par Gilles Cohen

Ce qu'en pensent les élèves

L'effort vient d'être fourni. André, Clément, Jeanne, Adrien et Pascal, ont achevé avec succès la séance d'une heure de TP avec le logiciel TI-Nspire™. Il ne reste plus que la partie théorique, à rendre le lendemain. Echange d'impressions.

Le sujet consistait à appliquer la méthode d'Archimède pour trouver un encadrement de π (voir le texte ci-contre). Fatigués ? Pas du tout, ils sont volontaires pour la session de questions réponses. Est-ce parce qu'ils ont tous réussi à aller au bout du problème ?

André : Presque tout le monde dans le groupe – une demi classe, soit 18 élèves – a trouvé le résultat à l'aide du tableur. Un encadrement de π à 10^{-9} près est obtenu pour $n = 218$. Même ceux qui réussissent le moins bien dans le contexte scolaire classique se surpassent lors des TP.

Pascal : Oui, moi par exemple.(rires)

Tangente : « Que pensez-vous de ces séances ? L'ambiance, le rythme ? »

André : Il règne une excellente ambiance, d'abord parce qu'on est en demi groupe, ensuite parce qu'on échange avec la prof.

Clément : Et puis, on peut discuter avec les autres… (regardant Nathalie Briant) sans qu'il y ait de chahut, bien sûr !

Jeanne : Pour ce qui est du rythme, cela va plus vite qu'en classe.

Adrien : Ou plus exactement, chacun va à son rythme. On n'est pas retardé par les autres, mais on n'est pas non plus obligé de zapper quand on n'a pas compris, sous prétexte qu'il faut passer à la suite.

Pascal : Oui, il n'y a que l'attente du « visa » de la prof qui peut nous retarder, mais… (il fait mine de parler bas pour que Nathalie n'entende pas) on s'en passe souvent pour continuer.

Nathalie confirme : Je cours sans cesse d'un élève à l'autre, je n'ai pas une seconde à moi pendant ces séances, et parfois mon visa, qui théoriquement permet d'aborder l'activité suivante, tarde à arriver.

Tangente : « Et l'utilité de ces séances ? »

Pascal : Géant. Et en plus, on apprend l'histoire des mathématiques, comme aujourd'hui avec la méthode d'Archimède.

Clément : Sur le plan des bases informatiques, c'est super. Plus étonnant, cela me permet de découvrir ou de mieux comprendre le cours de maths. Je suis vraiment très content d'avoir participé à cette expérimentation. Mon seul regret, c'est que cela ne compte pas pour le bac dès cette année. Cela faisait 3 ou 4 points gagnés sans se fouler.

Adrien : Grâce à ces séances, je me sers du logiciel de façon naturelle, dans d'autres contextes que ces séances dédiées. Chez moi, par exemple, avec la calculatrice ou sur mon ordi sur lequel j'ai installé le logiciel.

Tangente : « Le logiciel : facile à maîtriser ? Performant ? »

Adrien : S'en servir « à peu près » est très rapide. Approfondir, cela se fait au fur et à mesure.

Jeanne : Ce qui fait sa force, c'est la possibilité de « relier » les courbes au tableur, ce qui est mieux qu'Excel, même si Excel offre certainement des fonctionnalités supplémentaires, mais inutiles pour un TP. La partie géométrique, elle, est plus intuitive que Geoplan, que nous utilisions précédemment, notamment grâce aux icônes.

André : Le logiciel est bien mieux que celui de physique, Genesis, qu'en plus nous n'avons pas l'occasion d'utiliser chez nous.

Pascal : Le seul inconvénient, c'est que nous avons toujours la version « beta » du début, on aurait préféré bénéficier de mises à jour régulières. C'est comme la calculatrice, c'est plus long que sur l'ordinateur, mais là encore, nous n'avons pas la dernière version.

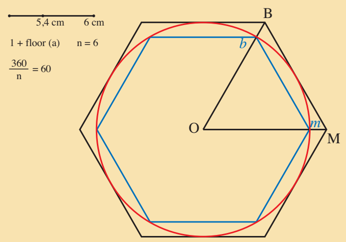
Nathalie intervient : Pour compenser cet écueil, tous les élèves participant à l'expérimentation ont reçu en cadeau le nec plus ultra, une « Voyage 200 ». Le jour du bac, ils pourront emporter les deux, ayant droit à un remplacement.

Tangente : « Mais laquelle des deux utiliserez-vous en ressource principale ? »

Les cinq (en chœur) : La TI-Nspire !

La méthode d'Archimède pour des encadrements de π

Principe :
Au cours des siècles, de nombreux mathématiciens ont cherché à « approcher » le nombre π. Le savant grec Archimède (287 – 212 avant J.– C.) a montré que π était compris entre 3,133 et 3,142 grâce à une méthode consistant à encadrer l'aire d'un disque par celles de polygones réguliers.
C désignant un cercle de rayon unité et A l'aire du disque défini par C (soit π), on construit deux polygones réguliers à n côtés, p_n, inscrit et P_n, circonscrit à C.



