

Liebe Lehrerin! Lieber Lehrer!

Graphikrechner und Taschencomputer, vor einigen Jahren nur wenigen Eingeweihten bekannt, finden eine zunehmende Verbreitung. An sächsischen Gymnasien sind Graphikrechner bereits seit Jahren verpflichtend, seit Herbst 2001 ist dies nun auch an allen Gymnasien Baden-Württembergs der Fall. Bayerische Realschulen empfehlen den Gebrauch der Geräte. Ein deutliches Zeichen hat auch die Zulassung von Computeralgebrasystemen zur Abiturprüfung in Schleswig-Holstein oder Mecklenburg-Vorpommern gesetzt. Weitere Bundesländer werden in absehbarer Zeit folgen. In Österreich und der Schweiz werden Graphikrechner und Taschencomputer seit langem vom Lehrplan gefordert.

Fast ausnahmslos sind in jedem Bundesland Projektschulen zu finden, die sich mit dem Einsatz tragbarer Technologien im Unterricht beschäftigen. Von Notebook-Klassen liest man dank des verursachten Pressewirbels allenthalben, doch erscheint die flächendeckende Einführung derartiger Geräte aufgrund der bekannten Schwierigkeiten (mangelnde Robustheit, Kosten für Hardware, Software und Unterhalt, fehlende didaktische Gesamtkonzeption, etc.) in weite Ferne gerückt. In gleichem Umfang, jedoch fast geräuschlos, aber sehr effektiv und nachhaltig wird dagegen der Einsatz von Graphikrechnern und CAS-Taschencomputern evaluiert.

Die positiven Ergebnisse vergleichender Betrachtungen zwischen Handhelds und Notebooks werden gestützt durch die sprunghaft anwachsende Entwicklung neuartiger Unterrichtsmaterialien auf breiter Front. Alle namhaften Schulbuchverlage entwickeln geeignete Zusatzmaterialien; viele integrieren tragbare Technologien in ihre Lehrbuchreihen. So sind bereits über 60 Titel zu den TI-Rechnern erhältlich.

Die technische Entwicklung ist auch nicht stehen geblieben. Die Flash-Technologie der TI-Rechner erlaubt das Erweitern und Aktualisieren bestehender Produkte mittels Download aus dem Internet. So verfügen heute fast alle TI-Graphikrechner nicht nur über die Standardfunktionen, sondern beherrschen auch Geometrie, Tabellenkalkulation u. v. a. m.

Wir sind gespannt, welches Bundesland sich bei positiven Testergebnissen, verfügbaren Unterrichtsmaterialien, befriedigenden Technologien, einigen Hundert Lehrerfortbildungen jährlich und einer insgesamt gestiegenen Akzeptanz als letztes zu einer Einführung durchringen kann.

Auch wir fühlen uns in die Pflicht genommen. Wir sehen es als unsere vornehmste Aufgabe, Ihnen täglich die Unterstützung zu geben, die Sie von uns zu Recht erwarten. An unseren Taten, an unserem Service und unserem Support sollen Sie uns messen.

In Ihrem Dienste nehmen wir die Herausforderung an.

Ihr TI-Team



Inhaltsverzeichnis

Fachartikel

Reiner Heinrich, Norbert Esper:

Wozu Fußballer den TI-83 Plus und dynamische Geometriesoftware nutzen können 2

Diego Colosio: Die irrationalen Zahlen im mathematischen Labor 4

Josef Rolfs: Krümmung und Gesamtkrümmung, Teil 2 6

Markus Paul: Kreis – Geometrie mit TI-83 Plus 8

Karl-Heinz Keunecke: Krümmung als Grenzwert 10

Hermann Hammer: Die „Formel-Produzier-Maschine“ 12

Carl-Engler-Schule, Hemsbach: Vorsicht vor dynamischen Definitionen! 14

Peter Bützer: Mathematisches Ausgleichen von chemischen Reaktionsgleichungen 15

Hermann Hammer: Die Faszination der unendlichen Summen – frei nach Euler 18

Christian Frießnegg: Zeitmessung mit Hilfe eines Taschenrechners 19

Alfred Vogelsanger: Lichtbrechung 22

Heinz Laakmann: Lagebeziehungen im R^3 25

Karl-Heinz Keunecke: CBR – Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 1) 26

Gerald Kaiser: Rekonstruktion einer Funktion 29

Tipps und Tricks 31

Service auf einen Blick 32

„Nicht alles was zählt, kann gezählt werden, und nicht alles was gezählt werden kann, zählt.“
(Albert Einstein)

Wozu Fußballer den TI-83-plus und dynamische Geometriesoftware nutzen können

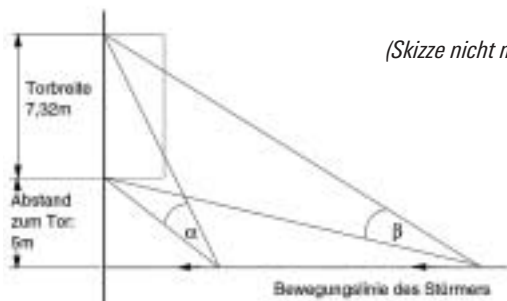
Am 6.10.2001 spielte die deutsche Fußballnationalmannschaft gegen Finnland. Das Spiel endete torlos: „0:0“. Die deutsche Boulevard-Presse ging hart mit den Kickern von Team-Chef Rudi Völler ins Gericht. Man wertete das Remis wie eine Niederlage. Die „Dresdner Morgen-



(Der junge Fußballer ist nicht mit dem kritisierten Stürmer identisch)

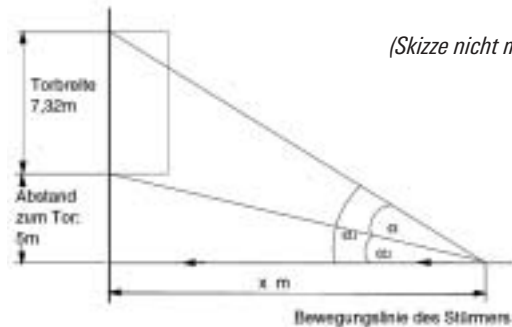
post“ kritisierte vor allem Stürmer Oliver B., der aus „8 Metern (!)“ Entfernung das Tor nicht traf. Am Morgen danach unterhielt ich mich mit Schülern kurz über das Spiel, wir überflogen die Schlagzeilen und mehr zum Spaß fragte ich, warum in der „Morgenpost“ hinter der Angabe „8 Meter“ das Ausrufezeichen steht. Ist es vielleicht weniger verwerflich, aus 6m das Tor zu verfehlen oder aus einer Entfernung von 10 m? Und zunächst auch als Scherz kam die Schülerantwort „Sie können das ja mal mathematisch untersuchen.“

Jetzt war unser Ehrgeiz entfacht und wir veranschaulichten den Sachverhalt in einer Skizze.



(Skizze nicht maßstäblich)

Der Stürmer war entlang einer gedachten Linie parallel zur Außenlinie in Richtung gegnerisches Tor gelaufen. Den Abstand dieser Linie zum Tor schätzten wir auf 5 m. Die Torbreite beträgt 7,32 m. Zu jeder Entfernung des Stürmers von der Torauslinie existiert genau ein Einschusswinkel. In der Skizze sind z.B. zwei Winkel α und β eingezeichnet. Gibt es unter all diesen Winkeln einen maximalen? Falls ja, in welcher Entfernung von der Torauslinie ist die günstigste Schussposition?



(Skizze nicht maßstäblich)

Die Schüler fanden schnell einen Ansatz für:

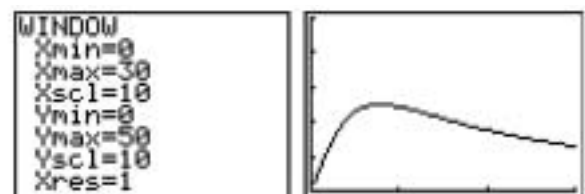
$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \arctan\left(\frac{12,32\text{m}}{x\text{ m}}\right) - \arctan\left(\frac{5\text{m}}{x\text{ m}}\right).$$

Hinweis: Da die Arcus-Tangens-Funktion im Unterricht nicht untersucht wurde, begnügte ich mich mit der vom Taschenrechner gewohnten Schreibweise:

$$\text{Schreibweise: } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{12,32\text{m}}{x\text{ m}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5\text{m}}{x\text{ m}}\right).$$

Nun stellten wir die Funktion Entfernung \rightarrow Winkel mithilfe des TI-83 plus dar.

Auf der x-Achse wurde die Entfernung des Stürmers von der Torauslinie abgetragen. Das Intervall $0\text{ m} < x < 30\text{ m}$ schien uns realistisch. Auf der y-Achse wurde die Größe des Winkels abgetragen. Hier wählten wir den Darstellungsbereich $0^\circ < y < 50^\circ$. Die Einstellung des Betrachtungsfensters „WINDOW“ zeigt die Abbildung.

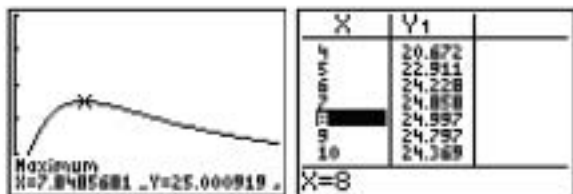


Natürlich musste die Winkeleinstellung im MODE-Menü auf Gradmaß „Degree“ gewählt werden. Als Funktionsgleichung gaben wir im Y = Editor ein:

$$Y1 = \tan^{-1}(12.32 / X) - \tan^{-1}(5 / X).$$

Wozu Fußballer den TI-83-plus und dynamische Geometriesoftware nutzen können

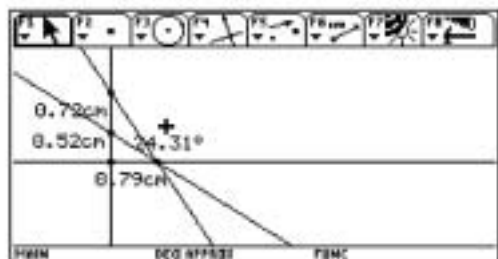
Die grafische Darstellung zeigt, dass die Funktion tatsächlich ein lokales Maximum besitzt, also ein größtmöglicher Einschusswinkel existiert. Diese Entfernung wurde mithilfe des Befehls „maximum“ aus dem CALC-Menü bestimmt.



Die optimale Einschussentfernung ist also ≈ 8 m, der größtmögliche Einschusswinkel beträgt etwa 25° . Die Untersuchung kann natürlich auch in einer Tabelle erfolgen, wie das rechte Bild zeigt. Jetzt waren wir einigermäßen überrascht, dass die „Dresdner Morgenpost“ so genau recherchiert hatte. Das Ausrufezeichen hinter der Angabe „8 m“ war „berechtigt“. (Auch wenn die 8 Meter natürlich die Entfernung zur Torauslinie und nicht zum Tor bedeuten.)

Nebenbei hatten wir in einer 10. Klasse eine Extremwertaufgabe gelöst, die in dieser Form nur unter Verwendung eines GTR oder anderer moderner Werkzeuge für den Mathematikunterricht gelöst werden kann.

Für einen Einstieg könnte der maximale Einschusswinkel auch mit Hilfe einer dynamischen Geometriezeichnung gewonnen werden. So kann ohne großen Aufwand die obige Skizze in „Cabri-Geometry“ z.B. auf dem TI-92 Plus in ein Zeichenblatt übertragen werden. Dabei wird 1m als 0,1 dargestellt.

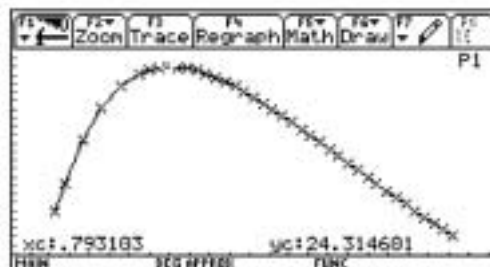


Die Zeichnung ist so zu konstruieren, dass der Punkt des Torschusses entlang der Außenlinie gezogen werden kann. Nimmt man nun mit Hilfe des „Collect Data“-Befehls die Entfernung x und den Winkel β als Variablen, erhält man im „Data/Matrix Editor“ in der Tabelle „sysdata“ die gemessenen Wertepaare:

DATA	N1	N2	N3	N4	N5
5	1.62059	23.629			
6	1.68966	24.875			
7	1.72414	24.205			
8	1.75952	24.284			
9	1.79310	24.315			
10	1.82759	24.305			
11	1.86207	24.238			

r9c2=24.314600905056

Diese können dann auch graphisch dargestellt werden.



Wie dem obigen Schaubild zu entnehmen ist, erhält man den maximalen Winkel bei einer Entfernung von ungefähr 7,93 m mit $24,3^\circ$.

Die Autoren:

Dr. Rainer Heinrich
 Schönburgstraße 39, D-01108 Dresden
 Raihein@aol.com

Dr. Norbert Esper
 Netter Kirchweg 15, D-41751 Viersen
 EsperNorbert@aol.com

TI-Connect™

Verbinden Sie Computer und Graphikrechner einfach und schnell!

TI-Connect ist die Verbindungssoftware der nächsten Generation. Leistungsfähig und einfach. Verbindet TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition, TI-89, TI-92 Plus, Voyage™200* und CBL 2™ mit Computer und Internet.

- Eine Software für alle Rechner.
- Alle Features der heutigen TI-Graph Link Software (ohne Programmierer).
- Erkennt automatisch, wenn eine neue Betriebssystemversion oder Softwareapplikation erhältlich ist.
- Alle Flash- und Nicht-Flash-Datentypen können mit Drag-and-Drop verschoben werden.
- Das TI-Graph Link USB-Kabel kann nun auch auf Windows-PCs genutzt werden.

