F13 – APPROXIMATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR DES POLYNOMES

TI-82 Stats – TI-84 – TI 89 – Voyage 200

Mots-clés : représentation graphique, exponentielle, approximation, polynômes.

1. Objectifs

Rechercher des polynômes P_n de degré n qui permettent d'obtenir une approximation de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0. Conjecturer une généralisation de la notion d'approximation affine. Contrôler la qualité des approximations obtenues.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

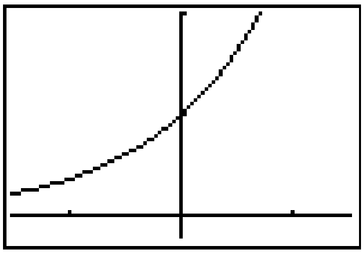
3. Mise en oeuvre et commentaires

Remarque :les questions **2)** *et* **3)** *font seulement appel à des notions abordées en Seconde et Première et devraient donc être traitées sans problème par les élèves de Terminale.*

1) Tracé de la courbe *C*

Tracé de la courbe *C* représentative de la fonction $f : x \mapsto e^x$ dans la fenêtre définie par $x \in [-1{,}5 ; 1{,}5]$ et $y \in [-0{,}2 ; 2]$.

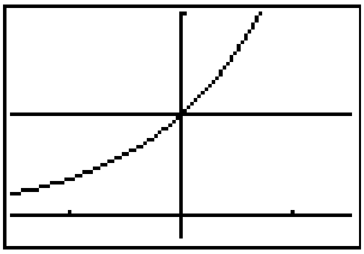
Saisir la fonction à l'aide de la touche **Y =** ou ***f (x)***. Choisir Y_1.
Puis à l'aide de la touche **WINDOW** ou **fenêtre** faire les choix suivants :
X*min* = – 1.5 ; X*max* = 1.5 ; Y*min* = – 0.2 ; Y*max* = 2.
Faire tracer la courbe avec la touche **GRAPH** ou **graphe** (*écran* 1).



écran 1

2) Polynôme constant P_0 de degré 0

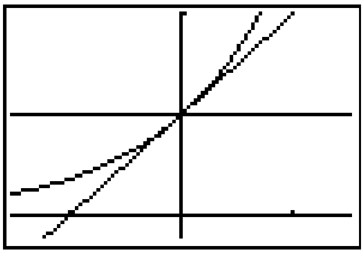
Ce polynôme constant est défini par $P_0(x) = 1$ car sa courbe doit coïncider avec *C* en 0 donc $P_0(0) = e^0 = 1$.
Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_2.
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 2).



écran 2

3) Polynôme P_1 de degré 1 : $P_1(x) = a + b\,x$

Ce polynôme est l'approximation affine de f au voisinage de 0.
On doit donc avoir $a = P_1(0) = e^0 = 1$ et $b = P_1'(0) = e^0 = 1$ d'où $P_1(x) = 1 + x$.
Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. (Choisir Y_3.)
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 3).



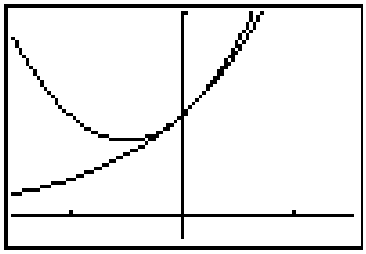
écran 3

4) Polynôme P_2 de degré 2 : $P_2(x) = a + b\,x + c\,x^2$

a) Comme précédemment les conditions de l'approximation affine doivent être remplies donc

$$a = P_1(0) = P_2(0) = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad b = P_1'(0) = P_2'(0) = e^0 = 1,$$

mais ces conditions ne permettent pas de déterminer la valeur de c. Par contre l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que c est un nombre positif.

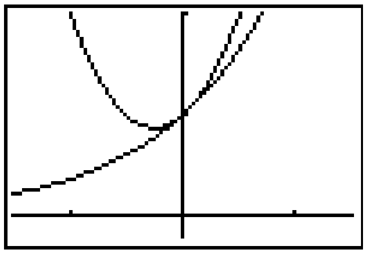


écran 4

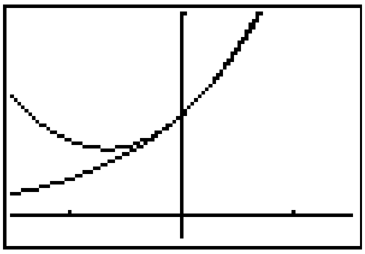
b) On essaie successivement : $c = 1$, $c = 2$, $c = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$.

A chaque essai, saisir $P_2(x)$ à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_4.

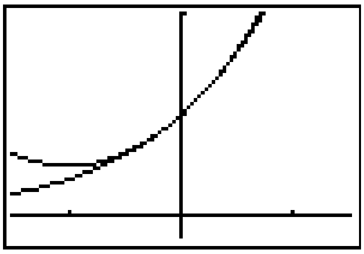
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 4 : $c = 1$, *écran* 5 : $c = 2$, *écran* 6 : $c = \frac{3}{4}$, *écran* 7 : $c = \frac{1}{2}$ et *écran* 8 : $c = \frac{1}{4}$).



