## *Extendiendo la Factorización de Polinomios*

*Antonio R. Quesada, Department of Mathematics*
*The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4002*
*aquesada@uakron.edu*

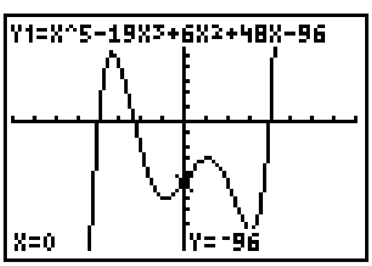
La integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas esta promoviendo cambios en el contenido y la didáctica del currículo tradicional. Algunas de las premisas que guiaron la selección de temas y de los procesos mecánico que se enseñan, han perdido la validez que una vez tuvieron. Así, por ejemplo, la habilidad de poder llevar a cabo complicadas operaciones matriciales con solo pulsar una tecla de una calculadora gráfica, facilita la inclusión en secundaria de modelos importantes de gran relevancia en la industria y el comercio, tales como las cadenas de Markov, las aplicaciones de redes etc. Del mismo modo, es ahora posible el complementar el enfoque algebraico tradicional de numerosos conceptos con los enfoques numéricos y gráficos presentando una visión mas completa de los mismos, lo que facilita su comprensión y promueve otras formas de resolución de problemas.

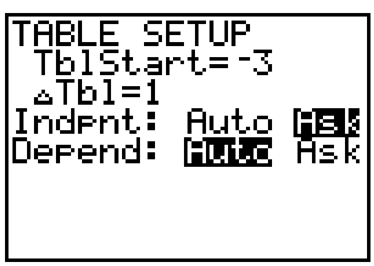
A continuación consideramos un ejemplo que ilustra como extender la factorización de polinomios con coeficientes enteros para obtener raices irracionales y, en algunos casos, imaginarias. Los conceptos que se usan forman parte del bagaje de un estudiante de precálculo. Las gráficas, que se han incluido profusamente para facilitar la lectura de los lectores sin experiencia, se han obtenido por medio de una calculadora TI-83.

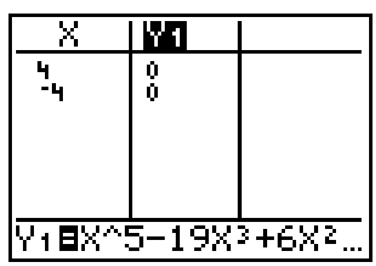
Ejemplo. Factorice el polinomio $p(x) = x^5 - 19x^3 + 6x^2 + 48x - 96$ .
Solución. Como es lo usual, comenzamos por obtener el conjunto de los posibles ceros racionales

$$S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \pm 48, \pm 96\}.$$

Ahora bien, en lugar de proceder a probar cada uno de los elementos de $S$ se puede simplemente observando una gráfica completa[1] de $p(x)$ (como la de la figura 1.a obtenida usando la ventana [-8, 8]x[-200, 150]) desechar muchos de los elementos reduciendo el conjunto inicial de candidatos al subconjunto $S' = \{\pm 4\}$.



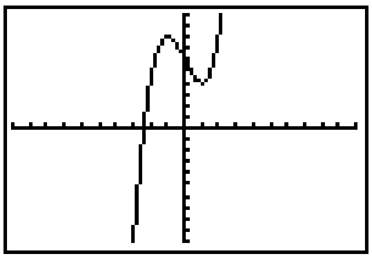



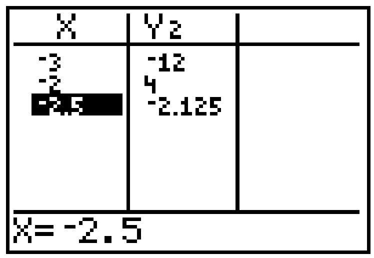

[1] Decimos que una representación gráfica de una función f(x) es **completa** si contiene todos los puntos de interés (ceros, extremos locales…) de la misma.