Kostenloser Download von der Website:
epsstore.ti.com

* erhältlich voraussichtlich ab Juni 2002

Die irrationalen Zahlen im mathematischen Labor

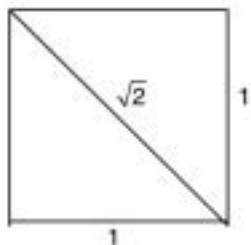
1. Einführung

Am Anfang des Gymnasialunterrichts (zehntes Schuljahr) sieht der Lehrplan der Mathematik eine Einführung in die Zahlmengen (N, Z, Q, R) vor. Die Schüler, welche ans Gymnasium gelangen, haben schon einige Kenntnisse auf diesem Gebiet, aber ihr Wissen ist notwendigerweise oberflächlich. Es handelt sich deshalb darum, in den durch das Alter der Schüler gegebenen Grenzen das Thema unter zweierlei Gesichtspunkten zu vertiefen: dem theoretisch-mathematischen und dem geschichtlichen.

Als besonders problematisch erweist sich die Diskussion der reellen Zahlen, weil wir keine theoretischen Konzepte wie Folge, Konvergenz oder Grenzwert benützen können:

Man kann jedoch versuchen, das Hindernis zu überwinden, indem man einen intuitiven Zugang vorzieht und mit genügend starken Rechenmitteln operiert.

Im folgenden Vorschlag des mathematischen Labors versucht man, die Natur der irrationalen Zahlen zu untersuchen, speziell von $\sqrt{2}$. Diese Zahl hat eine tausendjährige Geschichte: in diesem Zusammenhang kann daran erinnert werden, dass schon die Pythagoräer die Irrationalität in geometrischer Formulierung bewiesen haben, ausgedrückt als Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrats.



Es empfiehlt sich, den Schülern auch diesen Beweis vorzuschlagen, aber damit ist das Problem nicht gelöst, **wie** man $\sqrt{2}$ annähern kann. In der Geschichte der Mathematik trifft man auf zahlreiche Versuche, Irrationalzahlen mit Hilfe von Brüchen anzunähern: Man darf in der Tat nicht vergessen, dass bis vor relativ kurzer Zeit der Bruch das einzige bekannte Mittel zur Darstellung nichtganzer Zahlen war.

2. APPROXIMATION von $\sqrt{2}$ mittels Kettenbrüchen

Wie schon gesagt, hat man lange Zeit gemeint, alle algebraisch erhaltenen Zahlen seien **rational**. Insbesondere hätte also nach dieser Meinung der Wurzel Ausdruck $\sqrt{2}$ in Bruchform ausdrückbar sein sollen.

2.1 Theoretischer Teil

Formulieren wir die folgende

HYPOTHESE: $\sqrt{2}$ ist rational.

D. h. für ein $n \in \mathbb{Q}$ gilt: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{n}$ (1)

(ERSTE APPROXIMATION)

Auflösen nach n ergibt $n = \sqrt{2} + 1$ (2)

Durch Einsetzen erhält man weiter:

(1) → (2): $n = 2 + \frac{1}{n}$ (3)

(3) → (1): $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$ (4)

(ZWEITE APPROXIMATION)

(3) → (4): $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}}$ (5)

(DRITTE APPROXIMATION)

und so weiter ...

Die Substitution $n \leftarrow 2 + \frac{1}{n}$ erzeugt einen unendlichen **rekursiven Prozess!**

⇒ Man erhält einen **Kettenbruch**.

Aus Gründen der Bequemlichkeit gebraucht man auch die folgende Darstellung:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

2.2 Experimenteller Teil: Vorgehen mit dem TI-92 Plus

- ◆ Definition des Substitutionsterms $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ (mit Klammern!) und Kopieren (Copy = $\square \square C$) der Eingabezeile in den Arbeitsspeicher
- ◆ Erste Approximation setzen: $a_0 = 1 + \frac{1}{n}$
- ◆ Den Index von a0 durch 1 ersetzen, dann n markieren und Einfügen (Paste = $\square \square V$) des Substitutionsterms für n:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{n \leftarrow \left(2 + \frac{1}{n}\right)}$$

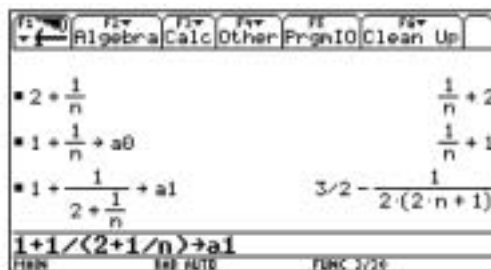


Abb. 1

Die irrationalen Zahlen im mathematischen Labor

Man wiederholt den Vorgang einige Male, der Rechner vereinfacht den Mehrfachbruch automatisch:

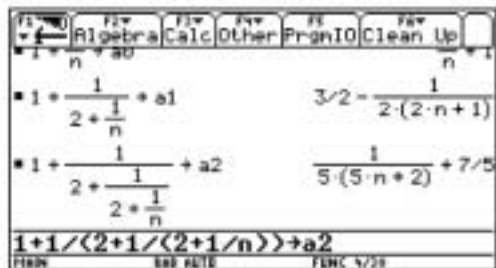


Abb. 2

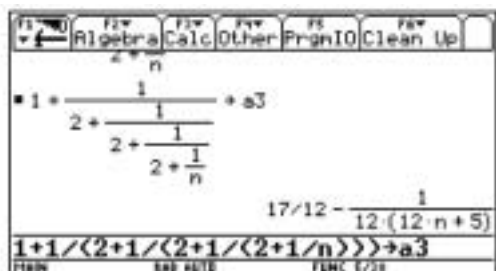


Abb. 3

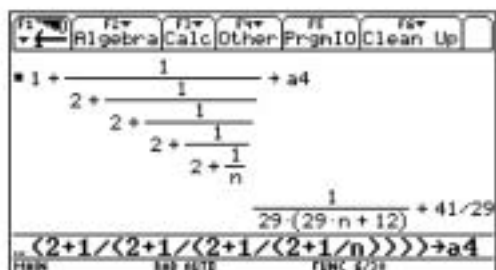


Abb. 4

An dieser Stelle substituiert man in die Terme a_i der Folge einen Wert für n , etwa $n=2$:

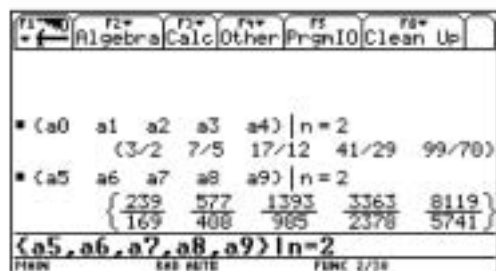


Abb. 5

Man erhält eine Folge von Brüchen, welche $\sqrt{2}$ immer besser approximieren:

$$\frac{3}{2} \ \frac{7}{5} \ \frac{17}{12} \ \frac{41}{29} \ \frac{99}{70} \ \frac{239}{169} \dots$$

Der Term $a_{14} = \frac{665857}{470832} \approx 1.41421356237$

drückt den Dezimalwert von $\sqrt{2}$ in der maximalen Anzeigegenauigkeit des TI-92 Plus aus (FLOAT 12), aber dank der fast unendlichen Präzision des Rechners bei Benützung der symbolischen Form kann man fortfahren und immer präzisere Werte erhalten:

$$a_{15} = \frac{1607521}{1136689}$$

$$a_{16} = \frac{3880899}{2744210}$$

$$a_{17} = \frac{9369319}{6625109} \dots$$

Offensichtlich stellt sich die Frage der Konvergenz, aber die Schüler werden sich in dieser Phase mit einer intuitiven Verifikation begnügen. Häufig wird aber gefragt, warum der Wert $n=2$ gewählt wurde. Um die Schüler davon zu überzeugen, dass die Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ bei jedem Anfangswert garantiert ist, genügt eine erneute Berechnung der Terme mit anderen Werten für n . Zum Beispiel bekommt man mit $n=100$:

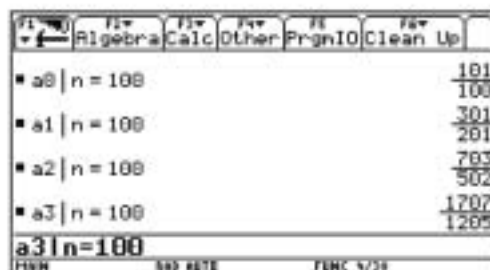


Abb. 6



Abb. 7

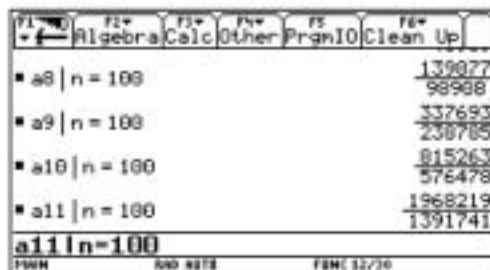


Abb. 8

Mit $n=100$ ist die Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ langsamer, aber jedenfalls garantiert. Einige besonders aufmerksame Schüler stellen überrascht fest, dass unendliche viele Bruchfolgen existieren, welche gegen $\sqrt{2}$ streben!

Anschrift des Verfassers:

Diego Colosio
Liceo 1, CH-6900 Lugano, Svizzera
colosio@bluewin.ch

Krümmung und Gesamtkrümmung, Teil 2

Die aktuelle Fragestellung der Trassenführung einer Transrapidstrecke lädt zum Modellieren ein und mit TI 92 - Hilfe wurden im Leistungskurs Mathematik verschiedene Lösungen gesucht, verglichen und kritisch bewertet. Hierbei spielten die „Krümmung“ und die „Gesamtkrümmung“ von Kurven eine bedeutende Rolle.

Als ich einen Aufsatz zur Transrapidtrasse „Berlin-Hamburg“ in den TI-Nachrichten 2/99 veröffentlicht hatte, war ich nicht schlecht erstaunt über die vielen Nachfragen zu gerade diesen beiden Begriffen, insbesondere zu dem der Gesamtkrümmung.

Gesamtkrümmung

Mathematisch-fachliche Anmerkungen

♦ Die Gesamtkrümmung ist ein Begriff aus der Differentialgeometrie, und hier genauer ein Begriff der Flächenmetrik. So findet man bei Kreyszig [Differentialgeometrie, Dr. E. Kreyszig, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957] auf den Seiten 205ff. den Begriff der Gesamtkrümmung oder der **Curvatura integra** eines Flächenstücks erklärt.

♦ Bei Strubecker [Differentialgeometrie III, Theorie der Flächenkrümmung, Sammlung Göschen, Berlin 1969] wird dann auf S. 113 als bemerkenswerte Anwendung der von Werner Fenchel(1929) stammende Satz genannt:

Die Gesamtkrümmung $G = \oint \kappa(s) ds$ jeder dreimal stetig differenzierbaren geschlossenen Raumkurve $\vec{x} = \vec{x}(s)$ genügt, wenn s die Bogenlänge der Raumkurve $\vec{x}(s)$ bezeichnet und $\kappa = \kappa(s) = |\vec{x}''(s)|$ ihre Krümmung ist, der Ungleichung $\oint \kappa(s) ds \geq 2\pi$.

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur für geschlossene ebene konvexe Kurven (Eilinen).

♦ Wird bei der Krümmungsdefinition etwa durch

$$\kappa(s) = \begin{cases} |\vec{x}''(s)|, & \text{falls } k \text{ linksgekrümmt} \\ -|\vec{x}''(s)|, & \text{falls } k \text{ rechtsgekrümmt} \end{cases} \text{ zwischen}$$

Links- und Rechtskrümmung differenziert, gilt sogar für geschlossene Kurven, die von 0 nach 1 durchlaufen werden und nach der Bogenlänge s parametrisiert sind:

$$G1 = \int_0^1 \kappa(s) ds = z \cdot 2\pi$$

Hierbei heißt die so definierte ganze Zahl z die **Umlaufzahl** oder **Rotationsindex** der Kurve k .

[V. Wunsch, Differentialgeometrie, Kurven und Flächen, B.G.Teubner, Leipzig 1997, S.91].

♦ Für Kurven, die nach einer beliebigen Variablen t parametrisiert sind und die nicht notwendig geschlossen sein müssen,

gilt für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$|\vec{x}''(s)| = \frac{|\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \text{ mit } ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Somit ergeben sich bei beliebigen Parametern t folgende Ansätze für die Gesamtkrümmungen G und $G1$:

$$G = \int_a^b \frac{|\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}|}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$G1 = \int_a^b \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

♦ Wird nun, wie im x - y -Koordinatensystem oftmals üblich, die Funktion f mit $y = f(x)$ und x als abhängige Variable (Parameter) verwendet, so ergeben sich wegen $x(t) = t$ und $y(t) = f(t)$, folgende Integrale für die Gesamtkrümmungen G und $G1$:

$$G = \int_a^b \frac{|f''(x)|}{1 + f'(x)^2} dx$$

$$G1 = \int_a^b \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} dx$$

In meinem Leistungskurs wurden beide Definitionen vergleichend verwendet, und zwar als ein Weg zur Beantwortung der Frage von Birgit: „Sieht es nur so aus oder ist es wirklich so, dass die Kurve Wendepunkte aufweist? Ist der Spline über einem Teilstück linksgekrümmt?“ [TI-Nachrichten 2/99, S.31]

Methodisch-didaktische Anmerkungen

♦ Man kommt meines Erachtens nicht umhin, die Gesamtkrümmung einer Kurve zu einer Funktion f über das Linienintegral $\int_a^b \kappa(s) ds$

zur Berechnung von $G1$ als „Black Box“ vorzugeben. Man kann plausibel machen, dass man längs des Weges über die Krümmung $\kappa(s)$ integriert.

Analog wird man $\int_a^b |\kappa(s)| ds$ zur Berechnung von G vorgeben.

Anschauliche Deutung:

Wird ein Kreis im Uhrzeigersinn (Rechtskurve) durchlaufen,

dann ist $G1 = -\frac{1}{r} \cdot 2\pi r = -2\pi$ und $G = \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi$.

Wird ein Kreis gegen den Uhrzeigersinn (Linkscurve) durchlaufen, dann ist $G1 = G = 2\pi$.

