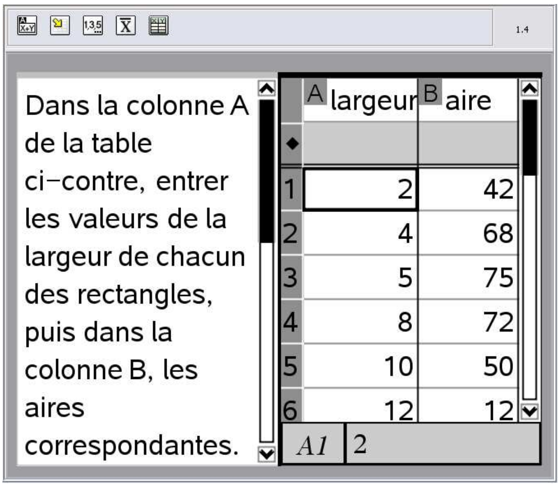
Selon le niveau des élèves, on pourra ne traiter qu'une partie de cette activité.
En seconde, on traitera les deux premières méthodes si l'on a exposé les fonctions usuelles et, en complément, considéré quelques paraboles.
On ne travaillera que sur la deuxième méthode en début d'année (au moment de l'approche de la « notion de fonction »). Dans ces deux cas, il est possible de changer la longueur totale du grillage (par exemple, 26 m) pour obtenir directement la valeur exacte du maximum et compléter l'étude en opérant les vérifications nécessaires : dans le cas de 26 m, $g(x) = 2x\,(13 - x)$. On vérifie alors que $g(x) = 84{,}5 - 2(x - 6{,}5)^2$ et on valide que le maximum est bien atteint en 6,5 (pour une aire de 84,5).
En Première, après avoir étudié la dérivation, on pourra proposer aux élèves les trois méthodes.

Dans les fichiers F6nElev_ClorerJardin_CAS.tns et F6nProf_ClorerJardin_CAS.tns, certains écrans comportent des « Questions-Réponses » à utiliser surtout lorsque les élèves possèdent tous la version nomade de TI-Nspire. Ces écrans peuvent être remplacés par un questionnement simple (choix de page : **Editeur mathématique**) où l'élève est invité à répondre oralement ou sur son cahier.

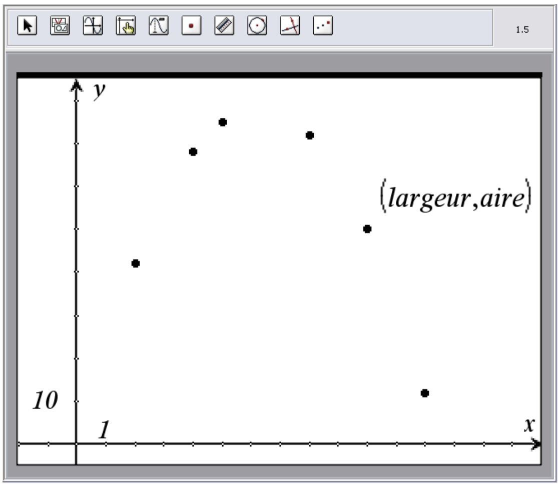
4. Conduite de l'activité

1) Première méthode

L'élève formule plusieurs propositions de jardins possibles et recueille, dans **Tableur & listes**, les données expérimentales (*écran* 1). Il doit représenter les points obtenus dans un graphique (largeur en abscisse, aire en ordonnée) (**Graphiques & géométrie**, *écran* 2).



écran 1

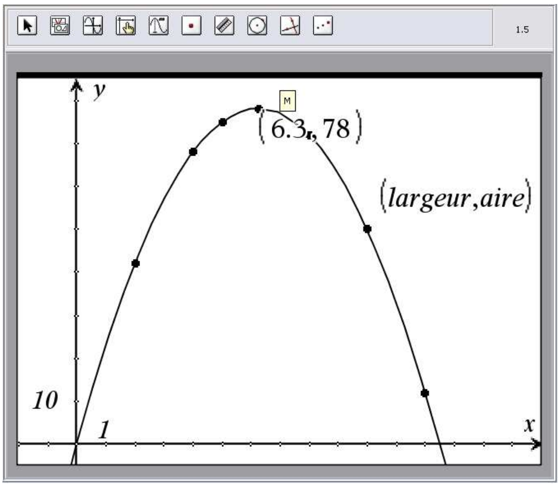


écran 2

Si l'élève a bien réparti ses « essais », en particulier, s'il n'a pas eu la volonté d'adosser systématiquement au mur le côté le plus grand du rectangle, il peut alors reconnaître une parabole, ce qui justifie le choix de la régression. Dans le tableur, TI-Nspire opère alors un ajustement par une fonction du second degré : choisir **Statistiques, Calcul statistique, Régression de degré 2**).

