UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Fernando Juan

El concepto de límite, como todo lo relacionado con el infinito, es uno de los más difíciles en matemáticas. El uso de las nuevas tecnologías favorece una aproximación intuitiva a este concepto mediante procedimientos numéricos y gráficos. Éstos sustituyen, casi siempre con ventaja, a los procedimientos formales de tipo algebraico.

En particular, los procedimientos gráficos implican especialmente un salto cualitativo en el trabajo didáctico, porque facilitan una conexión conceptual muy estrecha con los objetos matemáticos representados. Sin embargo, a pesar del hecho de que el trabajo con soporte gráfico establece de manera implícita una buena aproximación conceptual, cabe también plantearse la necesidad de introducir en clase actividades cuyo objetivo sea directamente una sólida fundamentación conceptual. Se trata de ayudar a clarificar el sentido de expresiones que aparecen con frecuencia en las clases de Matemáticas y en los libros de texto, cuyo significado es difícil de precisar: frases como “tiende a” y “se acerca al límite tanto como se quiera”. Se trata por lo tanto de intentar despejar alguna incógnita sobre *lo que pasa en el infinito.*

La siguiente actividad es un ejemplo que pretende ir en esa dirección. Lo he experimentado en clase (2º de Bachillerato LOGSE) y os recomiendo que probéis.

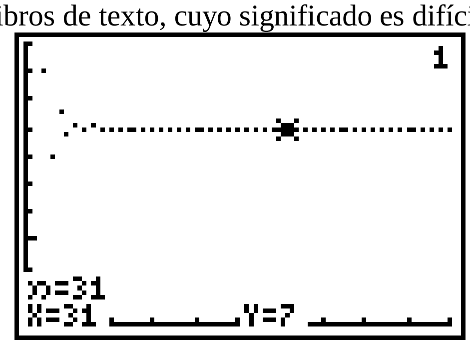
Se trata de analizar la convergencia de la siguiente sucesión:

$$u(n)=\frac{u(n-2)+u(n-1)}{2}$$
, para $n\geq 3$

donde consideraremos, para tener un ejemplo concreto, $u(1)=3$ i $u(2)=9$.

Los primeros términos son: $\{3,\ 9,\ 6,\ 7.5,\ 6.75,\ 7.125\ \ldots\}$

La representación gráfica (funcional) de los primeros términos de la sucesión (en la gráfica tenemos los 50 primeros), es suficiente para establecer, de manera intuitiva pero con gran *convicción*, que esta sucesión converge hacia 7.



El primer paso puede ser desconfiar de la maquina. ¿Es constante la sucesión, tal como aparece en la pantalla, a partir de alguno de sus términos?

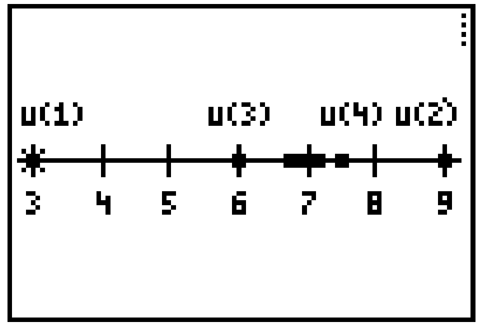
Pero, ¿cuál es el significado de la palabra *convergencia* para nuestro alumnado?

Podemos, ahora sí, usar el álgebra para ver que no es así:

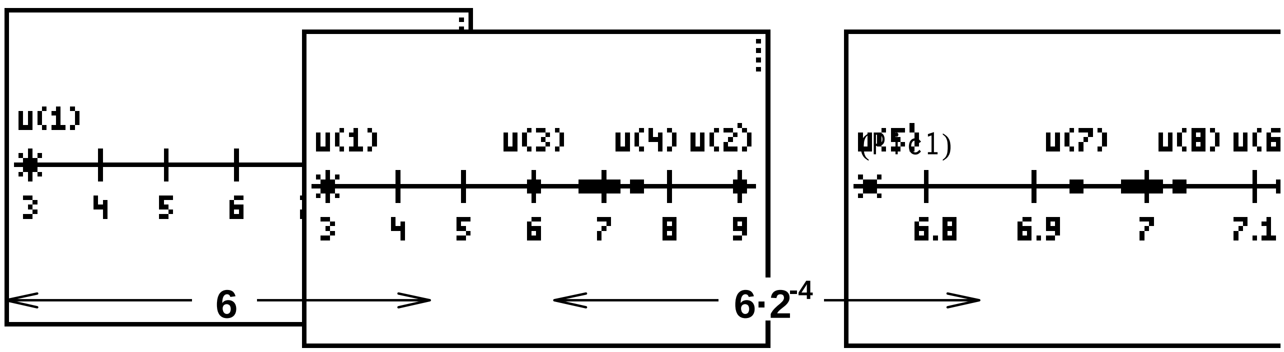
Si $m=\min\{n/\,u(n+1)=u(n)\}$, tendremos que $u(m+1)=u(m)$. Pero, por la definición de u,

$u(m+1)=\dfrac{u(m-1)+u(m)}{2}$. De ambas relaciones se deduce que $u(m-1)=u(m)$, lo cual contradice la condición de mínimo.

