AL3 – IMAGES DANS DES BOÎTES DE CÉRÉALES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : probabilité, matrice, vecteur, suite, graphe.

1. Objectifs

Traiter un même problème sous trois points de vue : calcul matriciel, suites récurrentes, utilisation des graphes.

2. Correction et commentaires

Remarque : Cette fiche est une adaptation de l'exemple 4 *des commentaires du programme officiel.*

Un sous entendu de l'énoncé : dire que les images sont également réparties dans les boites, sous entend que les 3 images ont la même probabilité qui est donc égale à $\frac{1}{3}$.

A. Version Matrice

1) • Dans l'état E_1, tout le monde possède une image. Ceci est représenté par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Lors de l'achat de la deuxième boite on peut, soit obtenir une image du même type (événement A : $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$), soit obtenir une image d'un type différent (événement B : $p(\mathrm{B}) = \frac{2}{3}$).

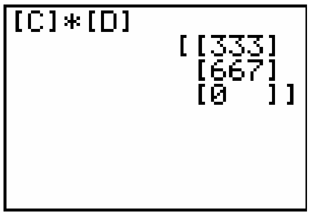
Donc E_2 est représenté par le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 333 \\ 667 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• E_3 est représenté par le vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 111 \\ 222 + 445 \\ 222 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 667 \\ 222 \end{pmatrix}$ car lors de l'achat de la troisième boite :

- les 333 personnes ayant un seul type d'image ont une chance sur trois d'obtenir la même image (soit 111 personnes) et deux chances sur trois d'obtenir une image différente (soit 222 personnes) ;
- les 667 personnes ayant déjà deux types d'images ont deux chances sur trois d'obtenir une image qu'elles possédaient (soit 445 personnes) et une chance sur trois d'obtenir l'image qui leur manquait (soit 222 personnes).

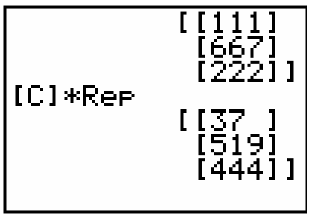
• Lors de l'achat de la quatrième boite, le même raisonnement conduit à représenter E_4 par le vecteur

$v_4 = \begin{pmatrix} 37 \\ 74 + 445 \\ 222 + 222 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 519 \\ 444 \end{pmatrix}$.



écran 1

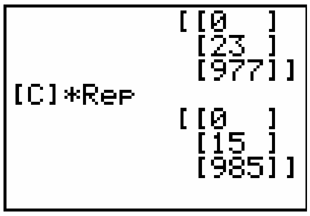
2) On trouve $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Dans la calculatrice, P est représenté par la matrice [C] et v_1 par [D] (*écran* 1). On répète l'opération (*écran* 2).



écran 2

3) $v_n = P^{n-1} \times v_1$.

4) $v_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 985 \end{pmatrix}$ (*écran* 3). Selon le calcul théorique, 15 personnes devraient posséder la collection incomplète. Étant donné que leur nombre est exactement celui compté, on conclut que c'est très chanceux et la publicité n'est pas mensongère.



écran 3

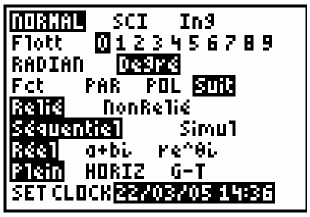
B. Version Suite

Vu l'étude précédente on a :

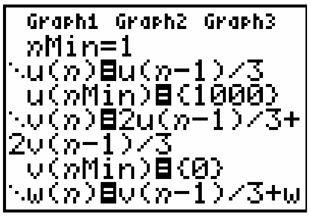
$a_{n+1} = \dfrac{1}{3} a_n$ et $a_1 = 1\,000$; représentée par la suite $u(n)$.

$b_{n+1} = \dfrac{2}{3} a_n + \dfrac{2}{3} b_n$ et $b_1 = 0$; représentée par la suite $v(n)$.

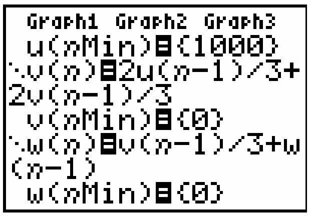
$c_{n+1} = \dfrac{1}{3} b_n + c_n$ et $c_1 = 0$; représentée par la suite $w(n)$.



