

# **PROBABILIDAD: SIMULACIÓN Y CALCULADORA**

## **EL PROBLEMA DEL CUMPLEAÑOS**

### **AUTORES:**

**Enrique Gómez**

**Manuel Cortegoso**

### **PROFESORES DEL:**

**Instituto de Enseñanza Secundaria A XUNQUEIRA**

**PONTEVEDRA**

**Introducción:**

“Casi se puede asegurar que entre cuarenta personas elegidas al azar hay por lo menos dos para las que coinciden sus cumpleaños”.

“Es bastante difícil que elegida una persona entre las cuarenta anteriores, se encuentre alguna otra cuyo cumpleaños coincida con la elegida”.

Frases como estas nos permiten crear entre los alumnos la mínima curiosidad necesaria para empezar una parte de las matemáticas que hasta ahora se ha estudiado poco en la etapa de enseñanza secundaria.

Si comprobamos en una clase, haciendo las experiencias de las frases iniciales, que lo allí afirmado ocurre, estamos en disposición de iniciar a los alumnos en la probabilidad aunque antes de estudiarlo a fondo hay que introducir algunos conceptos previos.

**El problema del cumpleaños:**

*En una clase de 30 alumnos, un profesor de matemáticas hace una encuesta en la que, entre otros datos, pide que se indique el día y el mes de nacimiento. Una vez recogidos los datos, se plantean las siguientes preguntas:*

- a) *¿Cuál es la probabilidad de que dos o más alumnos/as cumplan años el mismo día y el mismo mes?*
- b) *Si elegimos un alumno/a al azar. ¿Será igual de probable que en el apartado anterior, encontrar otro alumno/a que cumpla años el mismo día y el mismo mes que el elegido?*

Entre todos, tratamos de buscar estrategias para contestar las preguntas planteadas.

Empezamos por considerar que el año es de 365 días y por suponer que todos los días son *igualmente probables* como posibles aniversarios.

El *experimento aleatorio* consiste en anotar las fechas de cumpleaños de 30 alumnos, por lo tanto un *suceso elemental* o *caso posible* será una sucesión de 30 números naturales. Para que esta sucesión de 30 números sea más “manejable” y no se repitan números, en distintos meses el mismo día, los tomaremos aleatoriamente entre 1 y 365.

- a) Consideremos el suceso E:

“hay dos o más personas que cumplen años el mismo día y el mismo mes”

Para calcular la probabilidad del suceso E, tendríamos que calcular la probabilidad de que coincida el cumpleaños de 2 alumnos solamente, mas la probabilidad de que coincida el cumpleaños de 3 alumnos solamente y así hasta treinta. Aún así no tendríamos contabilizados todos los *casos favorables* del suceso E. Dada la dificultad que se presenta, parece lógico que busquemos otra manera de resolver el problema.

Resulta mucho más asequible pensar en el *suceso contrario*:

“No hay dos personas que cumplan años el mismo día y el mismo mes”.

Elegimos una alumna/o al azar, la probabilidad de que la fecha de su cumpleaños no coincida con ninguna otra es:  $365/365 = 1$ , ya que es la primera que tenemos.

Para el segundo alumno, la probabilidad de que la fecha de su cumpleaños sea diferente de la 1ª es:  $364/365$

Para el tercer alumno, la probabilidad de que sea diferente de las anteriores es:  $363/365$

... ..

Al llegar al alumno número 30 tendríamos  $336/365$ .