Krümmung und Gesamtkrümmung, Teil 2

♦ Wird nun der Bogenparameter s durch die übliche Variable x substituiert, so ergibt sich

wegen $ds = \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx$ für $G1$ bzw. G :

$$G1 = \int_0^1 k(s) ds = \int_{x_0}^{x_1} k(x) \cdot \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(x)}{1+f'(x)^2} dx$$

$$G = \int_0^1 |k(s)| ds = \int_{x_0}^{x_1} |k(x)| \cdot \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{|f''(x)|}{1+f'(x)^2} dx$$

Anwendungen der Gesamtkrümmung

Sind im Unterricht schließlich G und $G1$ wie oben gesagt über $k(s)$ als Black Box definiert worden, um dann durch Substitution die angegebenen Formeln herzuleiten, kann gedeutet werden.

Die Frage von Birgit etwa kann beantwortet werden, indem man die Kurve auf Wendepunkte untersucht oder $k(x)$ auf sein Vorzeichen hin untersucht, man könnte aber auch G mit $G1$ vergleichen:

- Ist $G = |G1|$, dann hat die Kurve keinen Wendepunkt.
- Ist $G \neq |G1|$, dann hat die Kurve mindestens einen Wendepunkt.

Bsp.: Für die Normalparabel mit $f(x) = x^2$ ergibt sich

$$G1 = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+4x^2} dx = \pi$$

$$G = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+4x^2} dx = \pi$$

Für die kubische Parabel mit $f(x) = x^3$ folgt

$$G1 = \int_{-1}^1 \frac{6x}{1+9x^4} dx = 0$$

$$G = \int_{-1}^1 \frac{|6x|}{1+9x^4} dx = \pi$$

Bei anderen Funktionen kann nur näherungsweise die Gesamtkrümmung berechnet werden, etwa für eine Funktion p mit dem Funktionsterm

$$p(x) = \frac{31}{15360} x^4 + \frac{173}{2560} x^3 - \frac{1483}{1920} x^2 + \frac{211}{80} x + 11$$

mit $0 \leq x \leq 16$

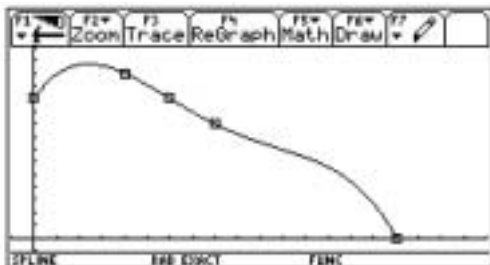


Abb. 5

Graph der oben definierten Funktion p

Die Berechnungen mit dem TI-92 Plus liefern für die Gesamtkrümmung G ca. 3,09201. Sie ist also vergleichbar mit der eines Halbkreises oder der einer Normalparabel. Da hier Krümmungswechsel auftreten und die Kurve überwiegend rechtsgekrümmt ist, kann $G1$ nicht mit G übereinstimmen. Es ergibt sich $G1 \approx -2,48033$.

Zur Beantwortung von Birgits Frage war damals die Splinefunktion gegeben durch:

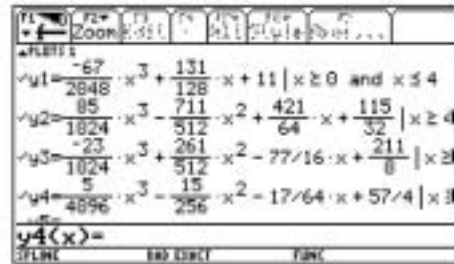


Abb. 6

Terme der Splinefunktion (siehe dazu TI-Nachrichten 2/99)

Diese abschnittsweise definierte Funktion kann über den Teilintervallen $[0;4]$, $[4;6]$, $[6;8]$ und $[8;16]$ hinsichtlich ihrer Gesamtkrümmungen G und auch $G1$ untersucht werden. Die vier Resultate werden dann addiert. Die näherungsweisen Berechnungen sind mit dem TI-92 Plus wiederum problemlos möglich.

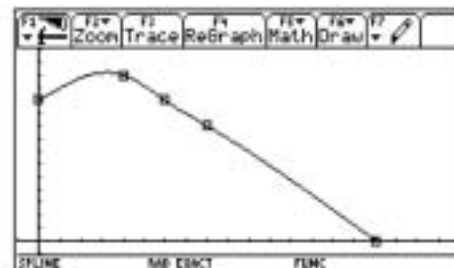


Abb. 7

Graph der in Abb. 6 definierten Splinefunktion

Diese Berechnungen liefern für die Gesamtkrümmung G ca. 1,87206. Sie ist also vergleichbar mit der eines Viertelkreises. Wenn der Graph durchgängig rechtsgekrümmt wäre, müsste $G1 = -G$ sein. Es ergibt sich aber mit dem TI-92 Plus schließlich $G1 \approx -1,67432$. Damit war dann auf diese Art Birgits Frage geklärt und wir konnten auf mindestens einen R-L-Wendepunkt schließen.

Krümmung und Gesamtkrümmung, Teil 2

Im weiteren Unterrichtsgang wurden dann G1 und G noch weiter untersucht.

$$\begin{aligned}
 G1 &= \int_0^l k(s) ds = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(x)}{1+f'(x)^2} dx = \arctan f'(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = \\
 &= \arctan f'(x_1) - \arctan f'(x_0) = \\
 &= \arctan \tan \varphi(x_1) - \arctan \tan \varphi(x_0) = \\
 &= \varphi(x_1) - \varphi(x_0) = \alpha(l) - \alpha(0)
 \end{aligned}$$

Somit gibt G1 die Gesamtänderung des Steigungswinkels α im Bogenmaß an.

- ♦ G lässt sich zwar stückweise vereinfachen, nicht aber global. Für die Approximation ist G bedeutsam, denn der natürliche kubische Spline ist die einzige Kurve, die die gegebenen Punkte mit minimaler Gesamtkrümmung G interpoliert. Hierbei blieb im Kurs am Ende eine Frage offen, die ich hiermit weitergebe:

Gibt es zu dieser Minimaleigenschaft von G einen SII-tauglichen Beweis?

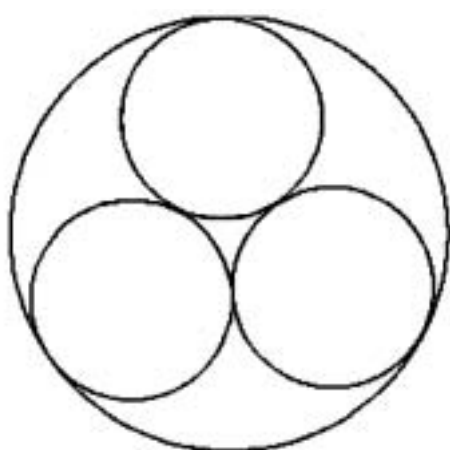
Autor:

Josef Rolfs
 Willohstr. 26, D-26169 Friesoythe
 Josef.Rolfs @ t-online.de

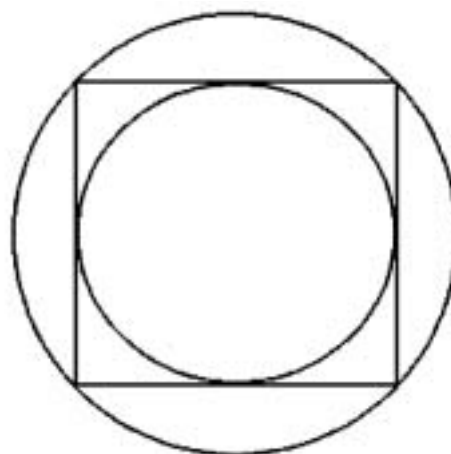
Kreis – Geometrie mit TI-83 Plus

Der TI-83 Plus lässt sich auch für den Geometrie-Unterricht einsetzen. Über das Menü [DRAW] können Punkte, Linien und Kreise im Koordinatensystem gezeichnet werden. Damit können die Figuren folgender Aufgabe zum Themenkomplex Ähnlichkeit und pythagoräischer Lehrsatz am TR dargestellt werden:

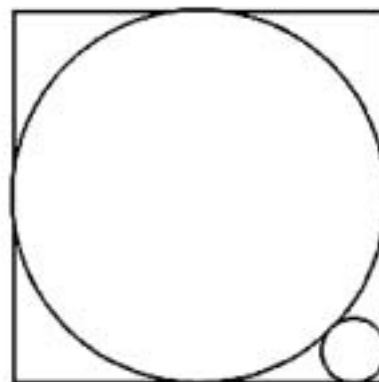
In den folgenden 4 Figuren kommt jeweils mindestens ein kleiner Kreis (Radius r) und ein großer Kreis (Radius R) vor. Bestimme zu jeder Figur das Verhältnis $R : r$! Zeichne diese Figuren mit dem TI-83 Plus! (http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/veranst/didmath/heuristik_problemlösen/heuristik_problemlösen.html#Aufgaben)



Figur 1

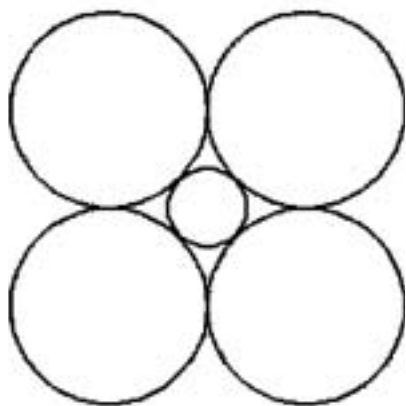


Figur 2



Figur 3

Kreis – Geometrie mit TI-83 Plus



Figur 4

Exemplarisch soll die Figur 1 dargestellt werden:
Die Mittelpunkte der drei kleinen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Grundlinie $2r$ und der Höhe $h = \sqrt{3}r$. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist der Mittelpunkt des großen Kreises.

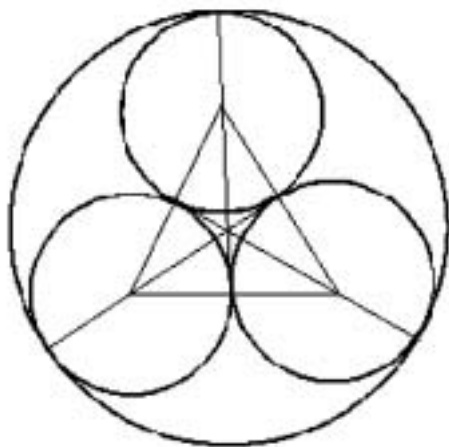


Abb. 1

Dann gilt: $R = r + \frac{2}{3}h = r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}r$

bzw. $r = \frac{3}{3+2\sqrt{3}}R = (2\sqrt{3}-3)R$,

wenn man den Nenner rational macht.

Nun besteht eine Unsicherheit, ob auch richtig gerechnet wurde. Wie kann dieses Ergebnis überprüft werden? Die hier vorgeschlagene Kontrolle mag mathematisch nicht besonders überzeugend sein, aber sie ist sehr anschaulich: Wir zeichnen die Figur mit dem TI-83 Plus!

Dazu wählen wir die Bildeinstellung **ZOOMDecimal** (Menü [ZOOM] > 4:Zdecimal), denn diese Einstellung liefert die gleiche Skalierung für die x- und die y-Achse. Die Achsen werden über das Menü [FORMAT] > AxesOff deaktiviert.

Als Radius für den großen Kreis wählen wir $R = 3$ und als Mittelpunkt den Ursprung. Den Radius der kleineren Kreise $r = 6\sqrt{3} - 9$ speichern wir in der Variablen **R**. Nun ermitteln wir die Mittelpunktskoordinaten

der kleinen Kreise: die beiden unteren kleineren Kreise haben die x-Koordinate $+r$ bzw. $-r$ und die y-Koordinate

$$-\frac{1}{3}h = -\frac{\sqrt{3}}{3}r;$$

der obere Kreis hat die x-Koordinate

$$0 \text{ und die } y\text{-Koordinate } \frac{2}{3}h = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Nun können wir die vier Kreise zeichnen lassen mit dem Befehl **Circle** (Menü [DRAW] > DRAW > 9:Circle) (s. Abb.)

Mit **Pt-On** (Menü [DRAW] > POINTS > 1:Pt-On) können auch noch die Mittelpunkte eingezeichnet werden (s. Abb. 3).

```
Circle(0,0,3)
Circle(R,-sqrt(3)/3,R,R)
Circle(-R,-sqrt(3)/3,R,R)
Circle(0,2*sqrt(3)/3,R,R)
```

Abb. 2

```
Pt-On(-R,-sqrt(3)/3,R)
Pt-On(R,-sqrt(3)/3,R)
Pt-On(0,2*sqrt(3)/3,R)
```

Abb. 3

Hier das Ergebnis und mögliche Lösungen für die anderen Figuren:

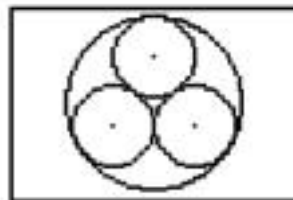


Abb. 4

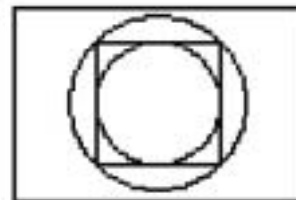


Abb. 5

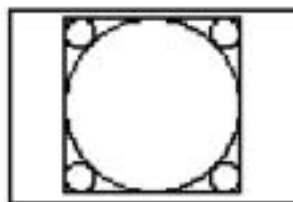


Abb. 6

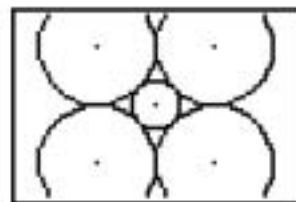


Abb. 7

Autor:

Dr. Markus Paul
Peter-Mayr-Straße 19
A-6020 Innsbruck
markus.paul@utanet.at

Krümmung als Grenzwert

Das Unterrichtskonzept

Über „gefährliche Kurve“ aus dem Straßenverkehr gewinnt man schnell den Einstieg in das Thema:

Ein Auto, das eine Kurve durchfährt, darf diese nicht schneiden, sondern hat sie nur zu „berühren“. Für die kurze Zeit, in der der Einschlag des Steuerrades nicht geändert wird, bewegt sich der Wagen auf einem Kreisbogen.

