

Des outils numériques pour l'enseignement des mathématiques

Jacques Moisan

DOYEN DU GROUPE DES MATHÉMATIQUES
DE L'INSPECTION GÉNÉRALE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Un état des lieux portant sur les outils et leurs usages ; des propositions concernant l'évaluation et les examens afin d'aplanir les obstacles.

Traditionnellement, le professeur de mathématiques était réputé pour enseigner sans outil et sans « accessoire ». Disposer d'un tableau et d'un morceau de craie semblait sa seule exigence. Mais aujourd'hui, de même que pour le professionnel ou l'utilisateur des mathématiques, il est impossible de se passer de ressources numériques, enseigner les mathématiques nécessite impérativement d'enseigner en même temps l'usage des outils de calculs, de représentation ou de programmation permettant de résoudre des problèmes mathématiques.

Dans cet article, nous nous appuyons sur les programmes de mathématiques en vigueur ou en cours de publication et les documents d'application ou d'accompagnement qui s'y rapportent¹, sur le *Rapport officiel de la commission de recherche sur l'enseignement des mathématiques*² (la CREM, présidée par Jean-Pierre Kahane, puis par Jean-Christophe Yoccoz), en particulier sur la partie intitulée « Informatique et enseignement des mathématiques », coordonnée par Michel Merle, ainsi que sur les préconisations du groupe des mathématiques de l'inspection générale³.

Les logiciels

À la fin du collège, un élève doit savoir « maîtriser l'utilisation d'un tableur-grapheur et d'un logiciel de construction géométrique⁴ ». Ces logiciels font l'objet de préconisations d'usage dans tous les programmes rénovés de lycée (LGT et LP). Selon les voies, les séries et les niveaux, certains logiciels sont requis ; d'autres, pratiqués.

À tous les niveaux, les logiciels sont utilisés pour « faire des mathématiques », c'est-à-dire pour aider à résoudre des problèmes mathématiques. La maîtrise technique doit donc être acquise très tôt par les élèves afin que les problèmes pratiques d'utilisation du logiciel n'interfèrent pas sur l'activité mathéma-

tique proprement dite. Cette maîtrise de base est, à un niveau donné, celle validée par le B2i.

Le tableur-grapheur

Le tableur (et son complément le grapheur) est le seul outil numérique, en dehors de la calculatrice, dont l'usage – d'après les programmes – est obligatoire dans toutes les séries de collège et de lycée (LGT et LP) de la classe de cinquième aux classes terminales.

Ces usages en mathématiques sont multiples et seuls les principaux, explicitement cités dans les programmes, sont mentionnés ici :

- l'illustration de la proportionnalité et de ses divers modes de représentation au collège ;
- l'initiation au calcul littéral et aux priorités opératoires au cycle central du collège ;
- le traitement numérique et graphique des données statistiques dans toutes les classes ;
- la simulation de tirages aléatoires et l'échantillonnage en classe de seconde GT ;
- l'introduction aux fonctions et à leur composition dans le second cycle ;
- l'arithmétique en 3^e, 2^{de}, série L et série S ;
- l'écriture et le traitement d'algorithmes numériques au collège, en série L et en série S.

Il est donc indispensable que la maîtrise technique de ce logiciel (comprenant la maîtrise de son utilisation en mathématiques) – dont l'apprentissage commence dès la classe de 6^e en cours de technologie – soit acquise à la fin du collège, ainsi qu'il est écrit dans les programmes de collège.

Les logiciels de construction géométrique

Pour ces logiciels aussi, il faut que la maîtrise technique soit acquise à la sortie du collège.

Les logiciels de géométrie dynamique plane permettent des constructions « à la règle et au compas » aisément modifiables. Ils donnent ainsi la possibilité de mettre en place, en géométrie, une véritable méthode d'investigation – dans l'esprit des nouveaux programmes de collège – et constituent une aide essentielle à l'apprentissage de la démonstration. Ils permettent aussi la visualisation de transformations d'une configuration ou d'un lieu géométrique. Ils ont leur place, en particulier,



dans l'étude des différentes représentations en perspective.

Les logiciels de construction géométrique dans l'espace ont aussi cet aspect dynamique. Ils sont d'abord une aide à la description et à la vision de solides, à l'étude de sections ou d'intersections, à la réalisation de patrons – mais aussi à l'acquisition de la vision dans l'espace.

La maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique prépare aussi les élèves à l'utilisation de logiciels professionnels de dessin technique employés dans d'autres disciplines ou dans certaines poursuites d'études.

Les logiciels de calcul et de traçage

Si calculer et tracer « à la main » restent des compétences indispensables dans le processus d'apprentissage des mathématiques, il est important de préparer les élèves à calculer et à tracer comme « dans la vie au XXI^e siècle », c'est-à-dire à l'aide d'outils numériques. Bien entendu, dans cet apprentissage doit être inclus celui des limites de ces outils et de la nécessité du contrôle des résultats.

L'utilisation raisonnée dans l'enseignement des mathématiques d'un logiciel de calcul formel permet à la fois de faciliter les apprentissages et de résoudre des problèmes complexes, plus proches de ceux de la vie courante, mais aussi de recentrer l'enseignement des mathématiques sur les fondamentaux : résolution de problèmes, apprentissage de la rigueur et de la nécessité du contrôle, plutôt que sur les compétences purement techniques.

L'algorithmique

La démarche algorithmique peut être définie comme la production d'« *un raisonnement formalisé dans un univers défini*⁵ ». Dès l'école primaire, elle est présente dans l'enseignement des mathématiques, dans les domaines du calcul et des constructions géométriques. L'algorithmique a été explicitement introduite dans les nouveaux programmes de spécialité mathématiques en terminale L. Plus modestement, la pensée algorithmique n'apparaît pas en tant que telle dans les programmes de la série S, où il est noté simplement : « *Compte tenu de l'horaire imparti et des débats*

en cours, il n'est proposé ici aucun chapitre d'informatique. Néanmoins, l'élève devra mettre en œuvre, notamment sur sa calculatrice, les notions de boucle et test. »

L'écriture de programmes et leur mise en œuvre nous semblent essentielles dans la mesure où cette activité, par son caractère d'« effectivité », valide de façon objective un raisonnement. Les outils recommandés pour l'écriture de programmes sont les langages de programmation des calculatrices et les fonctions du tableur qui peuvent être combinées ou non sous forme de « macros ».

Les « exercices »

On désigne sous ce nom barbare des logiciels produisant des exercices (souvent avec des données aléatoires) permettant aux élèves de s'entraîner et de se tester en autonomie. Les plus performants d'entre eux ont une analyse « intelligente » de réponse (et pas seulement une vérification de conformité à une réponse modèle), pratiquent une analyse d'erreurs plus ou moins élaborée et proposent des outils d'aide ou de remédiation (sous forme d'extraits de cours, d'animations Flash ou d'exercices de remédiation).

Ces « exercices » peuvent opérer dans des domaines divers (calcul numérique ou littéral, construction géométrique, géométrie dans l'espace) et fonctionner en ligne ou hors ligne. Pour que leur utilisation (en étude ou à la maison) soit efficace, il importe qu'elle soit coordonnée par le professeur et mise en synergie avec sa démarche pédagogique.

Les calculatrices

Le calcul automatisé

L'utilisation des calculatrices – qui n'est pas exclusive de l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication et du calcul mental ou posé – est préconisée dès l'école primaire dans les nouveaux programmes et se poursuit tout au long de l'enseignement secondaire. L'apprentissage de leur utilisation critique est un point essentiel de la formation en mathématiques.

1. À consulter sur le site Eduscol, <http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHPR01.htm>.

2. À consulter sur le site <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/>.

3. À consulter sur le site du groupe des mathématiques de l'IGEN, <http://igmaths.net/>.

4. Introduction du projet de programme de troisième.

5. *Informatique et enseignement des mathématiques* dans le rapport de la CREM.

Calculatrices graphiques, calculatrices formelles, etc.

L'utilisation des calculatrices graphiques, programmables et disposant de fonctions statistiques est préconisée dans les programmes des lycées. Elles sont indispensables pour l'élève d'une série scientifique ou utilisatrice de mathématiques et il est difficile de concevoir, par exemple, un enseignement de la statistique sans ces outils qui sont nécessaires pour résoudre les problèmes « réels ».

Des expérimentations⁶ ont montré tout l'intérêt de l'utilisation des calculatrices formelles en formation et en évaluation. Pour l'instant, l'Institution n'a pas souhaité (ou pas pu) sauter le pas en intégrant l'usage raisonné de cet outil dans l'enseignement des mathématiques, même dans les classes préparatoires scientifiques où l'utilisation d'un logiciel de calcul formel fait pourtant partie des programmes.