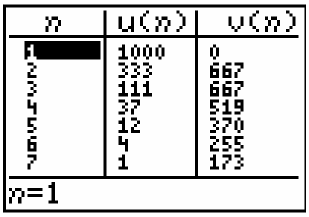
écran 4



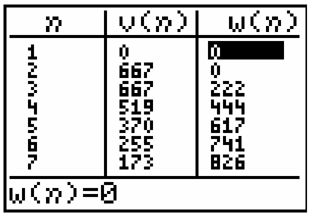
écran 5



écran 6



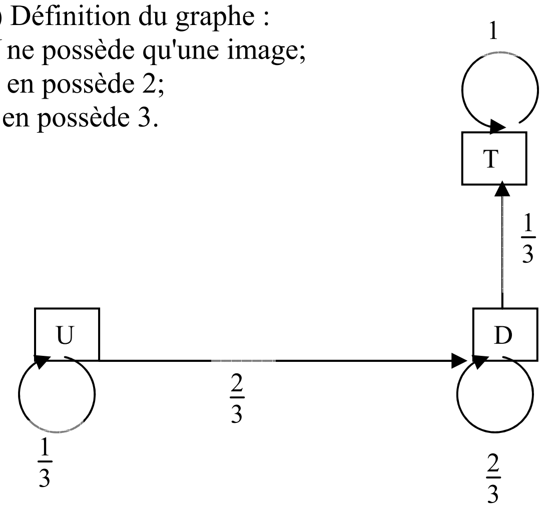
écran 7



écran 8

C. Version graphe

1) Définition du graphe :
U ne possède qu'une image;
D en possède 2;
T en possède 3.



		Arrivée		
		U	*D*	*T*
Départ	*U*	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	D	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	T	0	0	1

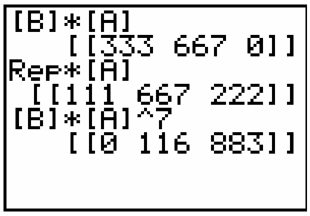
2) D'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice initiale est $B = (\ 1\,000 \quad 0 \quad 0\ )$.

3) La matrice M est représentée par la matrice [A] de la calculatrice.
La matrice [B] représente la situation initiale.
La matrice $C = B \times M$ représente l'état E_1.
La matrice $D = C \times M = (B \times M) \times M = B * M^2$ représente l'état E_2.

4) Au bout de 7 semaines (*écran* 9) tout le monde devrait posséder au moins deux sortes d'images. Cela ne permet pas de conclure sur l'affirmation de l'inspecteur. Il faut calculer $B \times M^{12}$.



écran 9

Remarque : les matrices des versions « matrice » et « graphe » ne sont pas identiques mais ne sont pas indépendantes les unes des autres : [C] *(version matrice) et* [A] *(version graphe) sont liées par la relation :* $A = C^t$ *; de même* $B = D^t$*. De plus,* $C \times D$ *(version matrice) devient (version graphe)* $B \times A = D^t \times C^t$*. On admet que cela peut s'écrire* $(C \times D)^t$ *.*

Nom : ………………………………………………………………..…. Classe : ………………………

AL3 – IMAGES DANS DES BOÎTES DE CÉRÉALES

On se propose de traiter le problème suivant sous trois points de vue différents :

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boites de céréales. Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boite de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que 2 des 3 images, a déclaré mensongère la publicité.
L'inspecteur des fraudes a-t-il raison ?

A. Version Matrice

On se place dans les conditions de vente de la société.
Au bout d'une semaine, les consommateurs auront acheté une boite et seront donc tous en possession d'une image.
L'état E_n du système est un vecteur v_n à 3 lignes : la première coordonnée représente le nombre de personnes ayant un seul type d'image, la seconde le nombre de personnes ayant deux types d'images distinctes et la troisième le nombre de personnes ayant trois types d'images distinctes.

L'état E_1 est donc représenté par le vecteur : $v_1 = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les vecteurs v_2 , v_3 et v_4.

2) Déterminer la matrice P telle que $v_2 = P \times v_1$. Vérifier que $v_3 = P \times v_2$ et que $v_4 = P \times v_3$.

3) Déterminer v_n en fonction de P et de v_1.

4) Observer l'évolution du système sur 12 semaines.

B. Version Suites

On désigne par
- a_n le nombre de personnes ayant 1 seul type d'images après n achats ;
- b_n le nombre de personnes ayant 2 types d'images distinctes après n achats ;
- c_n le nombre de personnes ayant les 3 types d'images distinctes après n achats.

Déterminer les relations entre les nombres a_{n+1} ; b_{n+1} ; c_{n+1} et les nombres a_n ; b_n ; c_n .
Observer l'évolution du système sur 12 semaines.

C. Version Graphe

1) Représenter cette situation par un graphe.

2) En déduire la matrice de passage M.

3) La matrice représentant la situation initiale est $B = (\ 1\,000 \quad 0 \quad 0\ )$.
Que représente la matrice $C = B \times M$?
Que représente la matrice $D = C \times M$? Exprimer D en fonction de B et de M.

4) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien de semaines tout le monde possèderait au moins deux types d'images.
Conclure sur l'affirmation de l'inspecteur des fraudes.