

AL2 - RÉOLUTION DE SYSTÈMES

TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : système, matrice, équation de plan.

1. Objectifs

Résoudre un système de trois équations à trois inconnues avec un paramètre. Interpréter géométriquement les différents cas obtenus en donnant plusieurs valeurs au paramètre.

2. Mise en place

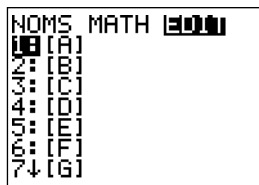
1) $a = 2,1$

On remplace a par 2,1 dans le système.

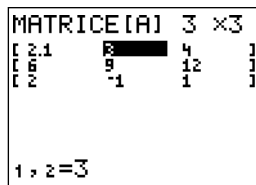
Le système $\begin{cases} 2,1x + 3y + 4z = 9 \\ 6x + 9y + 12z = 6 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$ peut s'écrire sous forme matricielle $A \times X = B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2,1 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

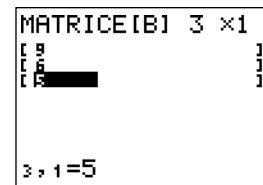
On entre les matrices A et B dans la calculatrice (écrans 1 à 3).



écran 1



écran 2



écran 3

On calcule alors le déterminant de la matrice A sous forme rationnelle : 2^{nd} [MATRIX] MATH 1 (écran 4).

On écrit la séquence : $\det([A]) \blacktriangleright$ Frac, puis **ENTER** donne le résultat : $21/10$.

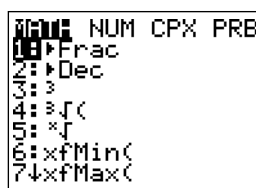
Note : Pour obtenir un résultat sous la forme d'une fraction, accéder au menu **MATH** et choisir **1 : Frac** (écran 5).

Le déterminant de la matrice A est différent de zéro, donc le système a une solution unique $X = A^{-1} \times B$, soit

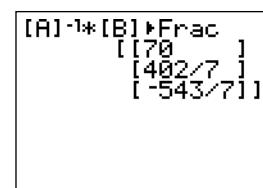
$$(x, y, z) = \left(70, \frac{402}{7}, -\frac{543}{7} \right) \text{ (écran 6).}$$



écran 4



écran 5



écran 6

• Interprétation géométrique

$2,1x + 3y + 4z = 9$ représente un plan \mathcal{P}_1 .

$6x + 9y + 12z = 6$ représente un plan \mathcal{P}_2 .

Ces deux plans se coupent suivant la droite I_1 .

$2x - y + z = 5$ représente un plan \mathcal{P}_3 .

Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 se coupent suivant la droite I_2 .

Les droites I_1 et I_2 sont coplanaires, car elles sont toutes deux incluses dans \mathcal{P}_1 .

Elle se coupent en un point S , avec $S\left(70, \frac{402}{7}, -\frac{543}{7}\right)$.

2) $a = 1,9$

On modifie la valeur de a dans la matrice A (écran 7). Le calcul du déterminant de $[A]$ donne $-\frac{21}{10}$. Il est différent de zéro, donc le système admet une solution unique que l'on calcule (écran 8). La solution est fort différente, Victor s'est avancé un peu vite.

```
MATRICE[A] 3 x3
[ [ 2  3  4 ]
[ 6  9 12 ]
[ 2  -1  1 ] ]
1,1=1.9
```

écran 7

```
[A]^-1*[B] Frac
[ [-70 ]
[ [-438/7]
[ [577/7 ] ]
```

écran 8

3) $a = 2$

On modifie la valeur de a dans la matrice A .

Le calcul du déterminant de A donne alors 0.

Comme il est nul, il y a deux plans parallèles.

• Interprétation géométrique

Le plan \mathcal{P}_1 a pour équation $2x + 3y + 4z = 9$. Il a donc pour vecteur normal $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Le plan \mathcal{P}_2 a pour équation $6x + 9y + 12z = 6$. Il a donc pour vecteur normal $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires (visiblement $\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1$).

Donc \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles.

Mais sont-ils confondus ou strictement parallèles ?

On regarde le second membre : 3×9 est différent de 6.

Donc les plans sont strictement parallèles.

AL2 - RÉOLUTION DE SYSTÈMES

Soit le système :
$$\begin{cases} ax + 3y + 4z = 9 \\ 6x + 9y + 12z = 6 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

1) Résoudre le système pour $a = 2,1$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) On se propose maintenant de résoudre ce système avec $a = 1,9$.