Quel avenir ?

Des calculatrices scientifiques commencent à proposer un véritable tableur-grapheur qui devrait se révéler un outil pédagogique important. On peut espérer que dans un avenir proche les calculatrices évoluées comportant, entre autres, des fonctions graphiques, du calcul formel, un tableur-grapheur, un module de géométrie dynamique et un langage de programmation deviendront un réel outil d'enseignement et de formation. Leur généralisation ouvrirait le champ à un enrichissement des activités et des problèmes proposés aux élèves.

Les usages

Les usages préconisés ci-dessous sont décrits dans le document *Les technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée*⁷.

L'utilisation de l'ordinateur en classe de mathématiques

Cette utilisation par le professeur, ou par un élève qui « passe au clavier », permet d'illustrer une définition ou une propriété au moment où elle est introduite. Elle est donc courte. Elle nécessite la présence d'un ordinateur relié à un vidéoprojecteur, disponible à tout instant dans la classe.

Dans une salle équipée de manière adéquate, on peut aussi envisager l'utilisation par les élèves d'ordinateurs en fond de classe autant que de besoin, au cours d'une activité de travaux pratiques, d'une résolution de problème...

L'utilisation des calculatrices

Les calculatrices scientifiques récentes, disposant de fonctions nombreuses, variées et sophistiquées,

nécessitent un apprentissage. Celui-ci est grandement facilité dans les lycées où un modèle est imposé aux élèves (comme cela est courant dans les pays étrangers). Dans le cas contraire, les enseignants sont obligés de jongler entre les marques et les modèles ; devant l'ampleur de la tâche (et son intérêt limité), la plupart y renoncent et laissent les élèves se débrouiller. Ces derniers n'utilisent alors, en général, que les fonctions de base.

La salle informatique

La séance se déroule sous forme de TP sur ordinateur. Les élèves, en groupe restreint, peuvent être seuls ou à deux par poste ; dans ce dernier cas, qui devrait être la règle au début, celui des deux élèves qui n'est pas au clavier est chargé de vérifier et de garder une trace.

Pour une telle séance, il convient que les trois conditions suivantes soient remplies :

- la séquence informatique est simple et progressive de sorte que tous les élèves puissent effectivement travailler pendant la totalité de la séance et arriver à un résultat, même modeste ;
- la manipulation sur l'ordinateur est complétée par un travail mathématique écrit ; une conjecture est validée par une démonstration, un contre-exemple s'intègre dans la restitution, etc. ;
- un compte rendu de TP est demandé et corrigé par le professeur.

Si la salle informatique a une configuration adaptée et permet à la fois le travail d'une partie des élèves au clavier et de l'autre partie sur des tables banalisées, il est bon de prévoir une alternance des élèves derrière les ordinateurs de façon à marquer de manière plus nette la complémentarité du travail mathématique et du travail sur l'ordinateur. Cette disposition doit être adoptée lorsque aucun dédoublement n'est possible (par exemple dans la série STG).

L'utilisation hors du temps d'enseignement

Les élèves doivent pouvoir travailler, en libre-service (mais en présence d'un adulte), dans le « laboratoire de mathématiques » ou, à défaut, dans une salle équipée de micro-ordinateurs reliés à Internet et pourvus des logiciels utilisés en mathématiques. Cet accès est une condition essentielle pour l'égalité des chances. Il est crucial dans le cadre du travail des élèves en autonomie.

Quelles évolutions ?

Les expériences⁸ du type « Un portable pour chaque élève » ou « Cartable électronique » ne nous semblent pas, pour l'instant, très intéressantes, faute de réflexion et d'accompagnement pédagogiques et d'intégration de l'usage à l'enseignement des mathématiques.

6. Par exemple celles de Luc Trouche au lycée Joffre de Montpellier.

7. Ce texte, qui peut être lu à partir des sites Eduscol et du groupe des mathématiques l'IGEN (voir *supra* les URL), est complété par deux guides d'équipement pour le collège et pour le lycée (LGT et LP).

8. Expériences menées dans certains départements à l'initiative des collectivités territoriales.

L'usage du tableau électronique interactif en est au stade de l'expérimentation et il faut attendre le recul nécessaire.

