El modelo input-output de leontief. La ti-92 como instrumento de apoyo en su presentación.

Francisco J. Santonja Gómez
C.U. Estema-Universidad Antonio de Nebrija

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se pretende dar a conocer el uso que se hace de la TI-92 en cuanto a la presentación del modelo de Leontief a nuestros estudiantes de la licenciatura en Administración y Dirección de Empresas dentro de la asignatura de Matemáticas Empresariales.

Se está trabajando en una presentación de las Matemáticas dentro del contexto de los modelos económicomatemáticos (modelo de Leontief, modelos de equilibrio de mercado, modelo de crecimiento de Domar...). El papel de la calculadora es fundamental, el ahorro de los tediosos cálculos en las modelizaciones es reconvertido en un mayor número de situaciones prácticas propuestas a nuestros estudiantes, así como en una mayor *utilización* de las Matemáticas dentro del mundo de la Economía.

El modelo de Leontief

¿Qué nivel de producción debe alcanzar cada una de las *n* industrias de una economía para satisfacer la demanda total de ese producto?
La producción de la industria del cemento, por ejemplo, se necesita como insumo en muchas de otras industrias, e incluso en esa misma industria, por tanto la producción óptima (ni sobra ni falta) depende del insumo requerido por parte de las *n* industrias.

Veamos la modelización de esta situación.

Debido al gran número de industrias que incorpora una economía podemos *simplificar* el problema fijando alguna hipótesis:

1. Cada industria produce un sólo producto.
2. Cada industria usa una combinación de factores fija para la producción de su producto.
3. Se cumple que en la producción de cada industria, un cambio de *k* unidades en cada insumo dará lugar a un cambio en el producto final en la misma proporción.

Notar que si una industria produce dos bienes distintos o utiliza dos combinaciones de factores distinta , se podrá considerar como dos industrias diferentes en la economía.

Consideramos a_{ij} como la cantidad del i-ésimo factor necesaria para producir una unidad del producto j-ésimo, así con $a_{23} = 0.35$ entenderemos que se necesita 0.35 unidades monetarias del bien 3 para producir un valor de 1 unidad monetaria del bien 2. Así definimos los coeficientes a_{ij} como los **coeficientes de insumo**.
Para una economía de *n* industrias, podemos disponer de los coeficientes de insumo en forma de matriz $A=(a_{ij})$, donde las columnas podrá considerarse como el *input* necesario para la producción de una unidad de producto respecto de una industria en particular. Considerando la matriz de coeficientes de insumo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

así, respecto de la columna 3, tenemos que para la producción de unidad monetaria del bien 3 son necesarios a_{13} unidades del bien 1, a_{23} unidades del bien 2, a_{33} unidades del bien 3.... Es claro que si ninguna de las industrias consideradas utiliza su propia producción, los elementos de la diagonal en la matriz serán ceros.

Si además de las *n* industrias, el modelo también dispone de un *sector abierto*, unidades familiares sin insumo como demanda final para el producto de cada industria y que ofrece un *input* primario como es la mano de obra, se dispondrá que la suma de los elementos de cada columna será menor que 1, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ j = 1,2,... Es el llamado **modelo abierto**.

Si la industria 1 se destina a cubrir las necesidades de insumo de las *n* industrias, así como de la demanda del sector abierto, su nivel de producción x_1 (en unidades monetarias) debe satisfacer
$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + d_1$

relación equivalente a
$(1-a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = d_1$

donde d_1 *es* la demanda final y $a_{1j}x_j$ es la demanda de insumo desde la industria *j*.

Formulando por igual para las *n* industrias de la economía podemos generalizar el modelo de la forma $(I_{nxn}-A)\ x = d$. Así pues, el modelo de Leontief no es más que una aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales.

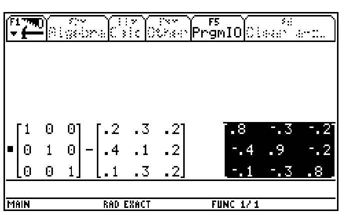
Un ejemplo práctico

Consideramos una economía con tres industrias y tres bienes producidos con matriz de coeficientes de insumo

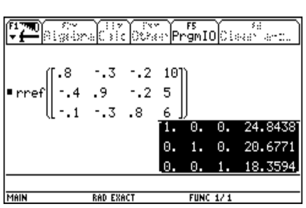
$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Veamos la producción óptima conjunta de los tres bienes, así como el estudio de la cantidad requerida de insumo diario por parte de la economía.

Consideramos la matriz del sistema de ecuaciones correspondiente a esta economía



resolviendo el sistema para una demanda final representada por el vector (10,5,6), en millones de pesetas, tendríamos unos niveles de producción óptimos reflejados por la propia solución del sistema:



La producción óptima de los bienes sería de 24.8438, 20.6771 y 18.3594 millones de pesetas respectivamente.
En cuanto a la cantidad de insumo diario requerido por la economía para la producción óptima puede obtenerse como 0.3(24.8438)+0.3(20.6771)+0.4(18.3594) = 21 millones de pesetas, donde a_{01} = 0.3, a_{02} = 0.3, a_{04} = 0.4 es la cantidad del *input* primario necesario para producir una unidad monetaria del bien 1,2 ó 3, respectivamente.
Así la demanda final de (10,5,6) podrá satisfacerse si se dispone de una cantidad de insumo diario de al menos 21 millones de pesetas.

Con todo esto podemos observar que la matemática que lleva detrás el modelo de Leontief no es más que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya trabajada su resolución con la TI-92 (Santonja, 1997), en concreto en cuanto a la aceptación de la función **rref( )**, que trabaja con sistemas de ecuaciones equivalentes, en lugar de la función **simult( )**, propuestas por el propio manual.

Conclusión

Queda reflejada la importancia de la utilización de la TI-92 en la presentación del modelo de Leontief. Mientras se resuelven los sistemas de ecuaciones con la calculadora, podemos hablar del modelo matemático en su entorno económico, de los aspectos propios de la resolución del sistema de ecuaciones -existencia de matriz inversa en el sistema, dependencia de filas/columnas, sistemas equivalentes, ..- sin convertir la sesión en una mera algorítmica de cálculos repetitivos, tan tediosos y engorrosos para todos y que tanto entorpece la aceptación de las asignaturas de matemáticas por parte de nuestros estudiantes.

Bibliografía

Chiang, Alpha C.: *Métodos fundamentales de Economía Matemática (3ª edición)*. Madrid, McGraw-Hill, 1987.
Santonja, Fco. J.: "Un acercamiento a los sistemas de ecuaciones lineales con la TI-92". En: *DELTA*, 1997, nº1, pp. 25-30.
TEXAS INSTRUMENTS. *Guidebook TI-92*. Holland, 1995.