En appelant a_n et A_n les aires respectives de ces deux polygones, on a :
$a_n \leq A \leq A_n$.
Si, à présent, le nombre de cotés passe de n_1 à n_2, avec $n_1 < n_2$, on obtient avec les mêmes notations :
$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq A \leq A_{n_2} \leq A_{n_1}$.
Ainsi les deux suites, l'une croissante, l'autre décroissante, donnent, lorsque n augmente, des encadrements de plus en plus précis de l'aire A du disque, c'est-à-dire de π.

1. Sur un logiciel de géométrie :

Le but de cette partie : faire apparaître les polygones p_n et P_n, afficher le nombre de côtés n (variable entière n comprise entre 1 et 10), l'aire a_n de p_n et l'aire A_n de P_n.

a) Création d'un curseur
(pour faire varier n)

– Ouvrir une page « graphiques & géométrie », cacher la ligne de saisie et les axes.
– Créer un segment quelconque, le mesurer puis fixer sa longueur à 10 cm.
– Créer un point sur ce segment, mesurer la distance de l'origine du segment à ce point (on la nomme a).
– Choisir dans le menu « actions » texte et taper la formule : 1 + floor(a) puis Entrée. (NB : « floor » désigne la fonction « partie entière »).
– Choisir « calculer » dans le menu des mesures. Cliquer sur la formule précédente (elle devient grisée) puis sur la valeur de a. Cliquer de nouveau.
– Déplacer le point sur le curseur. La formule donne une valeur entière entre 1 et 11.
– Dans le menu « actions », choisir « lancer le menu vars ». Cliquer sur la valeur numérique de l'entier obtenu, cliquer sur « stocker la variable », puis taper n et Entrée. On a ainsi défini la variable n.
– Visa de la prof :

b) Création du cercle C et du polygone inscrit

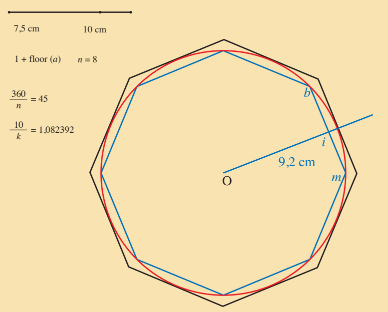
On va créer le polygone régulier inscrit dans C à n côtés en utilisant la rotation de centre O et d'angle $360°/n$
– Créer un cercle de rayon 10 (1 serait trop petit). Nommer O son centre.
– Placer un point m sur C
– Angle de la rotation : à l'aide de « texte », taper la formule : puis « calculer », puis cliquer sur n puis cliquer à côté de la formule pour voir s'afficher l'angle. Tester.
– Utiliser la rotation de centre O, désigner m puis l'angle précédent et nommer b le point obtenu.
– Continuer ainsi sur le pourtour du cercle, sans donner de nom aux autres points créés.
– Créer alors le polygone passant par ces points. Attention, ne pas utiliser « polygone régulier » !
– Visa de la prof :

c) Création du polygone circonscrit au cercle C

On va procéder à un agrandissement du polygone précédent, à l'aide d'une homothétie de centre O et de rapport $10/k$ où k est la distance Oi, (i est le milieu de la corde [bm]).
– Créer le texte $10/k$ puis choisir « calculer » puis cliquer sur la distance Oi que l'on aura préalablement calculée.
– Utiliser l'homothétie : cliquer sur le centre O, la valeur du rapport $10/k$ puis sur un côté du polygone inscrit : le polygone circonscrit s'affiche alors.
– Visa de la prof :

d) Affichage des valeurs des aires du polygone inscrit, du cercle et du polygone circonscrit.

Réaliser cet affichage à 10^{-6} près en cm^2 et donner les valeurs obtenues pour $n = 6$ et $n = 8$.
Aire (p_6) = ...
Aire (p_8) = ...
Aire (P_6) = ...
Aire (P_8) = ...



2. Sur tableur :

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 4.
On admet dans cette question que :
aire (Obm) = cos (π/n) ¥ sin(π/n) et aire (OBM) = tan(π/n)
À l'aide d'un tableur, calculer a_n et A_n en partant de $n = 4$ et en doublant la valeur de n à chaque ligne.
À partir de quelle valeur de n donnée par le tableau a-t-on une différence entre a_n et A_n inférieure à 10^{-9} ?
Faire afficher un test signalant les valeurs de n pour lesquelles la condition précédente est atteinte.
Attention : Sur Excel, la syntaxe est =SI(...), sur TI-Nspire, la syntaxe est =when(test , " oui ", " non ")
Donner alors l'encadrement de π obtenu.
Visa de la prof :

n	a_n	An	test
4	2,0000000000	4,0000000000	Non
8	2,8284271247	3,3137084990	Non
16	3,0614674589	3,1825978781	Non

3. Partie théorique :

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 4.
a) Justifier les valeurs du centre et du rapport de l'homothétie utilisée pour construire le polygone P_n, image du polygone p_n par cette homothétie.
b) Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{bOm}$ en fonction de n.
c) Déterminer la longueur OM en fonction du nombre n de côtés
d) Démontrer les formules (données en 2) des aires de OBM et de Obm en fonction du nombre n de côtés.
e) Que peut-on en déduire quant à la nature des suites (a_n) et (An) ? Justifier l'affirmation.