Victor affirme : « 2,1 ou 1,9 c'est presque pareil. On doit donc obtenir à peu près la même solution ».

A-t-il raison ?

3) Maintenant, on remplace a par 2.

Expliquer géométriquement ce qui se passe.

(D'après *Mathématiques 1^{re} S option*, Éditions DIDIER, exercice 64)

ANNEXE

Interprétation géométrique des systèmes

• Système 1

Le plan \mathcal{P}_1 d'équation $2,1x + 3y + 4z = 9$ est hachuré en bleu.

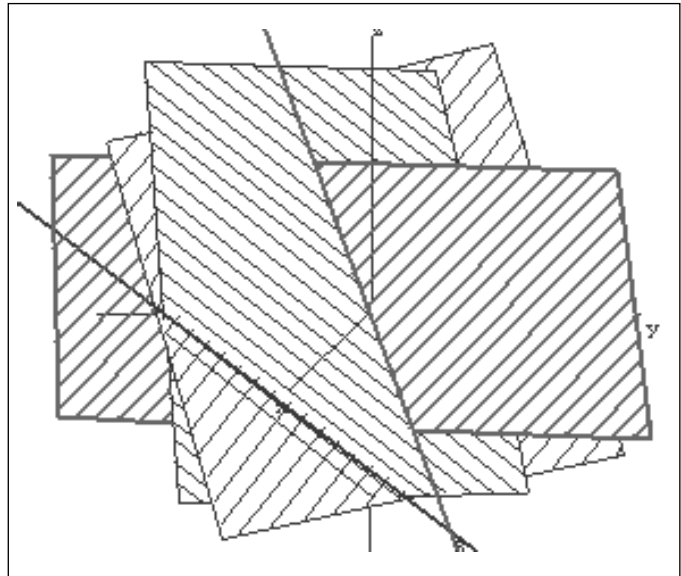
Le plan \mathcal{P}_2 d'équation $6x + 9y + 12z = 6$ est hachuré en rouge.

La droite I_1 intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 est dessinée en rouge.

Le plan \mathcal{P}_3 d'équation $2x - y + z = 5$ est hachuré en vert.

La droite I_2 intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 est dessinée en vert.

Le point S est le point d'intersection de I_1 et de I_2 .



• Système 2

Le plan \mathcal{P}_1 d'équation $1,9x + 3y + 4z = 9$ est hachuré en bleu.

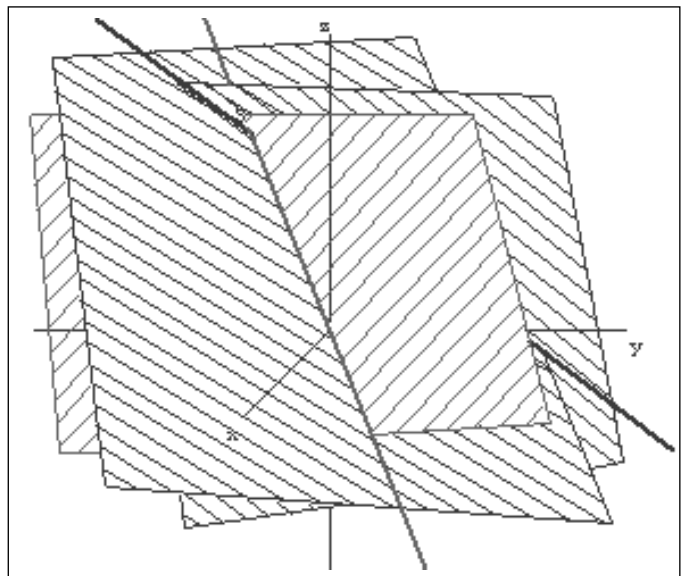
Le plan \mathcal{P}_2 d'équation $6x + 9y + 12z = 6$ est hachuré en rouge.

La droite I_1 intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 est dessinée en rouge.

Le plan \mathcal{P}_3 d'équation $2x - y + z = 5$ est hachuré en vert.

La droite I_2 intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 est dessinée en vert.

Le point S est le point d'intersection de I_1 et de I_2 .



• Système 3

Le plan \mathcal{P}_1 d'équation $2x + 3y + 4z = 9$ est hachuré en bleu.

Le plan \mathcal{P}_2 d'équation $6x + 9y + 12z = 6$ est hachuré en rouge.

La droite I_1 intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 est dessinée en bleu.

Le plan \mathcal{P}_3 d'équation $2x - y + z = 5$ est hachuré en vert.

La droite I_2 intersection de \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 est dessinée en rouge.

Les droites I_1 et I_2 sont parallèles.