Damit sind bereits alle Begriffe zur Verfügung gestellt, die benötigt werden, um mit Hilfe des Radius des Krümmungskreises r bzw. durch $k = 1/r$ ein Maß für die Krümmung eines Funktionsgraphen zu definieren. Um mit Schülerinnen und Schülern den Krümmungskreis zu konstruieren, geht man am besten zunächst von einem Kreis aus, bei dem der Mittelpunkt als gemeinsamer Schnittpunkt aller Normalen gegeben ist. Der Krümmungskreis ist überall gleich und in diesem Fall mit dem Funktionsgraphen identisch. Die Methode der Konstruktion des Mittelpunktes des Krümmungskreises durch die Schnittpunkte von Normalen lässt sich auch auf beliebige Funktionen übertragen.

Es soll ein Kreis gefunden werden, der den Funktionsgraphen an der Stelle $x = 5$ berührt und dort die gleiche Krümmung hat wie der Funktionsgraph selbst. Es wird also versucht, die Funktion an dieser Stelle durch einen Kreisbogen zu approximieren. Hier zeigen sich deutliche Parallelen zu der Herleitung der Tangentensteigung, die auch als lokale Approximation der Funktion an einer Stelle aufgefasst werden kann. Dies wird mit Abb.1 erläutert.

Dazu wird zunächst in dem Punkt $A(5; f(5))$ die Normale zu dem Graphen von f und anschließend weitere Normalen an den Stellen $5,25; 5,5; 5,75$ und 6 gezeichnet. Die Schnittpunkte mit der Normalen durch A sind $M1$ bis $M4$. Nun werden Kreise um die Punkte $M1$ bis $M4$ jeweils durch den Punkt A gezeichnet. Während die Kreise mit $r1$ und $r2$ den Graphen noch mehrfach schneiden, so scheint der Kreis mit $r4$ bereits etwa die gewünschte Eigenschaft zu haben. Man wird vermuten, dass die Näherung umso besser wird, je dichter die Normalen an die Normale durch A heranrücken. Hieraus kann nun im Unterricht eine Strategie für das weitere Vorgehen entwickelt werden.

1. Gleichung für die Normalen an den Stellen a und $a+h$ aufstellen.
2. Schnittpunkt dieser beiden Normalen bestimmen.
3. Untersuchen, ob es einen Grenzwert der Punktfolge für $h \rightarrow 0$ gibt.
4. Im Falle der Konvergenz der Folge den Radius des Krümmungskreises und die Krümmung berechnen.

Mit diesem Konzept wird zunächst die Krümmung gegebener Funktionen an vorgegebenen Stellen mit Hilfe von Grenzprozessen untersucht. Das Verfahren lässt sich aber auch auf eine beliebige Funktion $f(x)$ und die Stelle $x=a$ anwenden. Dann gewinnt man die bekannten Formeln für Krümmung und Krümmungskreis, die schließlich zur Bearbeitung praktischer Probleme genutzt werden können.

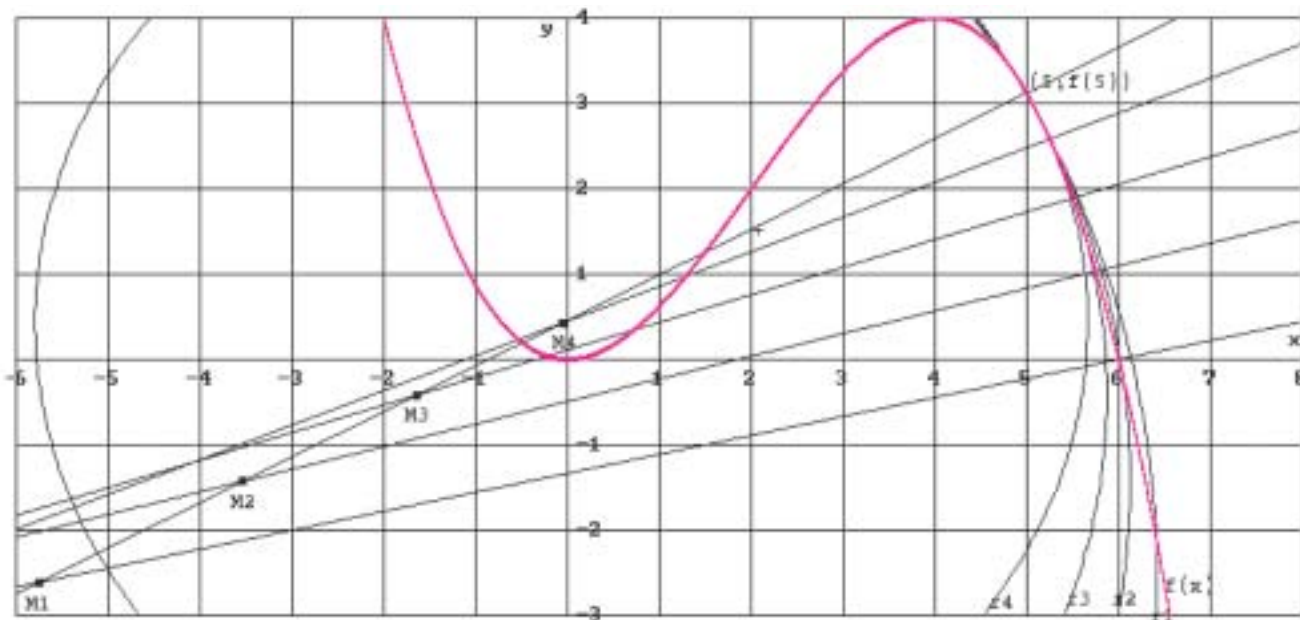


Abb. 1: Suche nach einem Kreis, der den Funktionsgraphen im Punkt $(5; f(5))$ berührt.

Krümmung als Grenzwert

Realisierung der UE mit DERIVE

Bei Benutzung von DERIVE 5 kann jeder Schüler ein eigenes Datenblatt anlegen, in dem alle Definitionen und Befehle individuell kommentiert werden können. Außerdem kann jede Graphik in dieses Worksheet eingebunden werden. Es ist also im Grunde keine zusätzliche Mitschrift in einem Heft erforderlich, denn der Ausdruck des entsprechenden dfw-Files liefert alle erforderlichen Informationen einschließlich der Hausaufgaben mit den Lösungen.

```
#1: norm(x,a) := -1/E'(a) * (x-a) + f(a)
#2: f(x) := -POW(x,3)/8 + 3/4*SQR(x)
( f(x) = -x^3/8 + 3/4*x^2 )
#3: VECTOR(norm(x,-1+0.1*n),n,0,31)
#4: xsc(h) :=
    RHS(SOLVE(norm(x,a)=norm(x,a+h),x))
#5: ysc(h) :=norm(xsc(h),a)
#6: VECTOR(norm(x,5+1/n),n,0,20)
#7: VECTOR([xsc(1/n),ysc(1/n)],n,1,20)
#8: norm(x,5)
#9: xs:=LIM(xsc(h),h,0)
#10: ys:=LIM(ysc(h),h,0)
#11: rs:=SQR(SQR(a-xs)+SQR(f(a)-ys))
#12: SQR(x-xs)+SQR(y-ys)=SQR(rs)
```

Abb. 2: Definitionen und Funktionsaufrufe für die UE Krümmung

Ein solches dfw-File kann hier aus Platzgründen nicht eingefügt werden, stattdessen sind in Abb.2 nur die für die UE erforderlichen Definitionen und Funktionsaufrufe notiert. Zunächst erhalten die Schülerinnen und Schüler mit Zeile 1 und 2 die Möglichkeit, zum Graphen der Funktion die Normalen zu konstruieren. Damit können sie die Lage der Schnittpunkte der Normalen untersuchen. Eine Normalenschar wird z.B. mit Zeile 3 erzeugt, die in Abb.3 dargestellt wird.

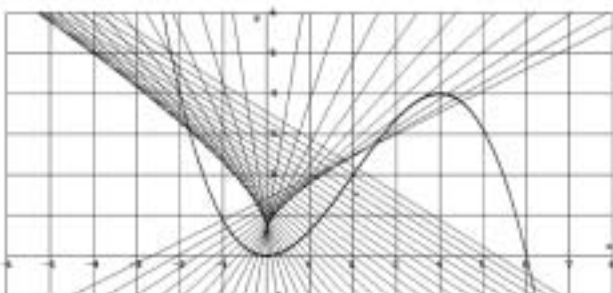


Abb. 3: Normalenschar konstruiert mit dem Baustein norm(x,a)

Darin kann aus den Schnittpunkten benachbarter Normalen auf die ungefähre Lage der Mittelpunkte der Krümmungskreise und deren Radien geschlossen werden. Die zugehörige Krümmung ist im Nullpunkt am größten und bei $x=2$ hat sie den Wert 0, da hier die Normalen parallel verlaufen.

Um die Schnittpunkte algebraisch zu bestimmen wird die Gleichung

$$\text{norm}(x, a) = \text{norm}(x + h, a) \text{ für } h \neq 0$$

in #4 gelöst und in #5 der zugehörige y-Wert berechnet. Mit

$$h = \frac{1}{n}$$

werden in Zeile 6 für $a=5$ und $n=1, \dots, 20$

die zugehörigen Normalen berechnet. Aus der graphischen Darstellung in Abb.4 kann man vermuten, dass die Schnittpunkte der Normalen-

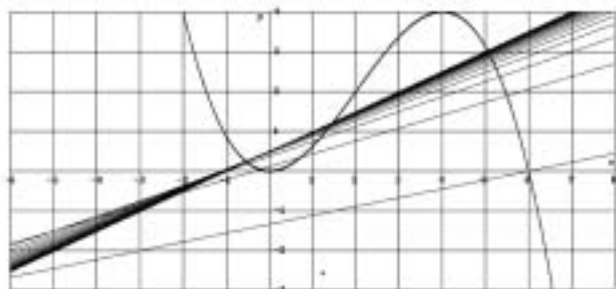


Abb. 4: Normalenschar norm(x+1/n,5) für n=1,...,20

schar mit der Normalen an der Stelle $a=5$ einem Grenzwert zustreben. Dies erkennt man noch deutlicher, indem man für die gleichen Bedin-

gungen nur die Punkte $\left(xsc\left(\frac{1}{n}\right), ysc\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ einzeichnet, wie es

in Abb.5 geschehen ist. Als nächster Schritt sind nun die Grenzwerte für $xsc(h)$ und $ysc(h)$ zu berechnen (#9, #10) Man erhält:

$$(xs; ys) \approx (1.237; 1.118)$$

Aus dem Abstand dieses Punktes von $(5; f(5))$ errechnet man (#11) den Radius des Krümmungskreises $r_s \approx 4.265$. In der letzten Zeile in Abb.2 wird die Gleichung des Krümmungskreises berechnet. Er ist in Abb.5 eingezeichnet worden und ist somit ein für Schülerinnen und Schüler wichtiger Nachweis, dass die durchgeführten Berechnungen richtig sind.

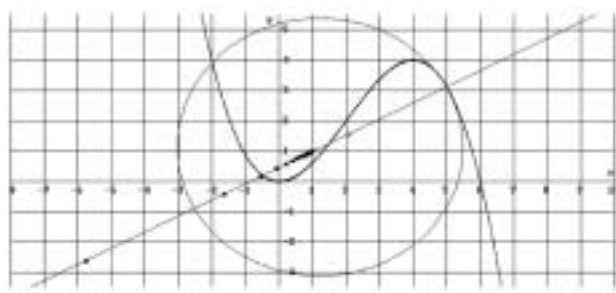


Abb. 5: Folge der Schnittpunkte mit Krümmungskreis.

Nicht immer sind die entstehenden Punktfolgen konvergent. Nähert man der Normalen im Wendepunkt $a=2$ eine Normale $\text{norm}(x,2+h)$ immer mehr an, so entfernt sich der Schnittpunkt der beiden Normalen immer mehr. Das ist bereits aus Abb.3 zu vermuten, weil an dieser Stelle die Normalen offensichtlich parallel verlaufen.

Wenn eine ausreichende Anzahl von Beispielen im Unterricht bearbeitet worden sind, dann kann die Bestimmung der Krümmung für eine beliebige Funktion f an der Stelle a nach der gleichen Methode durchgeführt werden. Dies wird in Abb.6 gezeigt.

Krümmung als Grenzwert

```

"a wird in norm(x,a) durch a+h ersetzt"
#1: ((a+h)-x)/f'(a+h)+f(a+h)
"norm(x,a)=norm(x,a+h) wird gelöst"
#2: xsc(h) :=RHS(SOLVE((a-x)/f'(a)+f(a)=
((a+h)-x)/f'(a+h)+f(a+h),x))
(f'(a)*(f'(a+h)*(f(a+h)-f(a))+a+h)-
a*f'(a+h))/(f'(a)-f'(a+h))
#3: ysc(h) :=norm(xsc(h),a)
(f(a)-(f'(a+h)*(f(a+h)-f(a))+h)/(f'(a)-
f'(a+h)))
    
```

Abb. 6: Funktionsaufrufe und Definition zur Berechnung der Formeln zur Krümmung

Derive kann erstaunlicherweise die Gleichung $\text{norm}(x,a) = \text{norm}(x,a+h)$ nur dann korrekt lösen, wenn $f(x)$ mit einem Funktionsterm belegt ist. Für ein beliebiges $f(x)$ ist das Ergebnis falsch (Derive unterscheidet dann nicht zwischen $f'(a)$ und $f'(a+h)$). Man kann sich behelfen, indem man die Terme von $\text{norm}(x,a)$ und $\text{norm}(x,a+h)$ gleichsetzt, wie es in #2 geschehen ist. Die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes erfolgt dann mit Zeile #2 und #3, wobei die Ergebnisse der Berechnung in Abb.6 ebenfalls (in kursiver Schrift) angegeben sind. Von diesen Lösungstermen sind nun die Grenzwerte für $h \rightarrow 0$ zu berechnen. Das leistet DERIVE ebenso wie viele andere CAS [1] nicht. Bekanntlich sind diese Terme so umzuformen, dass die Differenzenquotienten von f und f' auftreten, deren Grenzwerte dann f' und f'' sind. Der folgende Term gibt die nochmals die Rechnerlösung für $xsc(h)$ (Abb.6, #2) wieder.

$$\frac{-[f(a+h) \cdot f'(a) \cdot f'(a+h) - f'(a+h) \cdot (f(a) \cdot f'(a) + a) + f'(a) \cdot (a+h)]}{f'(a+h) - f'(a)}$$

Daraus erhält man nach der beschriebenen Umformung:

$$a \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - \frac{(f(a+h) - f(a)) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f'(a) \cdot h}{h}}{\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}}$$

Der Grenzwert ist dann:

$$xk(a) = \lim_{h \rightarrow 0} xsc(h) = a - \frac{(f''(a) + 1) \cdot f'(a)}{f''(a)}$$

Für die zugehörige Ordinate erhält man

$$yk(a) = f(a) + \frac{f'(a) + 1}{f''(a)}$$

und für die Krümmung

$$kr = \frac{f''(a)}{(\sqrt{1 + f'^2(a)})^3}$$

Für diese Rechnungen kann man bereits wieder das CAS verwenden.