Nous croyons beaucoup à l'efficacité d'une mesure d'imposition dans chaque classe d'un modèle de calculatrice unique, de la même manière qu'un unique manuel est imposé. Cela demande une coordination dans l'établissement et avec les établissements voisins et, à notre avis, une labellisation des modèles de calculatrices agréés pour un niveau donné. Une telle mesure faciliterait l'apprentissage des fonctions de la calculatrice et permettrait une véritable intégration de l'outil à l'enseignement des mathématiques.

Des expérimentations sont en cours, sous la conduite des corps d'inspection et de l'INRP pour l'utilisation de nouveaux modèles.

L'évaluation et les examens

Constat sur l'existant

Les calculatrices. Actuellement, dans les examens et concours, les calculatrices sont autorisées ou non, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16-11-1999 d'après laquelle sont autorisées (ou interdites) « toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante ». Il n'est pas possible d'apporter des limitations en raison de la marque, du modèle et même de la taille (le terme « de poche » est extensif!).

Il existe ou existera sur le marché des calculatrices possédant des capacités mémoire importantes (de l'ordre du gigaoctet) ou des possibilités de communication (par ondes radio) dont l'usage en salle d'examen est interdit certes, mais difficilement contrôlable.

Les différences de performances entre les calculatrices introduisent *de facto* une inégalité entre les candidats : bien que les concepteurs de sujets aient pour consigne de composer des sujets ne donnant pas un trop gros avantage aux candidats munis de calculatrices performantes (et sachant s'en servir) et que ce point soit contrôlé par les inspecteurs, il est actuellement impossible de gommer toute inégalité dans ce domaine.

Interdire purement et simplement l'usage des calculatrices en mathématiques au brevet ou au baccalauréat irait à l'encontre des préconisations pédagogiques des programmes et nous ne pouvons nous y résoudre dans le cadre des épreuves actuelles.

L'ordinateur. La situation est simple : **aucun examen de l'enseignement du second degré ne prévoit actuellement l'utilisation d'un ordinateur en mathé-**



matiques. Dans les épreuves (comme l'épreuve anticipée de mathématiques et informatique de la série L) où nous souhaitons évaluer les compétences relatives à l'utilisation du tableur, nous en sommes réduits à faire du tableur-papier, c'est-à-dire à montrer au candidat l'état d'une feuille de calcul et à lui demander de l'interpréter ou de la compléter. Nous allons être obligés de procéder de la même manière pour les candidats au baccalauréat STG dont l'approche de la feuille de calcul est pourtant plus intuitive et expérimentale que conceptuelle.

Propositions

Si l'on veut développer l'usage des outils numériques dans l'enseignement des mathématiques, le phénomène typiquement français du pilotage de l'enseignement par les examens rend indispensable la mise en place au brevet et au baccalauréat d'une **épreuve pratique de mathématiques**. Cette épreuve consisterait en la résolution d'un ou plusieurs exercices avec utilisation d'un ordinateur – comportant les logiciels prévus au programme – ou (au choix du candidat, si l'exercice s'y prête) d'une calculatrice évoluée. Pour des raisons matérielles, vu le nombre de candidats concernés, nous préconisons que cette épreuve prenne la forme d'un contrôle en cours de formation (CCF) mis en place dans l'établissement du candidat. Cette épreuve entrerait pour une part à déterminer dans la note finale de mathématiques à l'examen.

L'évolution des concours de recrutement d'enseignants

Ces dernières années, les concours de recrutement d'enseignants de mathématiques – sous l'impulsion de leurs présidents inspecteurs généraux – ont évolué dans le sens de la prise en compte de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, avec des objectifs et selon des modalités différentes selon les concours.

Le phénomène typiquement français du pilotage de l'enseignement par les examens rend indispensable la mise en place au brevet et au baccalauréat d'une épreuve pratique de mathématiques.



9. Ce qui nécessite, comme il a été dit plus haut, que la salle comporte à la fois des places devant ordinateur et des places traditionnelles pour un travail papier-crayon.

L'agrégation externe

Depuis la session 1999 du concours externe de l'agrégation de mathématiques, existe à l'oral une épreuve de modélisation. Cette épreuve, réformée pour la session 2006, consiste à demander au candidat, à partir d'un texte décrivant une situation de modélisation mathématique, de synthétiser, d'expliquer, de développer cette situation de modélisation. Le candidat a à sa disposition, tant pendant la préparation que pendant l'exposé devant le jury, un ordinateur sur lequel sont installés des logiciels de calcul numérique et de calcul formel. Il est invité à utiliser un de ces logiciels, au cours de son exposé, pour traiter un exemple, expliquer un procédé, visualiser un phénomène.