Por lo tanto la probabilidad buscada es:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{365}{365}\right) \left(\frac{364}{365}\right) \left(\frac{363}{365}\right) \left(\frac{362}{365}\right) \dots \left(\frac{336}{365}\right) = 1 - \frac{V_{365,30}}{VR_{365,30}} = 0,70631624$$

b) En este caso el suceso E será:

“Por lo menos un alumno/a cumple años el mismo día y el mismo mes que el elegido”

Trabajando otra vez con el suceso contrario de E, es decir:

“Ningún alumno/a cumple años el mismo día y el mismo mes que el elegido”

La probabilidad de que el cumpleaños de otra persona sea distinto del cumpleaños de la persona elegida es:  $364/365$ , y que esto ocurra con las otras 29 personas es:  $(364/365)^{29}$  luego la probabilidad del suceso E es:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{29} = 0,0764784$$

### Generalización

Si queremos repetir esta experiencia en otras clases, hay que considerar clases con diferente número de personas, es decir, clases de N alumnas/os.

a) Si en lugar de tener 30 personas, tenemos N

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \dots \cdot (365 - (N + 1))}{365^N} = 1 - \frac{V_{365,N}}{VR_{365,N}}$$

b) En este caso para N personas resulta:  $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{N-1}$

### 1. Construcción de tablas

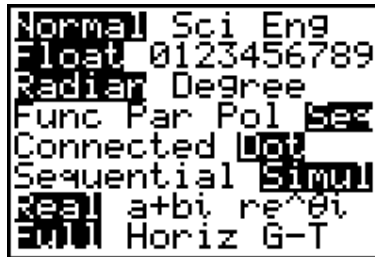
Vamos a construir tablas de probabilidad para los apartados a) y b) del problema cuando varía el número de alumnos.

Estas tablas las genera la calculadora TI – 83 a partir de las sucesiones obtenidas teóricamente en el apartado anterior y definidas mediante su término general, donde  $n$  indica el número de alumnos/as.

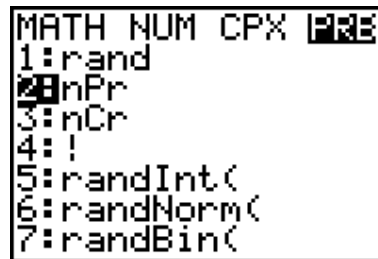
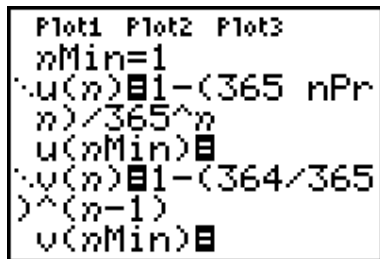
$$a) P(E) = 1 - \frac{V_{365,n}}{VR_{365,n}} \qquad b) P(E) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$$

Teniendo en cuenta que estamos ante un fenómeno discreto de probabilidad, es preciso preparar previamente la calculadora.

Pulsa **MODE** y, con las teclas de cursor, selecciona las opciones de la pantalla, pulsando **ENTER**, para que queden en vídeo inverso.



Si pulsas ahora **Y=**, puedes introducir las sucesiones. Pulsando la tecla **MATH** y el cursor izquierdo, obtienes el símbolo **nPr** que se debe de entender como variaciones de  $n$  elementos tomados de  $r$  en  $r$ , o como permutaciones de  $n$  elementos en el caso de que  $n$  coincida con  $r$ . Para introducir  $n$  debes de pulsar la tecla **X,T,θ,n**



Para que la calculadora haga una tabla, es necesario decirle qué características queremos que tenga dicha tabla. Esto se consigue pulsado **2nd TblSet** e indicando el valor donde quieres que empiece la tabla así como su incremento:



Pulsando **TABLE**:

$n$	$u(n)$	$v(n)$
1	0	0
2	.00274	.00274
3	.0082	.00547
4	.01636	.0082
5	.02714	.01091
6	.04046	.01362
7	.05624	.01633

$n=1$

En la primera columna,  $n$  indica el número de alumnos/as del grupo. En la segunda,  $U(n)$  nos da la probabilidad de que, al menos dos alumnos/as, tengan cumpleaños coincidente. En la tercera columna,  $V(n)$  indica la probabilidad de que, fijado un alumno/a, este tenga cumpleaños coincidente con algún otro de la clase.