muestran como definir y usar la tabla para evaluar $p(x)$ en los valores de $S'$ obteniéndose $p(4) = 0 = p(-4)$. Asi pues la factorización de $p(x)$ en el cuerpo $Q$ de los números racionales viene dada por:

$$p(x) = (x-4)(x+4)q(x), \quad \text{donde} \quad q(x) = x^3 - 3x + 6\,.$$

Hasta aqui se han obtenido los ceros racionales, con la única ventaja de haber reducido considerablemente el conjunto inicial de posibles ceros. El grado del polinomio cociente $q(x)$ garantiza la existencia de al menos una raiz irracional, mientras que su gráfica,





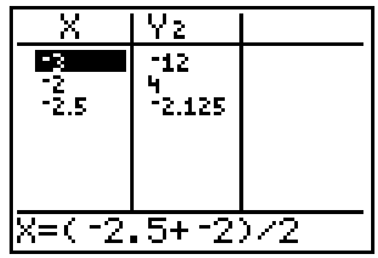
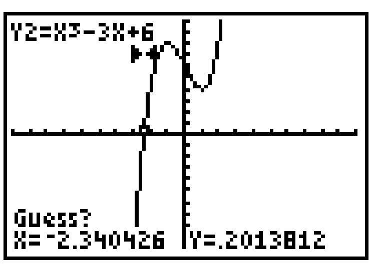



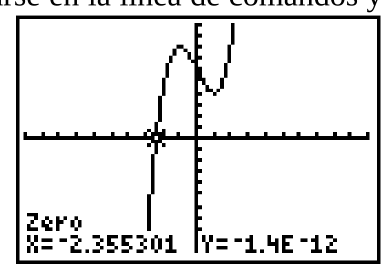

**Figure 2.a**

**Figure 2.b** **Figure 2.c**

como vemos en la figura 2.a, nos indica que las otras dos raices son imaginarias.

El cálculo de las raices irracionales provee una oportunidad excelente para poner en práctica el método de bisección usando la tabla. Como se indica en la figura 2.b y 2.c el valor promedio puede calcularse en la línea de comandos y reemplaza el extremo del



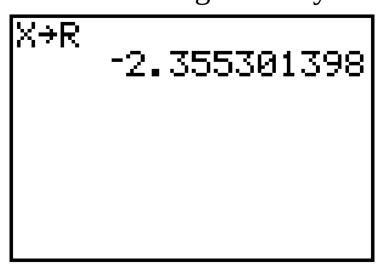




**Figure 3.a** **Figure 3.b** **Figure 3.c**

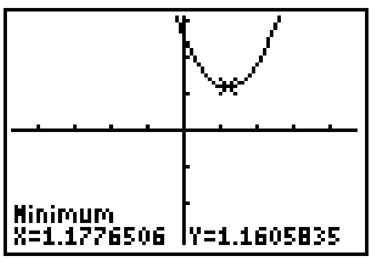
intervalo que se desea rechazar, es decir aquel donde la función tiene igual signo que en el último promedio calculado. Asi puede observarse que en este caso el nuevo valor de $x = -2.25$ reemplazará a -3. Continuando este proceso se obtiene la solución $R = -2.3553013976081$. Alternativamente, si el tiempo acucia, se puede hacer que la calculadora determine la raiz por medio de $2^{nd}$ CALC 2:zero y almacenar el resultado en *R* como ilustran las figuras 3.a, 3.b y 3.c.

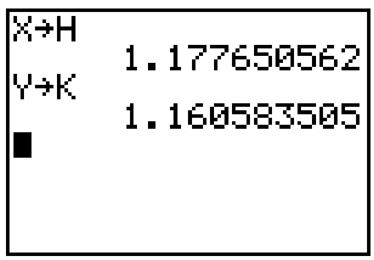
El método de bisección y otros métodos numéricos, que tradicionalmente se excluyen del currículo o se analizan sólo desde un punto de vista teórico, son ahora asequibles, con un mínimo de inversión de tiempo y sin necesidad de programar, mediante el uso de la calculadora gráfica. Quizás un incremento en el uso de estos algoritmos podría tener un efecto positivo en el sentido numérico que los estudiantes desarrollan.

¿Cómo pueden calcularse el factor cuadrático y las raices imaginarias de $q(x)$?

Sea $y_3 = y_2/(x-R)$ donde $y_2 = x^3 - 3x + 6$. A continuación se considerarán dos métodos que envuelven algunas formas alternas de resolver problemas usando la tecnología.