Literatur:

[1] Keunecke, Karl-Heinz: Behandlung der Begriffe Folge, Grenzwert und Ableitung am Beispiel der Krümmung. **PM 5/ 42** (2000) 216-219.

Autor:

Dr. Karl-Heinz Keunecke
Gorch-Fock-Str. 2, D-24159 Kiel
kh.keunecke@t-online.de

Hermann Hammer

Die „Formel-Produzier-Maschine“

Herr Heitmeyer [1] zeigt am Beispiel der Summe

$$p(n) = \sum_{k=1}^n k^r \text{ für } r = 5, \text{ wie man durch die Vermutung}$$

$p(n) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$ und anschließendes Aufstellen von Gleichungen für die Koeffizienten die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

findet. Zum Lösen der benötigten

Gleichungen bedient er sich sinnvollerweise des TI-92 Plus.

Anschließend beweist er die Gültigkeit der gefundenen Formel mit Hilfe der Beweismethode der „Vollständigen Induktion“, um zum Schluss darauf hinzuweisen, dass „dieses Beweisverfahren nicht konstruktiv ist, d.h. die Aussage – hier die Lösungsformel – muss aus

anderen Überlegungen entstehen.“ In ähnlichem Wortlaut kann man diese Aussage auch in [2] lesen.

Gerade bei Summenformeln lässt sich aber das Verfahren der Vollständige Induktion auch zum Auffinden von Formeln nutzen, wenn man – wie Herr Heitmeyer – von der Vermutung

$$p(n) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$$

ausgeht. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Behauptung:

$$p(n) = \sum_{k=1}^n k^5 = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$$

Der Induktionsanfang $n = 1$ ergibt

$$a + b + c + d + e + f + g = 1$$

(Gl.1)

Die „Formel-Produzier-Maschine“

Der Schluss von $n=m$ auf $n=m+1$ liefert:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3$$

$$a(m+1)^6 + \dots + f(m+1) + g = am^6 + \dots + fm + g + (m+1)^5$$

$$\Leftrightarrow 0 = a(m+1)^6 + \dots + g - am^6 - \dots - g - (m+1)^5 \quad (Gl.2)$$

Jetzt muss „nur“ noch die rechte Seite nach Potenzen von m geordnet werden, aber das kann ja der TI-92 Plus übernehmen!

Zuerst besorgt man sich mit

$$p(n) = \text{polyEval}\{a,b,c,d,e,f,g\},n$$

das passende Polynom, dann kann man in einer weiteren Zeile mit `expand(...)`

die rechte Seite der Gleichung (Gl.2) erzeugen und gleich nach Potenzen von m ordnen lassen. (Vgl. Abb.1. bzw. Abb.2)

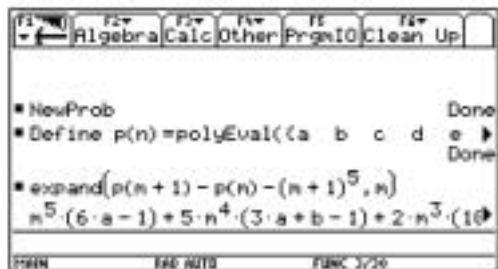


Abb. 1

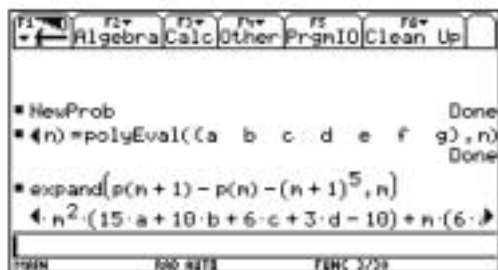


Abb. 2

Da Gleichung (Gl.2) für beliebige m erfüllt sein muss, verschwinden alle Klammern hinter den Potenzen von m .

Also findet man (ggf. mit Hilfe des TI-92 Plus)

$$(1) 6a - 1 = 0, \quad \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$(2) 3a + b - 1 = 0, \quad \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$(3) 10a + 5b + 2c - 5 = 0 \quad \Rightarrow c = \frac{5}{12}$$

$$(4) 15a + 10b + 6c + 3d - 10 = 0 \quad \Rightarrow d = 0$$

$$(5) 6a + 5b + 4c + 3d + 2e - 5 = 0 \quad \Rightarrow e = -\frac{1}{12}$$

$$(6) a + b + c + d + e + f - 1 = 0 \quad \Rightarrow f = 0$$

und schließlich folgt aus Gleichung (Gl.1): $g = 0$.

Als ich dieses Verfahren meinen Schülern vorstellte, gaben sie ihm den Namen „Formel-Produzier-Maschine“. Nach dem Durcharbeiten der üblichen Beispiele ($\sum n^2, \sum n^3, \dots$) erzeugten sie begeistert (Wann passiert das schon einmal im Unterricht?) immer neue Formeln:

- ◆ Summe der ungeraden Zahlen,
- ◆ Summe der geraden Quadratzahlen,
- ◆ Summe der ungeraden Kubikzahlen usw.

Kommentar eines Schülers: „Die Formeln vom Buch, die haben ja etliche Schüler vor uns schon bewiesen. Aber unsere Formeln hat vor uns noch keiner bewiesen.“

Oder zumindest fast keiner...

Literatur:

- [1] G. Heitmeyer: Eine Methode zur Herleitung von Summenformeln, TI-Nachrichten 99/2
- [2] H.Griesel, H.Postel: Mathematik heute - Einführung in die Analysis 1, Schroedel 1988 / 1998

Autor:

Hermann Hammer
 Gottlob-Schneider-Str. 16, D-76275 Etingen
 HermannHammer@aol.com

Flash Technologie

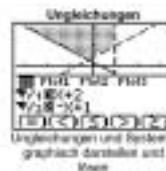
FLASH macht Ihren Rechner aktualisierbar!

Sie haben immer die neueste und beste Version des Betriebssystems auf Ihrem Rechner, mit zusätzlichen Funktionen und Verbesserungen.

FLASH macht Ihren Rechner erweiterbar!

Spielen Sie zusätzliche Software auf Ihren Rechner auf, die Sie persönlich unterstützt und Ihren Unterricht belebt!

Beispiel für den TI-83 Plus:



Beispiele für den TI-92 Plus:



Vorsicht vor dynamischen Definitionen!

Die Kernaussage des nachfolgenden Beitrags ist der Redaktion vor längerer Zeit „zugeflogen“. Wir kennen leider nur den vermutlichen Ort der Schule, nicht aber den oder die Autorin. Da das Thema aber interessant ist, haben wir den Artikel angenommen, etwas ergänzt und umgeschrieben.

Wir würden uns freuen, wenn sich die Autorin oder der Autor bei uns melden würde, damit wir sie oder ihn wenigstens im nächsten Heft lobend erwähnen können.

Das Problem:

Gegeben sei $h(t,x) = t^3 \cdot x^3 - t \cdot x$, also eine parameterbehaftete Funktion. Wir lassen den TI-92 Plus die Ableitung formal berechnen und weisen sie einer anderen Funktion $h_1(t,x)$ zu. Ein Aufruf von $h_1(t,x)$ scheint die Korrektheit zu bestätigen.

Aber, welches überraschende Resultat liefert der Aufruf von $h_1(t,t)$ (s. Abb. 1)

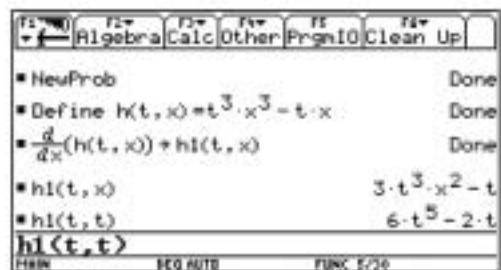


Abb. 1

Rechnet der TI-92 Plus etwa doch nicht richtig?

Die Ursache:

Der Grund liegt darin, dass wir für die Ableitung $h_1(t,x)$ automatisch $h_1(t,x) = 3t^3 \cdot x^2 - t$ im Kopf „ablegen“ und somit $h_1(t,t) = 3t^5 - t$, aber nicht $h_1(t,t) = 6t^5 - 2t$ erwarten.

Tatsächlich ist jedoch unter $h_1(t,x)$ nur die Handlungsanweisung

$\frac{d}{dx}$ ($h(t,x)$) hinterlegt. Ein Blick in den Var-Link Bildschirm (2nd \square) bestätigt dies, wenn man den Cursor auf die Variable h_1 setzt und mit F6 den Inhalt dieser Funktion betrachtet. Wenn wir $h_1(t,t)$ aufrufen, wird der Parameter x durch den Wert t ersetzt und damit der Term $h(t,x)$ zu $h(t,t) = t^3 \cdot t^3 - t \cdot t = t^6 - t^2$. Ebenso wird in der Deklaration der Ableitung die Variable x durch t ersetzt und somit ergibt sich für $h_1(t,t)$ korrekterweise der Term $6t^5 - 2t$.

Die Lösung:

Einzelnen guten Schülerinnen und Schülern wird man diesen informativen Sachverhalt der Parameterübergabe wohl erklären können und sie können dabei auch noch etwas Wesentliches lernen. Im Unterrichtsalltag wird sich aber niemand freuen, mit einer derartigen Situation konfrontiert zu sein!

Als Ausweg bieten sich zwei Varianten an.

- Man ruft den Term $h_1(t,x)$ auf und ersetzt dann, unter Verwendung der [ANS] Funktion und des „wobei“ Operators [1] die Variable x durch t .



Abb. 2

- Der 2. Weg löst das Problem beim Kern der Sache. Statt, wie in Abb. 1, die Ableitung formal zu berechnen, wird sie explizit berechnet und dann erst an $h_1(t,x)$ zugewiesen. Dabei erleichtert uns der [STO] Operator die Arbeit insofern, als er automatisch [ANS] als 1. Operanden in die Eingabezeile übernimmt. Jetzt kann man $h_1(t,t)$ wie in der Mathematik üblich aufrufen.

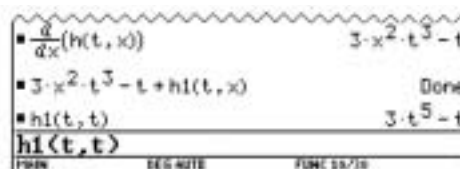


Abb. 3

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge an unsere Länderredaktion:

D: W. Pröpper: w.proepper@wpro.franken.de
 AU: Ch. Birnbauer: c.birnbauer@aon.at
 CH: Urs Oswald: osurs@bluewin.ch

oder an

Texas Instruments, E&PS, TI-Nachrichten,
 Haggertystraße 1, D-85356 Freising,
 E-Mail: ti-nachrichten@ti.com

Mathematisches Ausgleichen von chemischen Reaktionsgleichungen

Selbstverständlich kann man die Gleichungssysteme der stöchiometrischen Koeffizienten von Hand lösen. Wer das am Beispiel der Manganometrie macht, merkt, wie zeitaufwendig diese Arbeit ist. Wenn das Ziel ist, im Chemieunterricht Chemie zu vermitteln, dann kann weder der Stress durch Probieren noch die mathematische „Handwerkerei“ gemeint sein. Das Aufstellen des Gleichungssystems bringt da für die Chemie tiefere Einblicke und der moderne Rechner ist dann didaktisch ein praktisches Werkzeug.

Ausblick

Interessante Besonderheiten als Ausnahmen treten auf, wenn zu wenig Gleichungen mit zu vielen Unbekannten vorhanden sind – ein Anlass für spannende chemische Interpretationen.

Zwei Beispiele

Knallerbsen mit rotem Phosphor

Knallerbsen, ein Versuch der fast immer gelingt – warum eigentlich? Je eine *sehr kleine Spatelspitze* Roter Phosphor wird mit Kaliumchlorat auf einer Eisenplatte vorsichtig und ohne Druck gemischt. Ein Schlag auf das Gemisch mit einem Hammer zeigt als Ergebnis, dass, fast unabhängig von dem Gemischverhältnis, alle Ausgangsstoffe aufgebraucht worden sind. Da stellt sich die Frage: Warum spielt hier die Stöchiometrie fast keine Rolle?

(Dieser Versuch darf nur mit **kleinsten** Mengen und den notwendigen Vorsichtsmaßnahmen durchgeführt werden). Die **Reaktionsgleichung** lautet:



Bei den folgenden Redoxgleichungen muss die Forderung erfüllt sein, dass gleich viele Elektronen aufgenommen wie abgegeben werden.

