AL4 – MOUVEMENTS DE POPULATION

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : matrice, graphe.

1. Objectifs

Utiliser deux registres, matrices et graphes, pour traiter un même problème de répartition de population.

2. Correction et commentaires

Remarque : Cette fiche est une adaptation de l'exemple 1 *des commentaires du programme officiel.*

Partie A : avec les matrices

1) De l'an 0 à l'an 1 :
la capitale comptait 12 000 habitants ;
4 800 habitants l'ont quitté pour aller vivre dans le reste de l'île ($0{,}4 \times 12\,000 = 4\,800$) ;
7 200 habitants sont restés dans la capitale ($0{,}6 \times 12\,000 = 7\,200$) ;
le reste de l'île comptait 12 000 habitants ;
2 400 habitants l'ont quitté pour rejoindre la capitale ($0{,}2 \times 12\,000 = 2\,400$) ;
9 600 habitants sont restés ($0{,}8 \times 12\,000 = 9\,600$) .
La capitale compte donc 7 200 + 2 400 = 9 600 habitants.
Le reste de l'île compte : 4 800 + 9 600 = 14 400 habitants.
Le système $\begin{cases} c_1 = 0{,}6\,c_0 + 0{,}2\,r_0 \\ r_1 = 0{,}4\,c_0 + 0{,}8\,r_0 \end{cases}$ et les conditions initiales permettent d'obtenir : $c_1 = 9\,600$ et $r_1 = 14\,400$.

2) De la même façon, $\begin{cases} c_2 = 0{,}6\,c_1 + 0{,}2\,r_1 \\ r_2 = 0{,}4\,c_1 + 0{,}8\,r_1 \end{cases}$; donc $P_1 = (8\,640 \quad 15\,360)$.

Remarque : on admet la formule de récurrence $\begin{cases} c_{n+1} = 0{,}6\,c_n + 0{,}2\,r_n \\ r_{n+1} = 0{,}4\,c_n + 0{,}8\,r_n \end{cases}$.

3) Dans la calculatrice, on entre les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 12\,000 & 12\,000 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix}$ et l'on effectue les 4 calculs.
Le cas **a)** est impossible car on multiplie une matrice $2 \times \mathbf{2}$ par une matrice $\mathbf{1} \times 2$;
le cas **b)** donne $A \times C = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix}$;
le cas **c)** semble correct ;
le cas **d)** est impossible car on multiplie une matrice $2 \times \mathbf{1}$ par une matrice $\mathbf{2} \times 2$.
Preuve que le cas 3 est correct :
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6\,x + 0{,}2\,y & 0{,}4\,x + 0{,}8\,y \end{pmatrix}$

4) Relation : $P_1 = P_0 \times A$; $P_2 = P_1 \times A = (P_0 \times A) \times A = P_0 \times A^2$; … ; $P_{n+1} = P_n \times A$;
et l'on admet $P_n = P_0 \times A^n$.

5) Avec la calculatrice, on peut calculer facilement les populations successives :

On affiche la matrice *B*.
On effectue alors l'opération $B \times A$ (*écran* 1).
On efface l'écran (facultatif) et on obtient les valeurs de l'*écran* 2 en appuyant plusieurs fois sur la touche **ENTER**.

```
[B]
  [[12000 12000]]
Rep*[A]
   [[9600 14400]]
   [[8640 15360]]
   [[8256 15744]]
   [[8102 15898]]
```

écran 1

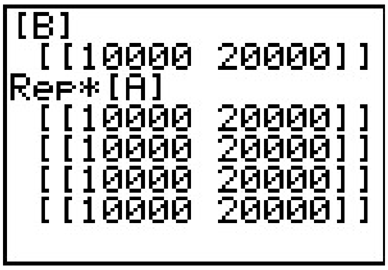
```
  [[8041 15959]]
  [[8016 15984]]
  [[8007 15993]]
  [[8003 15997]]
  [[8001 15999]]
  [[8000 16000]]
  [[8000 16000]]
```

écran 2

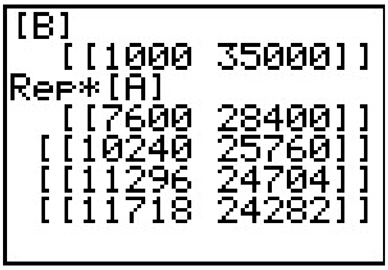
Remarque : la calculatrice est en mode **Flott 0**.