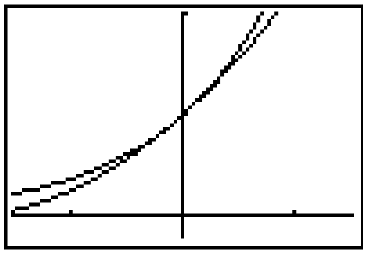
écran 5



écran 6



écran 7



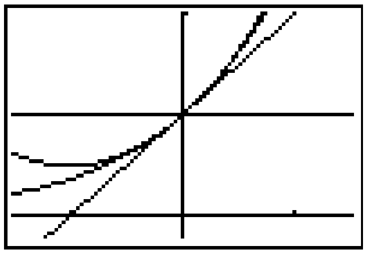
écran 8

c) Conjecturer la « bonne valeur » de c est difficile pour un élève qui peut hésiter entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ et même se poser la question pour d'autres valeurs. Il faut alors le guider en lui rappelant la méthode adoptée pour l'approximation affine et poser $P_2''(0) = 2c = e^0 = 1$ d'où :

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_4.

Faire tracer les courbes représentant $\mathcal{C}$, P_0, P_1 et P_2, avec la touche **GRAPH** (*écran* 9).



écran 9

5) Polynômes P_3 et P_4

Faire découvrir avec la même méthode les polynômes :

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{et} \quad P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Faire tracer leurs courbes en saississant les fonctions dans Y_5 et Y_6.

6) Qualité des approximations

Initialiser le tableau de valeurs avec **[2nd] TBL SET** ou **[2nde] déf table** en donnant pour valeurs :

DébTable = –1 et PasTable = 0.1

Afficher le tableau de valeurs avec **[2nd] TABLE** ou **[2nde] table**.

On constate que l'erreur maximale sur [–1 ; 1] est inférieure à :
1,8 avec P_0 ; 0,72 avec P_1 ; 0,22 avec P_2 ; 0,06 avec P_3 ; 0,01 avec P_4 .

Nom : ………………………………………………………..….   Classe : ………………………

F13 - APPROXIMATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR DES POLYNOMES

Soit la fonction exponentielle $f : x \mapsto f(x) = e^x$ et soit *C* la courbe représentative de f.

Le but de cette activité est de trouver des polynômes P_n de degré n approchant la fonction f le mieux possible au voisinage de zéro. Pour cela on va mener à l'aide de la calculatrice une étude pour comparer les courbes de ces polynômes et C au voisinage de 0. Enfin on étudiera la qualité des approximations obtenues, c'est-à-dire l'erreur maximale commise en remplaçant $f(x)$ par l'un de ces polynômes sur $[-1 ; 1]$.

1) Tracé de la courbe *C*

Tracer sur la calculatrice la courbe *C* de la fonction f pour $x \in [-1{,}5 ; 1{,}5]$ et $y \in [-0{,}2 ; 2]$.
On choisira Y_1 dans **Y =** ou ***f*(*x*)**.

2) Détermination de P_0 défini par $P_0(x) = a$

a) Quelle condition doit-on écrire pour que la courbe représentant P_0 et *C* coïncident en 0 ?
En déduire la valeur de a.
b) Tracer la courbe représentative de P_0. (On choisira Y_2 dans **Y =** .)

3) Détermination de P_1 défini par $P_1(x) = a + b\,x$

a) Quelles conditions doit-on écrire pour que la courbe représentant P_1 et *C* coïncident le mieux possible au voisinage de 0 ? En déduire les valeurs de a et b.
b) Tracer la courbe représentative de P_1. (On choisira Y_3 dans **Y =** .)
c) Comment appelle-t-on le polynôme P_1 ?

4) Détermination de P_2 défini par $P_2(x) = a + b\,x + c\,x^2$

a) Les conditions ayant permis de déterminer a et b permettent-elles de déterminer la valeur de c ?
b) L'allure de la courbe *C* permet de déterminer le signe de c. Pourquoi ? Quel est ce signe ?
c) Essayer différentes valeurs de c pour faire tracer la courbe de P_2 . (On choisira Y_4 dans **Y =** .)
On essaiera successivement : $c = 1$, $c = 2$, $c = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$.
d) Quelle est la valeur de c qui semble le mieux convenir ?
e) Quelle condition pourrait-on écrire – en s'inspirant de la question **3) a)** – pour déterminer la valeur de c la mieux adaptée ? En déduire c et faire tracer la courbe représentative du polynôme P_2 obtenu. (On choisira Y_4.)

5) Détermination des polynômes P_3 et P_4

a) En utilisant la même méthode que dans la question précédente déterminer les polynômes définis par $P_3(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$ et $P_4(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4$.
b) Faire tracer leurs courbes représentatives (en choisissant Y_5 et Y_6 dans **Y =**).

6) Etude de la qualité des approximations obtenues

a) Etablir un tableau de valeurs pour ces courbes pour $x \in [-1 ; 1]$ avec un pas de 0,1 et le faire afficher.
b) En déduire un majorant de l'erreur commise sur cet intervalle lorsqu'on remplace $f(x)$ par respectivement $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$.