Te puedes mover por la tabla con las teclas de cursor para ver los valores de las probabilidades con mas precisión, si llegas al final de una de las columnas y pulsas cursor abajo obtienes los valores de la probabilidad para 8, 9, . . . alumnos.

Si queremos calcular las probabilidades para 25 alumnos ( $n = 25$ ), el método anterior resulta muy lento, compruébalo. Esto se agiliza cambiando las condiciones iniciales anteriores, basta con pulsar 2nd y TblSet y poner la variable independiente en preguntar (ask):

```
TABLE SETUP
TblStart=1
ΔTbl=1
Indent: Auto
Depend: Ask
```

$n$	$u(n)$	$v(n)$
25	ERROR	.06372
$u(n) = .568699704$		

Pulsa 2nd TABLE e  
introduce 25:

Se puede comprobar que la calculadora tiene sus limitaciones pues para valores de  $n$  mayores de 39 da ERROR pues el número  $365 nPr 40$  está fuera del rango de la calculadora.

En esta situación podemos limitarnos a estudiar el problema para menos de 40 alumnos, lo cual nos impide ver la tendencia de las probabilidades cuando el número de alumnos aumenta, o bien intentar hacer esa operación de forma diferente para que no esté fuera del rango de la calculadora.

## 2. Construcción de un programa que calcula probabilidades teóricas.

Vamos a hacer un programa sencillo al que llamamos MASDE39, con el que podemos resolver nuestro problema:

### Líneas del programa MASDE39

```

ClrHome
ClrAllLists
Disp "ELIGE EL NUMERO", "DE
ALUMNOS/AS":Input N
For(I,1,N)
(366-I)/365→L1(I)
End
For(I,1,N)
prod(L1,1,I)→L2(I)
End
Seq
∅→u(nMin):1→nMin:N→nMax:∅→Xmin:
N→X-
max:N→Xsc1:-.25→Ymin:1.25→Ymax:
.25→Ysc1
"1-L2(n)"→u
"1-(364/365)^(n-1)"→v
ExprOff
GraphStyle(1,7):GraphStyle(2,7)
DispGraph

```

### Comentarios

Limpiamos la pantalla principal

Borramos las listas que pudiera haber

Nos pide que introduzcamos el número de alumnos/as con el que queremos hacer los cálculos.

Con un bucle, en la lista  $L_1$  metemos los  $n^{\text{os}}$

$$\frac{365}{365}, \frac{364}{365}, \frac{363}{365}, \dots, \frac{366-N}{365}$$

Con otro bucle, en la lista  $L_2$  metemos los  $n^{\text{os}}$ :

$$L_2(I) = \prod_{j=1}^I L_1(j)$$

Elegimos el modo sucesión

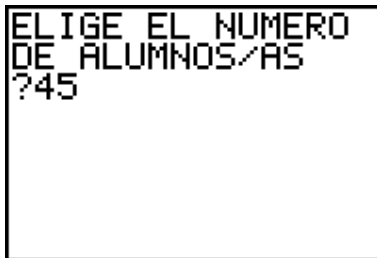
Configuramos la pantalla gráfica para poder ver las gráficas de puntos correspondientes a las sucesiones  $U$  y  $V$  definidas a continuación.

Evitamos que en la pantalla gráfica aparezcan las fórmulas.

Elegimos el tipo de gráfico (discreto) que queremos para las sucesiones.

Representamos gráficamente las sucesiones

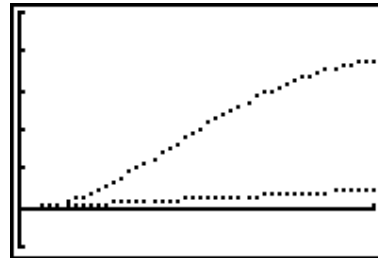
Haciendo correr el programa y eligiendo por ejemplo 45 alumnos/as vemos:



```

ELIGE EL NUMERO
DE ALUMNOS/AS
?45

```



Con la tecla TRACE y las teclas de cursor podemos comparar ambas probabilidades.