© Texas Instruments 2006 / Photocopie autorisée

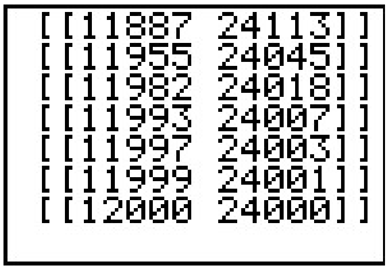
6) Différents point de départ :



écran 3



écran 4



écran 5

Ecran 3 :

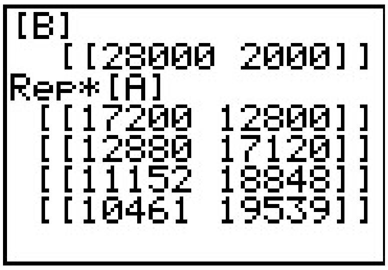
a) $P_0 = \begin{pmatrix} 10\,000 & 20\,000 \end{pmatrix}$

Ecrans 4 et 5 :

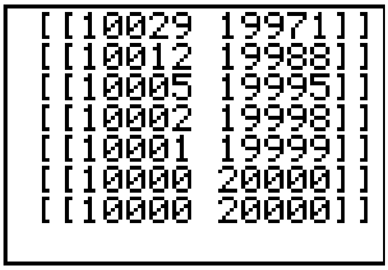
b) $P_0 = \begin{pmatrix} 1\,000 & 35\,000 \end{pmatrix}$

Ecrans 6 et 7 :

c) $P_0 = \begin{pmatrix} 28\,000 & 2\,000 \end{pmatrix}$



écran 6



écran 7

On peut constater que, quel que soit le point de départ, la situation évolue vers une répartition $\frac{1}{3}$ de la population totale dans la capitale et les $\frac{2}{3}$ restants dans le reste de l'île.

Partie B : avec les graphes

1) Ce graphe a 2 sommets C et R.
La somme des poids des arêtes partant de C est égale à 1, ainsi que celle de R.
On a donc bien un graphe probabiliste.

		Arrivée	
Départ		C	R
	C	0,6	0,4
	R	0,2	0,8

2) On définit la matrice de transition :

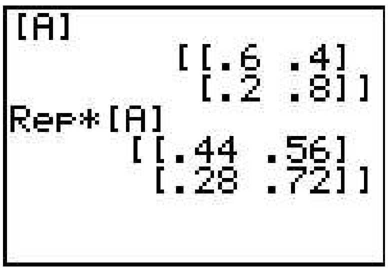
$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

3) Soit x la population de la capitale et y la population du reste de l'île.
Si $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est la population stable, on a : $P = P \times M$.

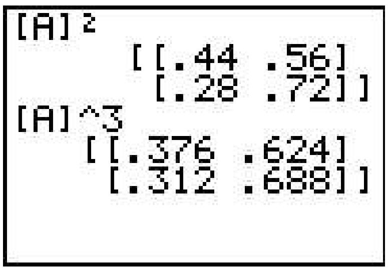
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,6\,x + 0,2\,y \\ y = 0,4\,x + 0,8\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4\,x = 0,2\,y \\ 0,2\,y = 0,4\,x \end{cases}$$, soit $2\,x = y$.

Comme $x + y$ représente la population totale de l'île, la situation stable est obtenue lorsque $\frac{1}{3}$ de la population totale habite la capitale et les $\frac{2}{3}$ restants habitent le reste de l'île.