Método I. Como indican la figuras 4.a y 4.b se procede a obtener el vértice de la gráfica de $y_3$ que se almacena en *(H, K)* y, ya que el polinomio es mónico, se define el factor cuadrático como $y_4 = (x-H)^2 + K$.



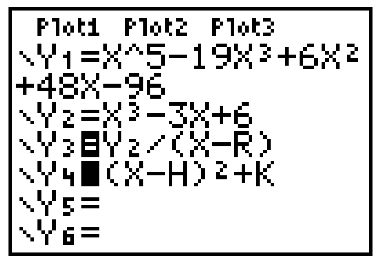
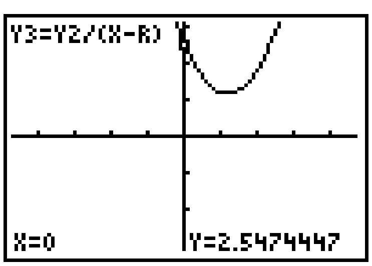



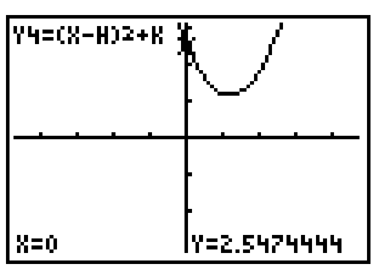

**Figure 4.a**

**Figure 4.b** **Figure 4.c**

En este punto, cabe preguntar ¿cómo comparan los factores cuadráticos almacenados en $y_3$ y $y_4$?

Usando TRACE y moviendo el cursor (⬍) de la gráfica de $y_3$ a la de $y_4$ (figuras 5.a y 5.b) se ve que la diferencia es de un orden máximo de $10^{-6}$.



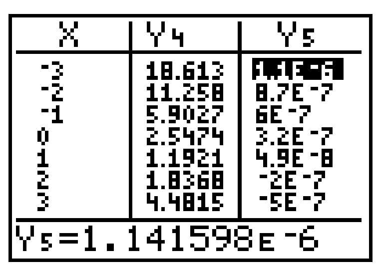
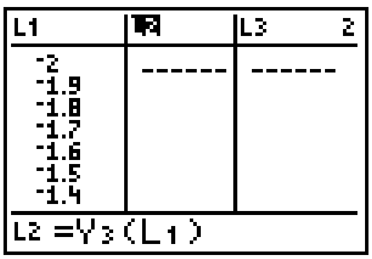



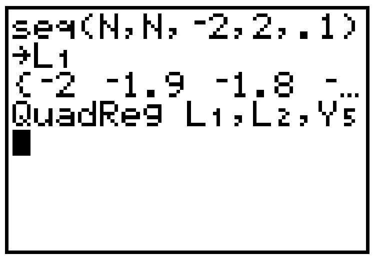

**Figure 5.a**

**Figure 5.b** **Figure 5.c**

Análogamente se puede definir $y_5 = y_3 - y_4$ y observar los valores que toma esta función en la tabla (figura 5.c).

Método 2. Este segundo método permite obtener la representación simbólica del factor cuadrático. Para ello se comienza por generar una sucesión de puntos de la gráfica, primero las abcisas via $L_1 = seq(N, N, -2, 2, 0.1)$ (figura 6.b), y usando estas se generan las ordenadas correspondientes $L_2 = y_3(L_1)$, ya sea en el editor de listas como se ve en la figura 6.a o en la pantalla base. El ajuste por medio de una regresión cuadrática de la lista de puntos obtenidos produce una función con un coeficiente $R^2 = 1$ (vea figura 6.c).