### 3. Programas de simulación: Probabilidad empírica.

Vamos a elaborar dos programas para cada uno de los apartados a) y b) que permitan:

- i) Simular el experimento tantas veces como queramos y con cualquier número de alumnos/as.
- ii) Comparar las probabilidades empírica y teórica en cada caso.

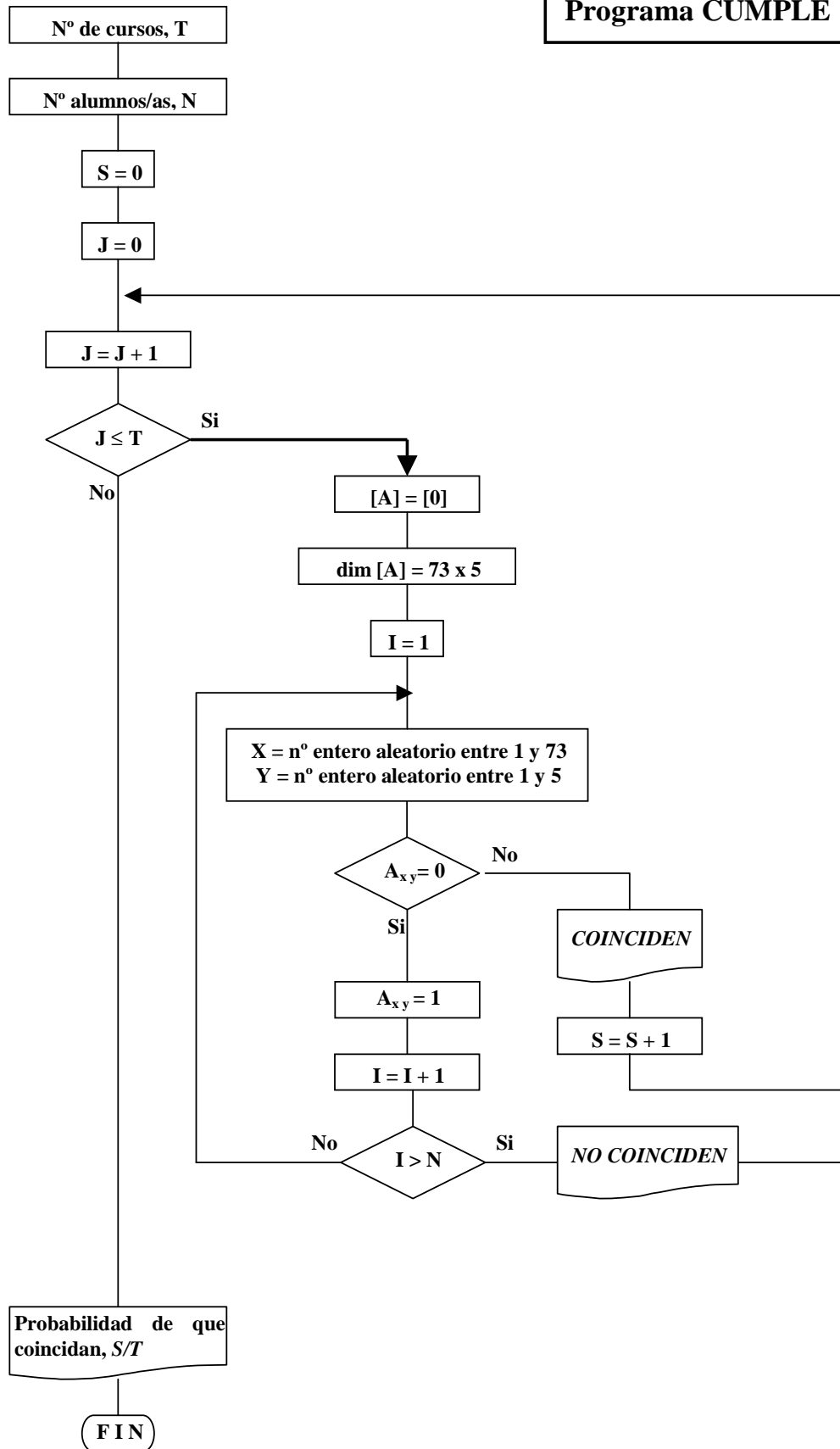
#### a) Para el suceso:

**“hay dos o más personas que cumplen años el mismo día y el mismo mes”**

Con este programa pretendemos que, indicando el  $n^\circ$  de cursos en que queremos hacer el experimento e indicando igual  $n^\circ$  de alumnos/as para todos los cursos, la calculadora elija aleatoriamente el cumpleaños de los alumnos de cada curso y nos informe de si se cumple el suceso o no; al final nos informa además del porcentaje de cursos que cumplen el suceso.

Una buena forma de organizarse es empezar por elaborar un organigrama donde se refleje el proceso que quiero realizar con el programa.

**Programa CUMPLE**



## PROGRAMA: CUMPLE

```

ClrHome
Input "NUMERO DE CURSOS? ",T
Input "ALUMNOS/AS?",N
Float
Ø→S
For(J,1,T)
PrgmCOINCIDE
End
Disp "PROBABILIDAD DE"
Disp "QUE COINCIDAN",S/T

```

## PROGRAMA: COINCIDE

```

randM(1,1)→[A]
Ø[A]→[A]
1→I
{73,5}→dim([A]
Lbl A
int(73rand+1→X
int(5rand+1→Y
If [A](X,Y)=Ø
Then
1→[A](X,Y)
IS>(I,N)
Goto A
Disp "NO COINCIDEN"
Else
S+12 s
Disp "COINCIDEN"
End
Return

```

Observa que hay un programa principal llamado CUMPLE y un subprograma llamado COINCIDE que corre cada vez que el programa CUMPLE selecciona el número de cursos y el número de alumnos.

Escribir estos programas en cada una de las calculadoras de los alumnos puede ser muy pesado por lo que recomendamos hacerlo en una y transmitirlo mediante LINK a las demás o mejor aun escribir el programa en un ordenador utilizando el software TI-GGRAPH LINK (83) para Windows, desde él trasmitírselo a una calculadora y de esta a las demás.

### i) Simulación del programa CUMPLE

Para que un programa corra en la calculadora, debes pulsar la tecla PRGM y seleccionar el número de orden del programa que quieres que corra, en este caso CUMPLE, apareciendo la segunda pantalla. Al pulsar ENTER aparece la tercera pantalla en la que tienes que elegir el número de cursos y también el número de alumnos por curso.

```

EXEC EDIT NEW
1: COINCIDE
2: CUMPLE
3: CUMPLE2
4: DIAMES
5: ECUA
6: ESQB
7: MASDE39
  
```

```

PRGM CUMPLE
  
```

```

NUMERO DE CURSOS
20
ALUMNOS/AS?30
  
```

Después de esperar más o menos tiempo, según el número de cursos y alumnos que hayas elegido, van apareciendo mensajes. Para la elección anterior aparecen los mensajes “COINCIDEN” o “NO COINCIDEN” un total de 20 veces. Al final nos muestra la probabilidad empírica:

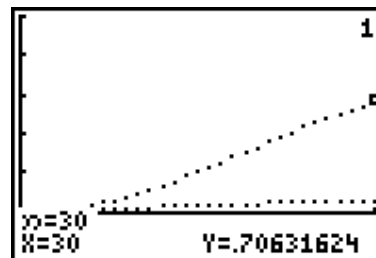
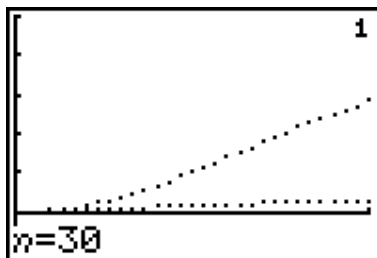
```

COINCIDEN
NO COINCIDEN
COINCIDEN
PROBABILIDAD DE
QUE COINCIDAN
          .7
Done
  
```

### ii) Comparación de las probabilidades empírica y teórica

En la última pantalla tenemos que, aparecieron cumpleaños coincidentes, en el 70 % de los 20 cursos de 30 personas elegidos. Ésta es una probabilidad empírica.