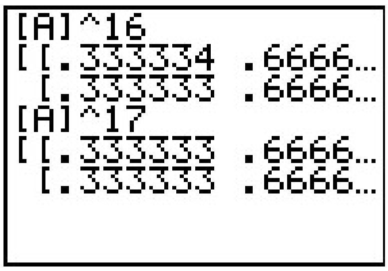
4) 5) Dans la calculatrice, la matrice M s'appelle A.



écran 8



écran 9



écran 10

La matrice M^n converge vers la matrice $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On a : $\begin{pmatrix} x & p - x \end{pmatrix} \times \mathrm{L} = \begin{pmatrix} x & p - x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

soit : $\begin{pmatrix} x & p - x \end{pmatrix} = (\frac{1}{3}p \;\; \frac{2}{3}p)$.

© Texas Instruments 2006 / Photocopie autorisée

Annexe

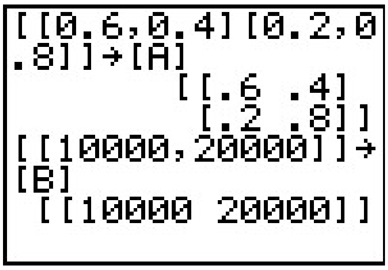
1. Saisir une matrice

Utiliser l'éditeur de matrices est la solution la plus simple. Toutefois, il existe d'autres solutions qui peuvent être utiles, notamment dans un programme.

1) Saisie totale directe

La matrice A comporte 2 lignes et 2 colonnes.

La matrice B comporte 1 ligne et 2 colonnes.

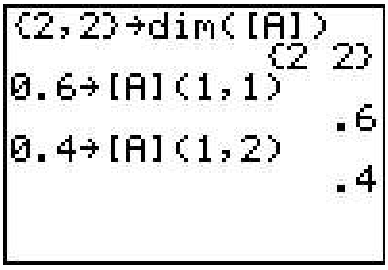


Syntaxe :

- Crochet début de matrice
- Crochet début de ligne
- Eléments séparés par une virgule
- Crochet fin de ligne
- Crochet fin de matrice

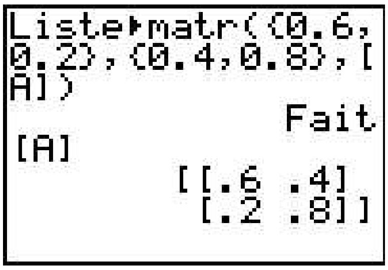
2) Saisie directe coefficient par coefficient

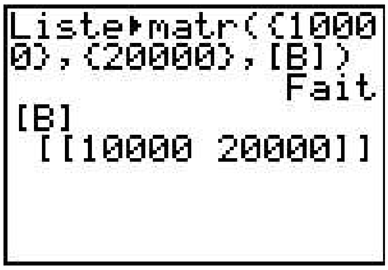
La dimension est donnée sous forme de liste.
Les coefficients sont affectés (ou lus) avec la notation mathématique habituelle.



3) Saisie avec les listes

On peut aussi utiliser la transformation de liste en matrice. Attention, chaque liste représente une **colonne**.



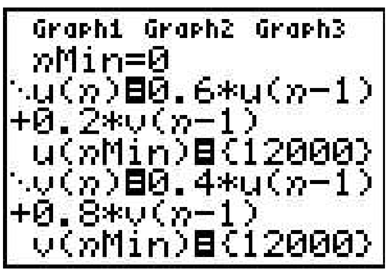


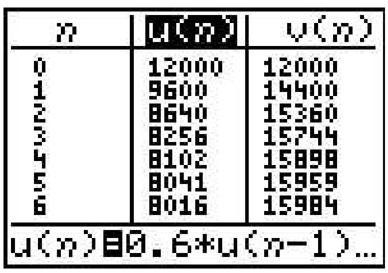
2. Suites à récurrences croisées

On va récrire la formule de récurrence :

$$\begin{cases} c_{n+1} = 0{,}6\, c_n + 0{,}2\, r_n \\ r_{n+1} = 0{,}4\, c_n + 0{,}8\, r_n \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} u_n = 0{,}6\, u_{n-1} + 0{,}2\, v_{n-1} \\ v_n = 0{,}4\, u_{n-1} + 0{,}8\, v_{n-1} \end{cases}.$$

Se mettre en **MODE Suit**, puis saisir les formules dans **Y=**. On visualise les valeurs dans le tableau de valeurs (**2nd [TABLE]** ; réglage de la table : **2nd [TBLSET]**, avec DébTbl = 0, Pas = 1).