	Oxidation:			
d	$2 \cdot P^0$	$2 \cdot P^{V+}$	$+2 \cdot 5 e^-$	$+10 e^-$
e	$2 \cdot O^{2-}$	$2 \cdot O^0$	$+2 \cdot 2 e^-$	$+4 e^-$
	Reduktion:			
b	Cl^{V+}	Cl^0	$-6 e^-$	$-6 e^-$

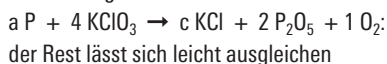
Wird ein Element **oxidiert**, dann wird seine Oxidationszahl **positiver**, wird es **reduziert**, dann wird sie **negativer**.

Die Frage stellt sich nun: Welche Kombinationen der Oxidationsgleichungen liefern genau so viele Elektronen, wie die Reduktion aufnehmen kann?

Antwort: $1d + 2e = 3b$



Andere mögliche Antwort: $2d + e = 4b$



Interessante Feststellung:
Für diese Reaktionsgleichung sind viele verschiedene stöchiometrische Koeffizienten¹ richtig.

Hier einige Beispiele der **Redox**-Reaktion:

	mögliche Varianten											
d	1	2	1	3	1	6	5	7	5	5	11	1
e	2	1	8	3	5	6	1	2	4	4	1	11
b	3	4	7	7	5	7	9	13	11	11	19	9

Die Varianten sind nur deshalb möglich, weil zwei Oxidationen vorliegen und somit mit verschiedenen Kombinationen gleich viele Elektronen abgegeben (Oxidation), wie aufgenommen (Reduktion) werden können.

Aus der **Reaktionsgleichung** ergibt sich das folgende Gleichungssystem (bei den Edukten hat es gleich viele Atome einer Sorte wie bei den Produkten):

$$\begin{aligned} P: & a = 2d \\ K: & b = c \\ Cl: & b = c \\ O: & 3b = 5d + 2e \end{aligned}$$

Aus den Redoxgleichungen erhält man überdies mit den Elektronen

$$10d + 4e = 6b$$

(links Oxidation, rechts Reduktion). Diese Gleichung ist mit der O-Gleichung äquivalent, weshalb schliesslich für die 5 Unbekannten a,b,c,d,e nur 3 Gleichungen verbleiben, von denen wir ausserdem die triviale Gleichung $b=c$ aus dem Lösungsprozess heraushalten können, da c sonst nicht vorkommt. Mit dem Solver (Ti 89 oder Ti 92+) ergibt die Eingabe

$$\text{solve}(a=2*d \text{ and } 3*b=5*d+2*e, \{a,b,d,e\})$$

die Lösung:

$$a=2 @2 \text{ and } b=(2 @1+5 @2)/3 \text{ and } d=@2 \text{ and } e=@1$$

@1: Dieses Symbol gibt an, dass der Parameter frei wählbar ist. Das ist wohl mathematisch richtig, chemisch müssen aber ganze Zahlen vorliegen, somit können wir bestimmte Werte zuordnen:

¹ Stöchiometrischer Koeffizient nach IUPAC, stöchiometrische Zahl nach DIN und stöchiometrischer Faktor in der allgemeinen chemischen Literatur.

Mathematisches Ausgleichen von chemischen Reaktionsgleichungen

Macht man d ganzzahlig, $d=2=1$, so wird:

$a=2$ and $b=(5d+1)/3$ and $c=b$. $e=1$ muss nun so gewählt werden, dass b und c ganzzahlig werden; das gilt für $e=1=2, 5, 8, 11, 14$ etc. (also immer 3er-Schritte)

Mit $d=2$ erhält man $a=4$. Ganze Zahlen erhält man für $b=c$, wenn $e=1, 4, 7, 10, 13, \dots$ (auch hier wieder 3er-Schritte).

Mit $d=3$ erhält man $a=6$. Ganze Zahlen erhält man für $b=c$, wenn $e=0, 3, 6, 9, 12, \dots$

a muss immer gerade sein, weil Phosphor stets als P_2 in der Substanz P_2O_5 vorhanden ist.

Extremfall:

$a=0$, falls $e=3$ heisst, dass sich auch Sauerstoff bildet, wenn kein Phosphor vorhanden ist.

(Korrekte Reaktion: $2 KClO_3 \rightarrow 2 KCl + O_2$)

Ein anderer Extremfall ist:

$a=1000$ and $b=2*(1+1250)/3$ and $c=2*(1+1250)/3$ and $d=500$ and $e=1$;

$e=1, 4, 7, 10, 13, \dots$

$a=1000$. $b=834$, $c=834$, $d=500$, $e=1$

Stöchiometrische Koeffizienten der Knallerbsen-Reaktion

a P +	b KClO ₃	P/KClO ₃	c KCl +	d P ₂ O ₅ +	e O ₂
0	2	0	2	0	3
2	n		n	1	$(n-1)/2 * 3-1$
2	13	0.15	13	1	17
2	11	0.18	11	1	14
2	9	0.22	9	1	11
2	7	0.29	7	1	8
2	5	0.40	5	1	5
2	3	0.67	3	1	2
4	4	1.00	4	2	1
6	5	1.2	5	3	0
6	7	0.86	7	3	3
10	11	0.91	11	5	4
10	9	1.11	9	5	1
66	59	1.12	59	33	6
1000	834	1.199	834	500	1

Die Folgerungen aus dieser Besonderheit:

- Der Extremfall, bei welchem überhaupt kein Phosphor benötigt wird, ist die Zersetzungsreaktion von $KClO_3$ mit Sauerstofffreisetzung. Die Instabilität dieser Substanz kann in unserem Beispiel als ein Extremfall der Lösungen erkannt werden.

- Die Reaktion läuft bei verschiedensten Verhältnissen von $P/KClO_3 = 0$ bis 1,2 vollständig ab – sie ist in diesem Bereich nicht vom Mischungsverhältnis abhängig (je eine Spatelspitze beider Ausgangsstoffe und trotzdem keine Rückstände) – der Versuch gelingt daher immer.
- Je mehr Kaliumchlorat, im Verhältnis zum Phosphor, desto stärker der Knall, weil pro Anzahl eingesetzte Teilchen mehr Gasteilchen produziert werden.
- Der Hammerschlag bringt die beiden Stoffe so nahe zusammen, dass die Elektronen vom Phosphor und Sauerstoff auf Chlor überspringen können.

Was ist nun der Vorteil mit dem Rechner:

- Der Rechner oder das Mathematikprogramm zeigt uns an, dass das Gleichungssystem auch mit den 5 Gleichungen für 5 Unbekannte nicht genügend bestimmt ist.
- Die praktische Konsequenz aus dieser Aussage ist, dass die Reaktion von den Mengenverhältnissen in einem bestimmten Bereich unabhängig ist – man muss nicht abwägen und die Reaktion läuft trotzdem vollständig.
- Zudem erlaubt uns der Rechner ohne zu grossen Aufwand Extremwerte zu bestimmen, die für die chemische Reaktion zulässig sind.
- Ein Extremwert ist besonders interessant, da er die Instabilität von Kaliumchlorat aufzeigt.

Schwefelerbsen

Wird der rote Phosphor durch Schwefel ersetzt, dann läuft die Reaktion auch, nur ist das Gemisch viel weniger reib- und schlagempfindlich. Dieses Gemisch wurde bei Schwefel-Zündhölzern verwendet. Das Gemisch mit Schwefel ist viel weniger schlagempfindlich als mit Phosphor. Die oft ausbleibende Zündung des Pulvergemisches mit dem Hammer hat dazu geführt, dass Experimente durchgeführt wurden, das Gemisch zu optimieren. Ca. 20 Gramm vom Material der vielen erfolglosen Versuche wurde gesammelt und in einen Mörser gegeben. Am 10 Januar 2000 führte das in Sirmach (Kanton Thurgau, Schweiz) zu einer Explosion mit schweren Verletzungen.

Hier lautet die **Reaktionsgleichung**:



Mathematisches Ausgleichen von chemischen Reaktionsgleichungen

Sie führt auf die Gleichungen:

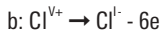
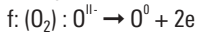
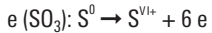
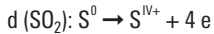
S: $a = d + e$

K: $b = c$

Cl: $b = c$

O: $3b = 2d + 3e + 2f$

Redox:



Gleichung für Redox: Abgabe = Aufnahme

$4d + 6e + 2f = 6b$

Hier ist die Redox-Gleichung nicht äquivalent zu einer der Gleichungen, die sich aus der Reaktionsgleichung ergeben.

Wiederum können wir die triviale Gleichung $b=c$ aus dem Lösungsvorgang heraushalten, da c sonst nicht vorkommt. Es verbleiben 3 Gleichungen für 5 Unbekannte. Die Solver-Eingabe lautet

solve ($a=d+e$ and $3*b=2*d+3*e+2*f$ and $4*d+6*e+2*f=6*b, \{a,b,d,e,f\}$)

und führt zum Resultat

$a=@1+@2$ and $b=(3*@1+2*@2)/3$ and $d=@2$ and $e=@1$ and $f=0$.

Schreibt man abgekürzt $@:=@1$ und wählt für $d=@2$ der Reihe nach $d=0,3,6,9, \dots$, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Stöchiometrische Koeffizienten der Schwefelerbsen-Reaktion

a (S)+	b KClO ₃	(S)/KClO ₃ 1	c KCl+	d SO ₂ +	e SO ₃ +	f O ₂
0	2	0	2	0	0	3
1	1	1/1=1	1	0	1	
@	@	@>1 nicht erlaubt		0	@	0
3	2	3/2=1,5 a=0, s.oben	2	3	0	0
96 g	122,5 g					
@+3	@+2		@+2	3	@	0
@+6	@+4		@+4	6	@	0
@+9	@+6		@+6	9	@	0
@+12	@+8		@+8	12	@	0

$a=0$: bekannte Reaktion der Zersetzung von KClO₃ in der Hitze, ohne weitere Substanzen.

Die geringe Schlagempfindlichkeit des Schwefel-Kaliumchlorat-Gemischs hat schliesslich dazu verleitet, das im Mörser gesammelte Gemisch mit dem Pistill zu mischen.... mehrere Gramm!! Was vorher nicht reagiert hatte, führte nun zur, diesmal unerwünschten, Explosion. Das Tragische an diesem Unfall ist auch, dass die Versuche nach der dargestellten Theorie völlig unnötig waren – aber diese Theorie fehlt noch heute in fast allen Lehrbüchern.

Das wirksamste Gemisch, mit dem grössten Anteil an Gasen, lässt sich theoretisch berechnen.

Folgerung aus dem Vergleich der beiden Reaktionen:

Für Demonstrationen ist es besser, ein Gemisch von Kaliumchlorat und rotem Phosphor, und nicht Schwefel zu verwenden. Dieses Gemisch reagiert besser, ist schlagempfindlicher. Von diesem „Sprengstoff“ dürfen nur kleinste Mengen verwendet werden.

Anschrift des Autors:

Prof. Dr. Peter Bützer
Pädagogische Hochschule
Nokerstrasse 27
CH-9004 St. Gallen
peter.buetzer@unisg.ch

Lehrerfortbildung und Workshops



T³ – Teachers Teaching with Technology™

T³ ist ein europäisches Projekt zur Lehreraus- und Fortbildung mit neuen Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Referenten mit eigener unterrichtspraktischer Erfahrung leiten Workshops und führen die Teilnehmer an den didaktisch und methodisch sinnvollen Einsatz der neuen Technologien heran. Themen sind:

- ◆ Graphikfähige Taschenrechner wie z.B. TI-83 Plus
- ◆ Computer-Algebra-Systeme wie z.B. TI-89 oder Derive™
- ◆ CAS-Taschencomputer wie z.B. TI-92 Plus
- ◆ Geometrieprogramme wie z.B. Cabri Géomètre II™

Eine detaillierte Übersicht der T³-Veranstaltungen im Jahr 2002 finden Sie im Internet unter:

www.zkl.uni-muenster.de/t3/calender.html

Die Faszination der unendlichen Summen – frei nach Euler

In zahlreichen Klassenstufen (Kl.6: periodische Dezimalbrüche, Kl.9: Darstellung von \sqrt{a} , $a \geq 0$, Kl.10: Kreiszahl π) kommt der Unendlichkeitsbegriff ins Spiel, und viele Schüler sind sofort von ihm fasziniert. Hier bietet sich die Möglichkeit, Mathematik als grandiose Kulturleistung erleben zu lassen, wie es zu Recht in den Bildungsplänen gefordert wird. Bedauerlicherweise wird – etwas überspitzt formuliert – den Schülern die Faszination des Unendlichkeitsbegriffes in der Analysis der Oberstufe wieder gründlich ausgetrieben, da man hier den Grenzwertbegriff als technisches Hilfsmittel verkommen lässt oder sich mit Existenzproblemen des Limes herumschlägt. Da waren die Mathematiker des 18. Jahrhunderts, allen voran Euler, weit weniger penibel und brachten durch ihre Unbekümmertheit im Umgang mit dem Unendlichen zum Teil atemberaubende Ergebnisse hervor.

Sollen wir unseren Schülern diese Überlegungen und Ergebnisse vorenthalten, nur weil nicht alles beim Beweis so sauber und exakt zugeht, wie man es uns Lehrern im Laufe unseres Studiums beigebracht hat? Dazu sind – nach meiner Meinung – die Formeln für unendliche Reihen viel zu schön (Leider spielt der Begriff Schönheit in der Schulmathematik nur eine unbedeutende Rolle!) und zu eindrucksvoll!

In einem Beispiel soll eine Formel für unendliche Summen in einer für Schüler nachvollziehbaren Form hergeleitet werden. Eine Sammlung weiterer Übungsaufgaben finden sich in der Langform des Artikels unter folgender Internetadresse: education.ti.com/Deutschland/Materialien.htm. Dort ist sie in der Rubrik TI-92/Analysis eingeordnet.