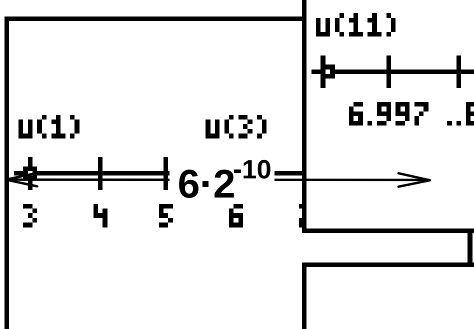
Vamos a utilizar otra forma de representación gráfica para intentar observar la forma en que se produce ese acercamiento hacia el siete. Para ello simularemos con la calculadora una representación sobre la recta real. Utilizaremos el formato de representación en fase (uv), con la ayuda de una sucesión auxiliar, v(n) cuyo valor será una constante cualquiera. Si representamos los dos primeros términos, tendrá este aspecto:

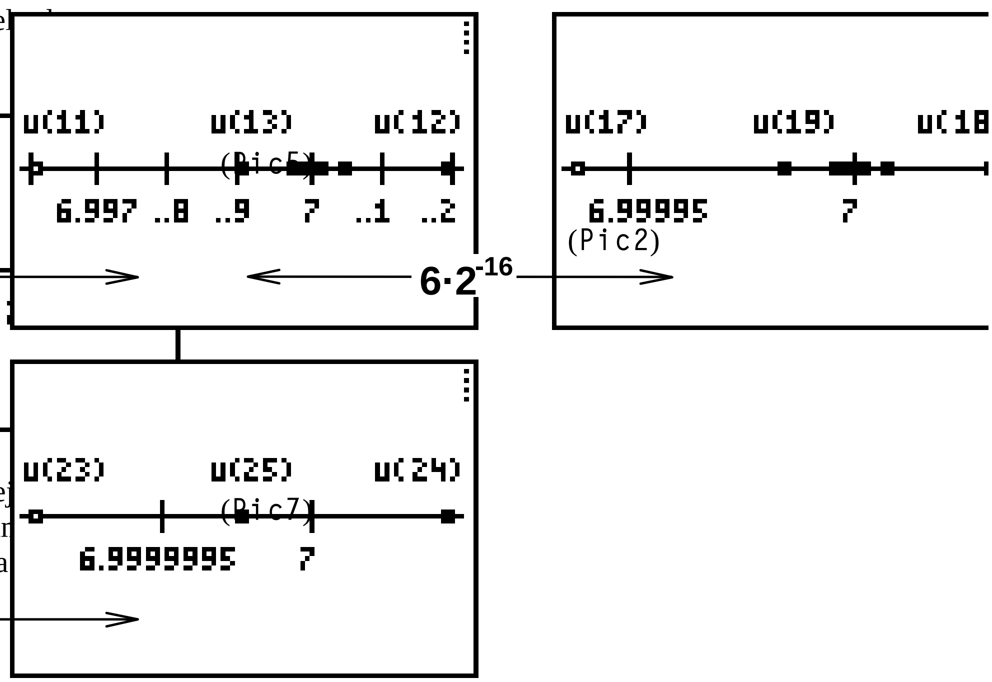


Tenemos ahora la posibilidad de establecer sucesivas aproximaciones. En cada una de ellas vemos que la situación es en esencia equivalente a las anteriores. Cambia la amplitud del intervalo considerado, pero los términos se distribuyen siempre de la misma forma sobre él:



Podemos anticipar el
ocupará el tercero:





Y, representando por ej
primeros, se observa nuevam
ayuda de la tecla [TRACE], la
hacia siete:

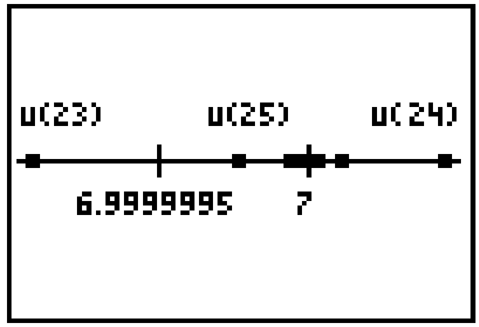
$6\cdot2^{-22}$

(Pic3)

¿Qué ha ocurrido con el 7 durante todo este proceso? Más importante: ¿qué ocurriría si continuáramos adelante? Éstas preguntas y otras parecidas son las que nuestros alumnos deberán plantearse.

En cualquier caso, ¿cuál es la diferencia en

tre e



a imagen y la que representaba los

tres primeros términos? Y también, ¿qué hay de nu
evo en la siguiente representación (que llega has

ta u(50)), respecto de la que contenía

los 25 primeros términos?:

Para poner en práctica esta actividad en clase, es imprescindible trabajar con un programa. El siguiente está diseñado para la TI-83. Los `Pic` tendrán que haberse definido previamente.

```
Seq:Dot
"Ø"→v:FnOff
uvAxes:AxesOff:ExprOff:Dot
⁻1→Ymin
1→Ymax
2.8→Xmin:9.2→Xmax
1→nMin:2→nMax
1→PlotStart
RecallPic Pic1
Trace
3→nMax
RecallPic Pic2
Trace:25→nMax
RecallPic Pic3
Trace
For(I,5,23,6)
```

```
I→PlotStart
(u(I+1)-u(I))/3Ø→M
u(I)-M→Xmin
u(I+1)+M→Xmax
If I=5
RecallPic Pic4
If I=11
RecallPic Pic5
If I=17
RecallPic Pic6
If I=23
RecallPic Pic7
Trace
End
ClrDraw
RecallPic Pic2
Trace
ClrDraw
RecallPic Pic7
Trace
5Ø→nMax
RecallPic Pic8
Trace
```