© Texas Instruments 2006 / Photocopie autorisée

Nom : ……………………………………………………………..…. Classe : ………………………

AL4 – MOUVEMENTS DE POPULATION

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi :
chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci, tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. La population totale ne varie pas.
On désigne par :
c_0 la population initiale de la capitale,
r_0 la population du reste de l'île,
c_n la population de la capitale après n années,
r_n la population du reste de l'île après n années.
Le vecteur ligne $P_0 = (c_0 \quad r_0)$ représentera la population initiale de l'île ;
le vecteur ligne $P_n = (c_n \quad r_n)$ représentera la population après n années.

Partie A : avec les matrices

On suppose que la population initiale est $P_0 = (12\,000 \quad 12\,000)$.

1) Etudier les mouvement de population la première année. Exprimer c_1 et r_1 en fonction de c_0 et de r_0.

2) Déterminer c_2 et r_2.

3) On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Parmi ces quatre écritures, désigner celle qui est vraie :

a) $\begin{pmatrix} 9\,600 & 14\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12\,000 & 12\,000 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 9\,600 \\ 14\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 9\,600 & 14\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,000 & 12\,000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 9\,600 \\ 14\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

4) En déduire une relation matricielle entre :
a) P_1 et P_0 ; **b)** P_2 et P_0 ; **c)** P_{n+1} et P_n .

5) A l'aide de la calculatrice, déterminer la population des 12 premières années.

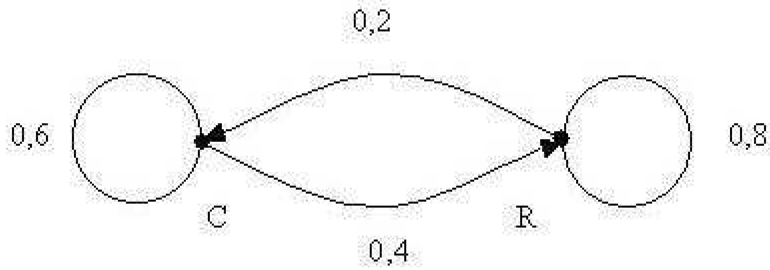
6) Reprendre la question **5** avec :
a) $P_0 = \begin{pmatrix} 10\,000 & 20\,000 \end{pmatrix}$ **b)** $P_0 = \begin{pmatrix} 1\,000 & 35\,000 \end{pmatrix}$ **c)** $P_0 = \begin{pmatrix} 28\,000 & 2\,000 \end{pmatrix}$
La situation **a)** correspond à une situation stable. Dans chaque situation, d'une année à l'autre, il y a des mouvements de population, mais le nombre d'habitants total (de la capitale plus hors capitale) reste inchangé. On remarquera que, dans chaque situation, la population tend toujours vers une situation stable.

Partie B : avec les graphes

1) Montrer que le graphe ci-contre est un graphe probabiliste représentant la situation des mouvements de population de l'île.

2) Ecrire la matrice M de transition.

3) Déterminer la population stable.



4) On désigne par M^n la matrice de transition qui permet de passer de l'année 0 à l'année n. Déterminer la matrice L vers laquelle tend M^n lorsque n tend vers l'infini.

5) x désignant la population de la capitale et p désignant la population de l'île, calculer le produit :

$$(x \quad p - x)\, L.$$

© Texas Instruments 2006 / Photocopie autorisée