Vergleich von ganzrationalen Funktionen mit ihren Ableitungen

1. Definieren Sie eine ganzrationale Funktion f vierter Ordnung. Machen Sie sich dazu mit der Summenschreibweise (Σ) und mit der Schreibweise der Koeffizienten ($a[k]$) vertraut. ($n=4$ nimmt Rücksicht auf den begrenzten Bildschirm des TI-92!)
2. Bestimmen Sie die 1., 2., 3., 4. und 5. Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$

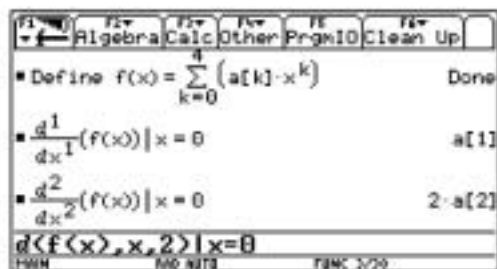


Abb. 1

Um mit Hilfe der Ableitungen zur Funktion f zurückzufinden, muss man mehrere Dinge beachten:

- a) Man erkennt, dass die Koeffizienten jeweils mit der Fakultät $k!$ multipliziert werden, wobei k die k -te Ableitung angibt. Die oben gefundenen Ableitungswerte an der Stelle $x[0] = 0$ muss man also durch die entsprechenden Fakultäten dividieren. Das erfolgt mit dem Befehl $k!$. (! wird durch $\boxed{2nd}$ $\boxed{!}$ eingegeben.)
 - b) Dann kann man das obige Polynom als Summe von Produkten zusammensetzen. Das k -te Produkt ist der k -te Ableitungswert, dividiert durch die k -te Fakultät und multipliziert mit der k -ten Potenz von x .
3. Bestimmen Sie das 2. und das 3. Produkt. Analysieren Sie dazu den Bildschirm in Abb.2

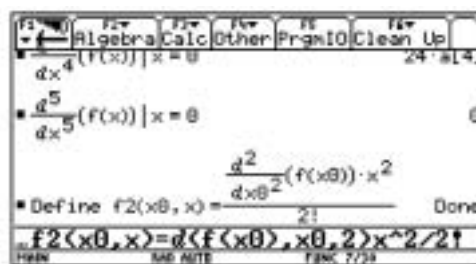


Abb. 2

(Erläuterung: Da bei diesem Produkt sowohl die k -te Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ als auch die allgemeine Variable x benötigt wird, definiert man kurzerhand eine Funktion mit den beiden Variablen x_0 und x .)

4. Rekonstruieren Sie mit Hilfe des Summenbefehls Σ das Polynom aus seinen Ableitungen.

Lösung des Problems:

Jede ganzrationale Funktion f vom Grad n lässt sich folgendermaßen mit Hilfe ihrer Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$ darstellen:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\left(+ \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots \right)$$

wobei die Glieder in der Klammer Null werden, weil die Ableitungen höher als n einer ganzrationalen Funktion alle verschwinden.

Die Faszination der unendlichen Summen – frei nach Euler

Es stellt sich sofort die Frage: Gibt es diese Möglichkeit auch für beliebige Funktionen?

Der ausführliche Artikel widmet sich dieser Frage detailliert, und es werden folgende Ergebnisse hergeleitet:

a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots = \sqrt{1+x};$

b) $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = 0;$

c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4};$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6};$

e) Eulers Folgerung daraus für Primzahlen

Literatur:

[1] L. Euler: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1885. - 1985 Berlin: Springer
[2] F. Erwe: Differenzial- und Integralrechnung, Bd1, 1973 Mannheim: Bibliographisches Institut (Hochschultaschenbücher)
[3] Delahaya: Le fascinant nombre Pi, 1997

Autor:

Hermann Hammer
Gottlob-Schneider-Str.16
D-76275 Etlingen
HermannHammer@aol.com

Christian Frießnegg

Zeitmessung mit Hilfe eines Taschenrechners

Die Idee einer Zeitmessung kam, als wir, Christian Frießnegg, Peter Schrotter und Dominik Ruck, drei Schüler der 3. Klasse im Bereich Elektrotechnik mit verstärktem Englisch der HTL BULME aus Graz, die Geschwindigkeit eines Modellautos messen wollten.



Peter Schrotter und Christian Frießnegg, Entwickler einer Zeitmessungs-Lichtschranke für den TI-92 Plus und TI-89.

"Niemand möchte viel arbeiten" dachten wir uns und begannen nach bereits einsatzfähigen Zusätzen für die Taschenrechner TI-92 Plus und TI-89 zu suchen. Aber wir entdeckten schließlich, dass niemand zuvor eine solche Messeinrichtung gebaut hatte.

Betrübt über solch einen Misserfolg wollten wir die Flinte ins Korn werfen, aber siehe da, zwei Wochen später wurde ein Klassenprojekt zum Thema Zeit veranstaltet.

Diese Chance ergriffen wir, um unsere Idee in die Tat umzusetzen.

Dabei stellten wir einige Anforderungen:

- ◆ Die gemessene Zeit sollte auf 2/100 Sekunden genau sein,
- ◆ es sollte möglichst einfach sein, die Messwerte weiterzuverarbeiten,
- ◆ die Bedienung der Soft- und Hardware sollte leicht sein,
- ◆ die Geräte und Bauteile sollten einfach zu beschaffen und billig sein
- ◆ und das ganze sollte obendrein noch möglichst gut aussehen.

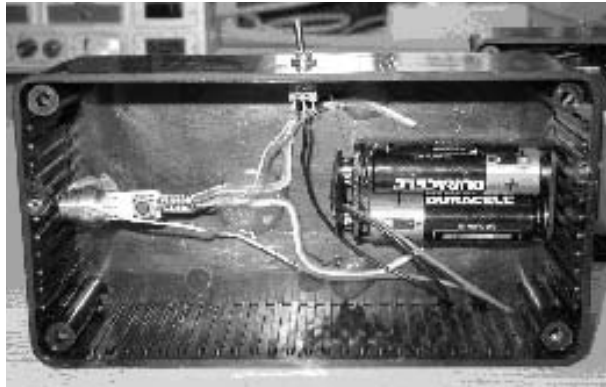
Dies gelang uns auch schlussendlich. Das gesamte Equipment für die Zeitmessung besteht aus zwei Lichtschranken, einem Taschenrechner und der passenden Software.

Die Lichtschranken waren relativ leicht zu entwickeln. Sie bestehen aus zwei Laserdioden als Lichtquelle und einer Art Dämmerungsschalter als Empfänger.

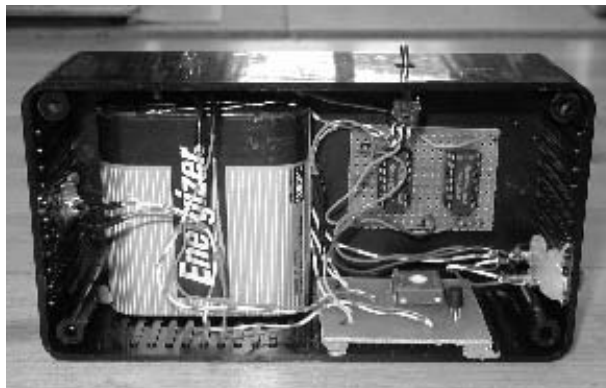
Die zwei Lichtschranken werden miteinander verbunden, sodass beide sowohl Start als auch Ziel sein können. Bei Unterbrechen der Lichtschranken signalisiert eine zusätzliche Leuchtdiode diese Unterbrechung und ein Signal wird an den Taschenrechner gesendet.

Zeitmessung mit Hilfe eines Taschenrechners

Die folgenden Bilder zeigen das "Innenleben" der Lichtschranken.



Das Lichtschranken-„Sende“-Modul mit eingebauter Laserdiode



Das Lichtschranken-„Empfangs“-Modul mit Anschluss für die Taschenrechner und Signal-Leuchtdiode.

Das Prinzip der Software ist auch relativ einfach und wurde daher in C und Assembler geschrieben:

Es wird ein Startsignal abgewartet. Sobald dieses empfangen wird, zählt das Programm einen Interrupt, der mit einer fixen Frequenz aufgerufen wird. Die Frequenz dieses Interrupts ist bekannt und der Interrupt fungiert somit als Zeitmesser.

Die Software zählt die Anzahl der Interrupts bis ein Stoppsignal empfangen wird.

Danach wird aus der Anzahl der gezählten Interrupts die Zeit errechnet.

Die Signalfolge im Zusammenhang mit den Programmabschnitten lässt sich anhand eines Zeitdiagramms einer Messung relativ einfach darstellen:

Zuerst wird ein Startsignal von den Lichtschranken abgewartet. Sobald dieses empfangen wird, startet der Messvorgang bis wiederum ein Stoppsignal empfangen wird.

Da Start- und Stoppsignale gleich sind, kann jede Lichtschranke sowohl Start als auch Ziel sein und es können, bei mehreren hintereinander gekoppelten Lichtschranken, Teilzeiten und Teilgeschwindigkeiten gemessen werden.

In diesem Punkt liegt die Ausbaufähigkeit der Lichtschranke:

Wir sind dabei eine Lichtschranken-Kaskade zu bauen, um die verschiedenen Teilgeschwindigkeiten eines Modellautos auf der gesamten Strecke zu messen. Natürlich könnte eine solche Kaskade auch zum Messen der Beschleunigung verwendet werden und daher bei vielen verschiedenen physikalischen Versuchen wie z.B. „Edwards Fallmaschine“ zum Einsatz kommen.

Anhand eines Programmablaufdiagramms lässt sich die Funktion des Zeitmessungsprogramms leicht erklären. Es baut auf dem vorhergehenden Signaldiagramm auf und stellt in groben Zügen die einzelnen Programmschritte dar.



Nach dem Start des Programms wird die Schnittstelle des Taschenrechners ausgelesen. Die Daten der Schnittstelle werden auf ein Startsignal hin überprüft und solange kein derartiges Signal empfangen wird, springt das Programm zurück zur Schnittstellenabfrage.

Wenn ein Startsignal vom Programm erkannt wird, beginnt die Zeitmessung.

Ein Zähler wird immer dann erhöht, wenn ein Interrupt mit einer fixen Frequenz ausgelöst wird. Darauf folgend wird die Schnittstelle erneut ausgelesen. Diesmal aber werden die empfangenen Daten auf ein Stoppsignal hin untersucht. Sobald dieses dann auch vom Programm erkannt worden ist, ist die Zeitmessung beendet und die tatsächliche Zeit kann aus der Anzahl der Interrupts berechnet werden.

Unser erstes Programm war in der Flexibilität eingeschränkt, da es auf die Modellauto-Messungen und für die Klassenpräsentation maßgeschneidert war.

Und als schließlich unsere Professoren sich für unser Projekt interessierten, entschlossen wir uns ein neues, benutzerfreundlicheres Programm zu schreiben.

Zeitmessung mit Hilfe eines Taschenrechners

Die Idee war eine Flash-Application für die Taschenrechner zu schreiben, denn damit wäre es möglich, dass Benutzer das Programm als Plug-In von BASIC aufrufen könnten.

Die Messdaten weiterzuverarbeiten wäre dann vom Benutzer aus leicht möglich und das Programm würde dann leicht auch für andere Zwecke Einsatz finden.

Graphen und Statistiken könnte man demnach auch sehr einfach erstellen.

Mit diesen Aspekten vor Augen schrieben wir das Programm und es wurde gleichzeitig ein Plug-In und Stand-Alone Programm. Wir wählten eine BASIC ähnliche Benutzeroberfläche, da es als Plug-In nicht zu ausgefallen aussehen sollte.

Die gemessenen Zeiten und errechneten Geschwindigkeiten werden als Liste zurückgegeben.

Parallel dazu generiert das Programm auch ein detailliertes Messungsprotokoll als Textdatei.

Die folgenden Screenshots zeigen das Programm:



Das Plug-In/Stand-Alone Programm mit der BASIC ähnlichen Oberfläche



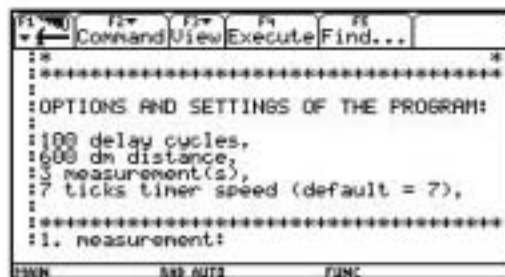
Das Programm während der Zeitmessung.



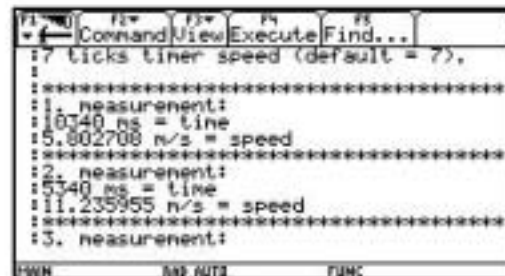
Die beendete Messung mit Geschwindigkeitsanzeige.



Die wiedergegebenen Zeiten und Geschwindigkeiten als Liste



Das Messungsprotokoll als Textdatei.



Die gemessenen und errechneten Werte.

Das ist das Grundprinzip der Soft- und Hardware.

Die Realisierung war allerdings schon etwas aufwändiger. Aber da wir schon relativ viel Erfahrung mit der Hardware und der Software des Taschenrechners gesammelt hatten, meisterten wir auch die etwas aufwändigeren Probleme. Es war recht kompliziert die Signale auszuwerten, da wir die Schnittstelle direkt auslasen. Aber hier kam uns unsere Erfahrung im Bereich der Datenübertragung zu Hilfe, denn wir verbesserten unter anderem den bereits bestehenden IR-Link für die Taschenrechner.

Auch unsere Kenntnisse über das Übertakten oder „Overclocking“ der Taschenrechner auf 3- bis 4-fache Rechengeschwindigkeit waren uns sehr hilfreich beim Bau der Lichtschranke, denn wir wussten anfangs nicht genau, welche Spannungspegel die Schnittstelle des Taschenrechners benötigt und heil übersteht.

All diese Erfahrungen über die Taschenrechner und Peripherie werden uns noch sehr nützlich sein bei unseren nächsten Projekten, unter anderem auch eine Funk-Datenübertragung zwischen 2 Rechnern und in weiterer Folge ein Funk-Netzwerk in einer Klasse.