L'élève demande ensuite de tracer la courbe correspondante (*écran* 3) et peut obtenir des valeurs approchées des coordonnées du sommet de la parabole.

A noter : la précision d'affichage choisie ici est **Flottant 2** (choisir **Fichier**, **Réglages**, **Réglages du classeur**).

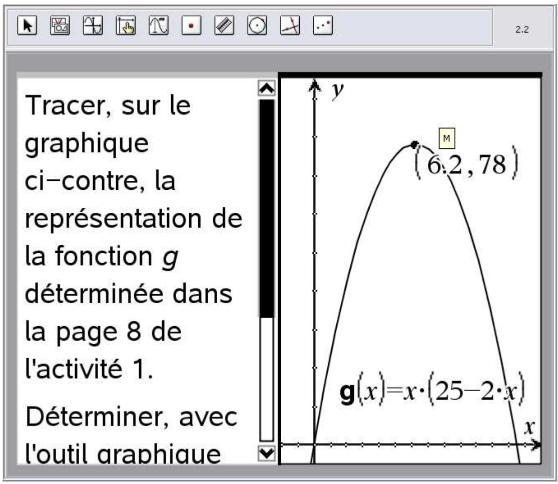


écran 3

2) Deuxième méthode

L'élève détermine l'expression de l'aire du jardin en fonction de la longueur x d'un des côtés perpendiculaires au mur.

Il demande alors le tracé de la courbe représentant la fonction $g : x \mapsto x\,(25 - 2\,x)$ et peut là encore obtenir des valeurs approchées des coordonnées du sommet de la parabole.

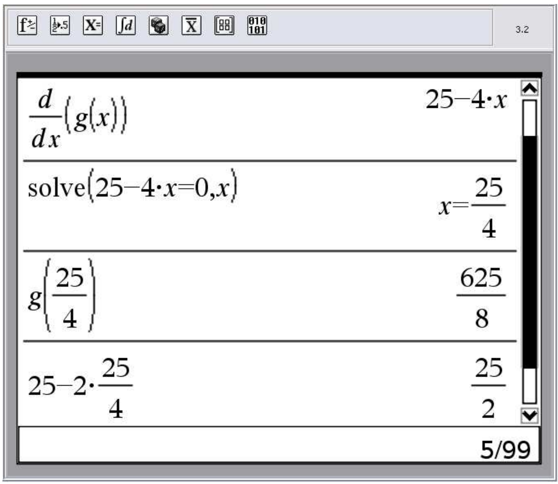


écran 4

3) Troisième méthode

La fonction g (aire en fonction de x) étant déterminée, l'élève utilise les outils de la classe de Première (dérivation) pour déterminer le maximum de la fonction. Il définit la fonction aire1.

Il obtient, par cette méthode, les valeurs exactes, soit 6,25 m et 78,125 m ^{2}, la longueur du terrain étant de 12,5 m.



écran 5

Il est enfin demandé à l'élève de comparer les trois méthodes et leurs solutions.
Le travail effectué dans les deux premières méthodes est ici assez pertinent. Toutefois, on n'est pas sûr, dans ces cas, que le maximum soit atteint exactement en 6,3,ni en 6,25. Par une recherche graphique, la valeur obtenue pour le maximum est une valeur approchée, qui plus est, dépend de la précision choisie.

On pourra signaler la solution qui consiste à chercher le rectangle de périmètre donné qui a la plus grande aire. Il suffit de considérer la figure formée par le rectangle et son symétrique par rapport au mur. On obtient alors le carré de périmètre 50 m, ce qui confirme les résultats précédents.