Para compararla con la probabilidad teórica basta con activar el programa MASDE39 y eligiendo la gráfica correspondiente, la de  $u(n)$ , activando TRACE, escribiendo 30 y pulsando ENTER, aparece la probabilidad teórica: 0,70632.



**b) Para el suceso:**

**“Por lo menos un alumno/a cumple años el mismo día y el mismo mes que el elegido”**

Con el siguiente programa pretendemos que, indicando el número de cursos en que queremos hacer el experimento, e indicando igual número de alumnos/as para todos los cursos y el día y el mes que queremos fijar. La calculadora elija aleatoriamente el cumpleaños de los alumnos de cada curso para compararlo con el cumpleaños fijado. Igual que en el programa anterior, el programa principal es CUMPLE2 y el programa DIAMES funciona como una subrutina.

**PROGRAMA: CUMPLE2**

```

ClrHome
Input "CURSOS? ",T
Input "ALUMNOS/AS?",N
Input "DIA?",D
Input "MES?",M
Float
Ø→S
For(J,1,T)
  prgmDIAMES
End
Disp "PROBABILIDAD DE"
Disp "QUE COINCIDAN",S/T

```

**PROGRAMA: DIAMES**

```

1→I
Lbl A
int(12rand+1→L
If L≠M
Then
Goto C
Else
If M=2
Then
int(28rand+1→R
Goto B
Else
If M=4 or M=6 or M=9 or M=11
Then
int(30rand+1→R
Goto B
Else
int(31rand+1→R
Lbl B
If R≠D
Then
Lbl C
IS>(I,N)
Goto A
Disp "NO COINCIDEN"
Else
S+1→S
Disp "COINCIDEN"
End
Return

```

### i) Simulación del programa CUMPLE2

Para que el programa corra en la calculadora, al igual que antes, debes pulsar la tecla PRGM y seleccionar el número de orden del programa que quieres que corra, en este caso CUMPLE2, apareciendo la segunda pantalla. Al pulsar ENTER aparece la tercera pantalla en la que tienes que elegir ahora cuatro valores:

<pre> 3:EDIT NEW 1:COINCIDE 2:CUMPLE 3:CUMPLE2 4:DIAMES 5:ECUA 6:ESOB 7↓MASDE39 </pre>	<pre> Pr9mCUMPLE2 </pre>	<pre> CURSOS? 20 ALUMNOS/AS?50 DIA?17 MES?4 </pre>
--	--------------------------	--

Después de esperar más o menos tiempo, según el número de cursos y alumnos que hayas elegido, van apareciendo mensajes. Es recomendable elegir un número de alumnos grande dado que la probabilidad es pequeña.

Al final obtienes la probabilidad empírica:

```

NO COINCIDEN
NO COINCIDEN
NO COINCIDEN
PROBABILIDAD DE
QUE COINCIDAN
.2
Done

```

### ii) Comparación de las probabilidades empírica y teórica

En la última pantalla tenemos que, aparecieron cumpleaños coincidentes, en el 20 % de los 20 cursos de 50 personas elegidos. Ésta es una probabilidad empírica.

Para compararla con la probabilidad teórica activamos el programa MASDE39 y elegimos la gráfica correspondiente, la de  $v(n)$ , activando TRACE, escribiendo 50 y pulsando ENTER, aparece la probabilidad teórica: 0,12578664