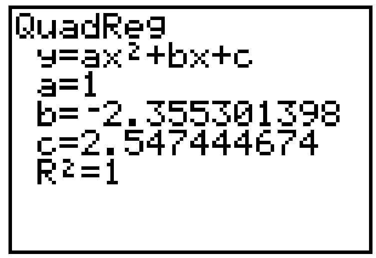
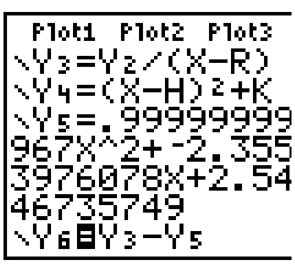



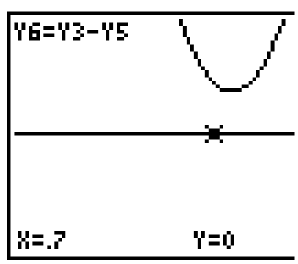

**Figure 6.a**

**Figure 6.b**

**Figure 6.c**

Tanto las gráficas de $y_3$, $y_5$ y $y_6 = y_3 - y_5 = 0$ en la figura 7.b como la tabla de la figura 7.c confirman la extraordinaria precisión de la expresión algebraica obtenida para el factor cuadrático.



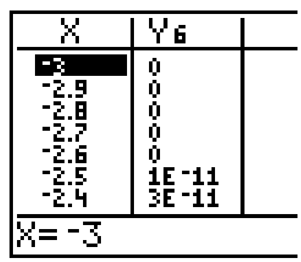




**Figure 7.a**

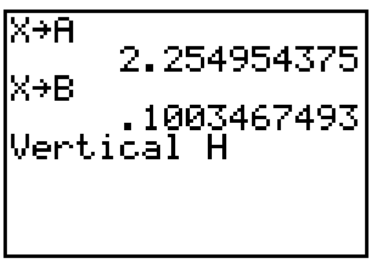
**Figure 7.b**

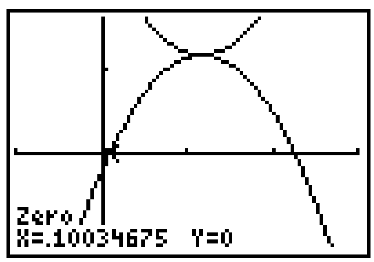
**Figure 7.c**

¿Es posible visualizar las raices imaginarias?

La respuesta es afirmativa. La solución que sigue apareció en un número reciente del *College Mathematics Journal* atribuida al estudiante de secundaria Shaun Pieper. Shaun observó que si las raices de $y - k = a(x - h)^2$ son imaginarias, al reflejar esta ecuación sobre la recta $y = k$ se obtiene la gráfica de $y - k = -a(x-h)^2$, cuyas intersecciones con el eje de $x$ son $(h \pm \sqrt{k/h}, 0)$. Aplicando un giro de $90^0$ al segmento que estos puntos determinan se obtiene el segmento vertical cuyos extremos son $(h, \pm\sqrt{k/a})$, es decir puntos cuyas coordenadas son la parte real e imaginaria de las soluciones de la ecuación de segundo grado inicial.

Las cuatro funciones necesarias para emular este proceso aparecen seleccionadas en la figura 8.a. Las primeras dos $y_7$ and $y_8$ usan las coordenadas del vertice *(H, K)* obtenidas previamente. La figuras 8.b y 8.c muestran como se han calculado las intersecciones de $y_8$ con el eje de abcisas, mientras que en la figura 8.c vemos que estas intersecciones se almacenan en las variables $A$ y $B$ (figura 8.d) que se usan para definir las rectas horizontales $y_9$ y $y_0$ cuya intersección con la recta $x = H$ produce los puntos buscados (figura 8.e).



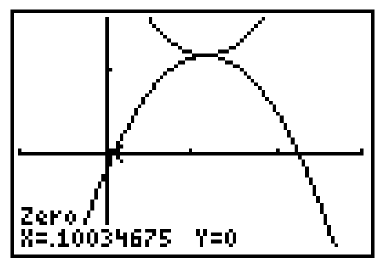
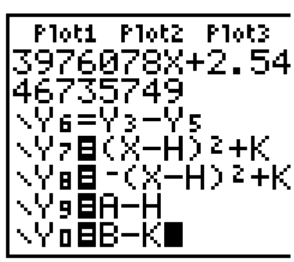




**Figure 8.a**

**Figure 8.b**

**Figure8.c**



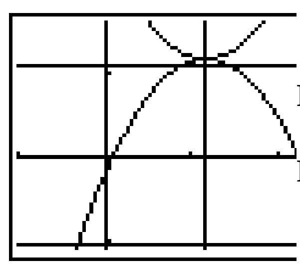



**Figure 8.d**

**Figure 8.e**