À partir de la session 2006 est prévue une option informatique dans laquelle une des épreuves orales est une leçon d'informatique fondamentale portant sur l'ensemble d'un programme d'informatique théorique de niveau deuxième cycle universitaire (logique, algorithmique et structures de données, programmation, compilation). Pour cette option, l'épreuve de modélisation est baptisée « Analyse d'un système informatique » et comporte l'écriture d'un court programme informatique dans un des langages prévus (C, C++, Caml, Java).

Le CAPES externe

Depuis la session 2005, la seconde épreuve d'oral (épreuve sur dossier) porte sur un dossier fourni par le jury, contenant un texte d'exercice sur lequel le candidat travaille pendant sa préparation. Il doit, d'une part, répondre à des questions concernant l'exercice, et d'autre part proposer d'autres exercices sur le thème auquel le dossier se réfère.

Certaines questions et certains exercices rendent obligatoire le recours à une calculatrice. Comme un seul dossier est fourni, les candidats, n'ayant pas de choix, ne peuvent « jouer l'impasse » en évitant un dossier recourant aux calculatrices. Ainsi, la présence et l'utilisation des calculatrices ont été puissamment renforcées.

Les utilisations prévues tournent autour du calcul numérique, y compris des programmations simples, des représentations graphiques, de l'usage des tableurs, et de la géométrie dynamique. L'utilisation du calcul formel est possible, mais n'entre pas dans le programme actuel de l'épreuve, puisqu'elle se limite strictement à la réunion des programmes de l'enseignement secondaire. Les machines présentes sont des plus récentes; deux modèles seulement sont proposés au choix du candidat; ils possèdent évidemment les fonctionnalités nécessaires aux utilisations précisées ci-dessus.

Le CAPES interne

Depuis la session 2001, les candidats ont le choix, lors de l'épreuve orale, entre une leçon tradition-

nelle et une leçon « avec utilisation des TICE ». À cet effet, ils disposent – lors de la préparation comme lors de l'exposé devant le jury – d'un ordinateur sur lequel sont installés les logiciels les plus courants (géométrie, tableur, calcul formel) : Cabri II, Géoplan et Géospace; Excel; Derive; Toutyx.

Ils disposent aussi de calculatrices de modèles variés pouvant être reliées à une tablette rétroprojectable et permettant ainsi simplement une présentation des calculs, graphiques ou programmes à l'ensemble de la commission d'oral.

Depuis la mise en place de ces modalités, on constate une augmentation significative de la proportion de candidats choisissant la leçon « avec utilisation des TICE ». De plus, certains, puisque cela est autorisé, choisissent l'autre leçon mais y introduisent les TICE, de façon souvent pertinente.

Le CAPLP interne

À partir de la session 2006 est mis en place un dispositif semblable à celui du CAPES interne avec les mêmes logiciels et des calculatrices.

Conclusion

L'utilisation des outils numériques dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée avance à petits pas. Les obstacles ne sont pas négligeables :

- des différences significatives d'équipement entre les établissements (ordinateurs, logiciels, vidéo-projecteurs) ;
- la non-priorité de l'équipement pour les mathématiques dans de nombreux établissements ;
- des formations des professeurs inadaptées ou anciennes ;
- la non-prise en compte des compétences liées à l'utilisation de ces outils dans les épreuves de brevet et de baccalauréat ;
- la suppression des modules dans les classes de premières générale et technologique et l'absence de dédoublement dans certaines classes (collège, 1^{re} et terminale STG) ;
- l'inadaptation des salles informatiques ou multimédias à un usage de l'informatique en mathématiques pour une classe entière⁹ ;
- une motivation insuffisante des équipes en raison notamment des obstacles précédents.

De fait, dans de nombreux établissements, le programme de mathématiques dans certaines classes (cycle central du collège, seconde GT) n'est pas appliqué. L'exemple de l'épreuve anticipée de mathématiques et informatique de première L montre que la prise en compte à l'examen (même imparfaite) est un point essentiel. L'introduction d'une épreuve pratique de mathématiques au brevet et au baccalauréat est donc urgente. Nous la considérons comme une priorité. ●