Zeitmessung mit Hilfe eines Taschenrechners

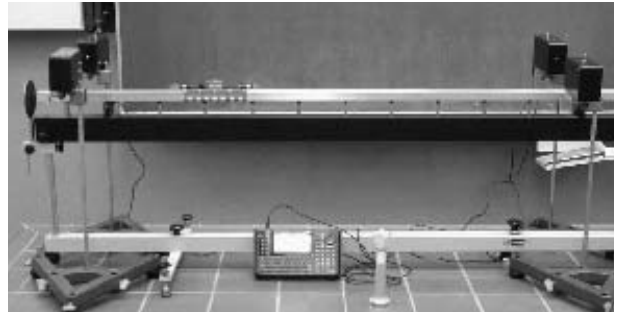
Unsere erste Messung eines Modellfahrzeuges beeindruckte unsere Professoren so sehr, dass sie sich bald für die Zeitmessung interessierten. Sie konnten mit ihr leicht und präzise Messungen im Bereich der Physik, Chemie, Elektrotechnik, Elektronik und sogar Messungen im Sportbereich machen.

Wir verwendeten dieselben Lichtschranken, um die Geschwindigkeit und Zeit eines Läufers auf der Laufstrecke der Schule zu messen. Und als sich schließlich auch unser Physikprofessor für die Zeitmessung interessierte, bauten wir sie im Physiksaal an einer Luftkissenbahn auf. An ihr konnte man sehr gut die Geschwindigkeit eines Luftkissenwägelchens messen.



Die Lichtschranke an der Laufbahn: Die Start-Lichtschranke ist im Hintergrund, die Stopp-Schranke im Vordergrund.

Unser Physikaufbau an der Luftkissenbahn:



In der Mitte befindet sich die Luftkissenbahn und das Luftkissenwägelchen. An den Enden stehen die Lichtschranken. Das Luftkissenwägelchen ist mit einem Stab versehen, um den Laserstrahl zu durchbrechen.

Allmählich entwickelte sich das anfangs nur zu Modellauto-Messzwecken entwickelte Projekt zu einem "allround"-Werkzeug für Schüler und Lehrer, obwohl es immer noch ein Prototyp ist. Einige Professoren meinten sogar, dass unsere Zeitmessmethode ein sehr guter Zusatz zum Messsystem CBL, das bereits für die Taschenrechner erhältlich ist, sei.

Autor:

Christian Frießnegg
Gaißeregg 99, A-8551 Wies, Austria
c_friessnegg@hotmail.com oder fries_ch@bulme.at

Lichtbrechung

Folgende Aufgabenstellung wurde anlässlich eines Weiterbildungskurses zum Thema "Physik und Anwendungen der Mathematik" ausgearbeitet und anschliessend am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasium der Kantonsschule am Burggraben in St. Gallen mit einer dritten Klasse erprobt. Die Lösungsvorschläge stammen von Schülern dieser Klasse.

1. Aufgabenstellung

Lichtstrahlen treffen vom Vakuum auf eine Schicht von 10 Glasplatten der Dicke 1 cm mit unterschiedlicher Brechzahl.

Werden die Platten von oben nach unten nummeriert, so betrage die Brechzahl $n_{(k)}$ der k -ten Platte: $n_{(k)} = 0.2 k + 1$

- Berechne und zeichne die Bahn des Lichtstrahls, welcher die erste Platte im Punkt P unter dem Einfallswinkel $\alpha = 80^\circ$ trifft.
- An welcher Stelle sieht eine Beobachterin den Lichtstrahl auf die oberste Schicht auftreffen, wenn sie den Strahlenverlauf von der untersten Schicht aus im Auftreffpunkt Z beobachtet?
- Entwickle ein Pascalprogramm, welches zu eingelesenem Einfallswinkel den Verlauf des Lichtstrahls durch die Glasplatten samt den Begrenzungslinien der Platten zeichnet.
- Sind die Platten beliebig dünn, so beschreibe der Lichtstrahl eine gekrümmte Kurve. Bestimme die Gleichung der Kurve.

Lichtbrechung

2. Lösung zum Teil (a) (nach Martin)

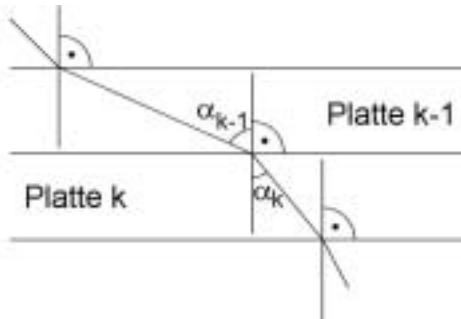


Abb. 1

(a) Mittels Brechungsgesetz lassen sich die Ausfallswinkel α_k rekursiv berechnen:

$$\frac{\sin(\alpha_{k-1})}{\sin(\alpha_k)} = \frac{n_{k+1}}{n_{k-1}} = \frac{0.2k+1}{0.2(k-1)+1}$$

Damit:

$$\sin(\alpha_k) = \frac{0.2(k-1)+1}{0.2k+1} \sin(\alpha_{k-1})$$

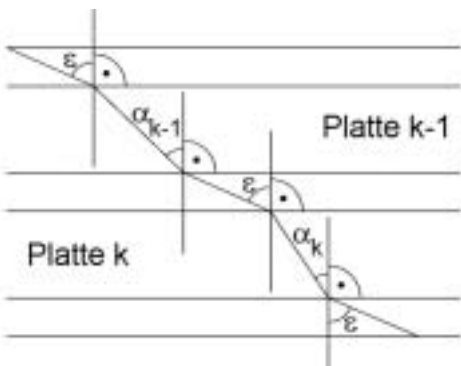


Abb. 2

(b) Physikalische Betrachtung, um α_k ohne Rekursion berechnen zu können. Dazu denkt man sich beliebig dünne Vakuumschichten zwischen den Platten (Abb.2). Es gilt:

$$\frac{\sin(\epsilon)}{\sin(\alpha_k)} = 0.2k+1 \Leftrightarrow \sin(\alpha_k) = \frac{\sin(\epsilon)}{0.2k+1}$$

Platten Nr	$\Delta x_k = \tan(\alpha_k) \cdot 1\text{cm}$	x_k -Wert beim Austritt [cm]
1	1.440	1.44
2	0.989	2.43
3	0.781	3.21
4	0.654	3.86
5	0.566	4.43
6	0.501	4.93
7	0.450	5.38
8	0.409	5.79
9	0.376	6.16
10	0.348	6.51

(c) Die x-Werte der Auftreffpunkte des Lichtstrahls auf die einzelnen Grenzflächen lassen sich nun über die Winkel α_k berechnen:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \Delta x_k = x_{k-1} + \tan(\alpha_k) \cdot 1\text{cm} \\ &= x_{k-1} + \tan(\arcsin \frac{\sin(\epsilon)}{0.2k+1}) \text{ cm} \\ \tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\sqrt{1-\sin^2(z)}} \\ x_k &= x_{k-1} + \frac{\sin(\epsilon)}{\sqrt{(0.2k+1)^2 - \sin^2(\epsilon)}} \text{ cm} \end{aligned}$$

Für die Koordinaten des Auftreffpunktes $Z(x_z|y_z)$ am Boden ergibt sich: $Z(6.51|0)$

3. Lösung zum Teil (b) (nach Martin)

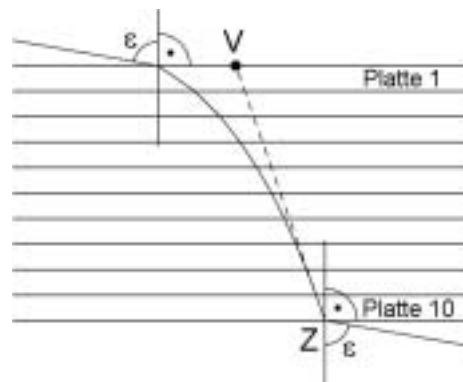


Abb. 3

Für die Koordinaten des vermeintlichen Auftreffpunktes $V(x_v|y_v)$ gilt: $x_v = x_z - \tan(\alpha_{10}) \approx 3.03 \text{ cm}$ und $y_v = 10 \text{ cm}$

4. Lösung zum Teil (c) (nach Romedi und Stefan)

```

program Lichtbrechung;
const pi=3.14159;

var balt, bneu, xalt, xneu, a, bm: real;
    k: integer;

procedure Einlesen;
begin
    write('Geben Sie den Einfallswinkel
          - a ein (0<=a<=90) : ');
    readln(a);
end;

procedure Koordsyst;
begin
    uSetXAchse(-1,12);
    uSetYAchse(-1,11);
    uDrawKSXY(1,1);
    for k := 1 to 10 do
        begin
            uMoveto(0,11-k);
            uLineto(10,11-k);
        end;
end;
    
```

Lichtbrechung

```

procedure Zeichnen;
begin
  bm:=a/180*pi; {Bogenmass}
  xalt:=0; balt:=bm;
  uMoveto(xalt,10);
  for k := 1 to 10 do
  begin
    bneu:=arcsin(sin(balt)*-
      -(0.2*(k-1)+1)/(0.2*k+1));
    xneu:=xalt+tan(bneu);
    uLineto(xneu,10-k);
    balt:=bneu; xalt:=xneu;
    writeln(k,'-er Brechungswinkel:-
      -', (bneu*180/pi):4:2, ' ');
  end;
  write('Schnittpunkt der Bahn des -
    -Lichtstrahls mit x-Achse: -
    -', xneu:4:2);
end;

begin
  Einlesen;
  Koordsyst;
  Zeichnen;
end.
  
```

Das Programm ist in der für Schulen speziell geeigneten Programmiersprache TopPascal geschrieben. Eine Demo-Version kann unter www.ateus.ch heruntergeladen werden.

- (a) Prozedur „Einlesen“: Liest den Einfallswinkel ϵ ein.
- (b) Prozedur „Koordsyst“: Zeichnet das Koordinatensystem samt den Begrenzungslinien der Platten.
- (c) Prozedur „Zeichnen“: Zeichnet den Lichtweg.

5. Lösung zum Teil (d) (nach Martin)

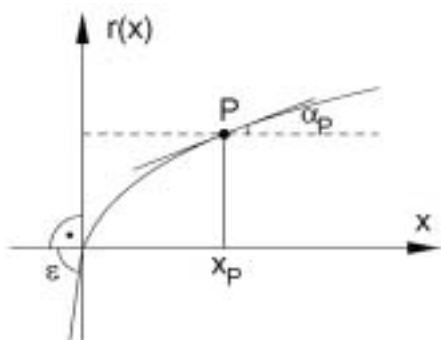


Abb. 4

```

Algebra Calc Other PrntIO Clear a-z...
80 + epsilon : 10 + d : 3 + brmax
x/d * (brmax - 1) + 1 + brq(x) Done
sin(epsilon) / brq(x) + stg(x) Done
sqrt(1 - (sin(epsilon) / brq(x))^2) * stg(x)
n(epsilon) / brq(x) ^ 2 + stg(x)
  
```

Abb. 5



Abb. 6

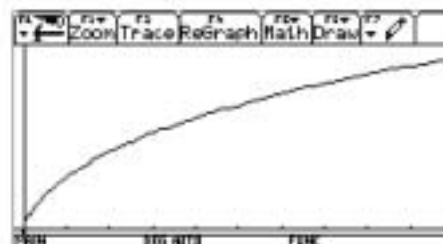


Abb. 7

- (a) Wahl des Koordinatensystems: Wähle das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Auftreffpunkt liegt und die Abszissenachse senkrecht zu den Platten verläuft.

- (b) Brechzahl in Abhängigkeit vom Ort: Gehe aus von der Voraussetzung, dass die Brechzahl linear von der „Tiefe“ x abhängt:

$$brq(x) = \frac{x}{d}(br_{max} - 1) + 1$$

Dabei bedeutet d die Dicke des optischen Mediums und br_{max} die Brechzahl an der Stelle d . (für unser Beispiel aus Teil (a): $d=10$ cm und $br_{max}=3$).

- (c) Bedingung für die Bahn: Für die Steigung $stg(x_p)$ der Tangente an die Lichtbahn an der Stelle x_p gilt:

$$\begin{aligned}
 stg(x_p) &= \tan(\alpha_p) = \frac{\sin(\alpha_p)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_p)}} = \\
 &= \frac{\sin(\epsilon)}{brq(x_p)} = \\
 &= \frac{\sin(\epsilon)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\epsilon)}{brq(x_p)}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

- (d) Gleichung zur Lichtbahn:

$$r(t) = \int_0^t \frac{\sin(\epsilon)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\epsilon)}{\frac{x}{d}(br_{max} - 1) + 1}\right)^2}} dx$$

- (e) Vergleich der Ergebnisse von Teil (a) mit Teil (d): Aus Teil (a): Auftreffpunkt $Z(10$ cm| 6.51 cm). Aus Teil (d): Auftreffpunkt $Z(10$ cm| 8 cm)

Anschrift des Autors:

Alfred Vogelsanger,
Herbrigstrasse 4, CH-9011 St. Gallen,
a.vogels@bluewin.ch

Lagebeziehungen im \mathbb{R}^3

Untersuchungsmethoden mit dem Einsatz des Computer-Algebra-Systems DERIVE

Zwei Geraden im \mathbb{R}_3

Untersucht man die möglichen Lagebeziehungen der Geraden

$$g_1: \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{v}$$

so ergeben sich vier Möglichkeiten:

1. g_1 windschief zu g_2
2. g_1 schneidet g_2 in P
3. g_1 verläuft parallel zu g_2
4. g_1 ist gleich g_2

Algebraisches Untersuchungsverfahren

Verwendet man ein Computeralgebrasystem so ist ein einheitlicher Algorithmus erstrebenswert, der alle Fälle bearbeiten kann, ohne auf Zwischenergebnisse reagieren zu müssen. Da zur Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden nur lineare Gleichungssysteme zu untersuchen sind, kann man mit DERIVE oder einem anderen CAS dieses sonst mühevollen und zeitaufwendige Verfahren schnell und effektiv durchführen. Die Gleichsetzung der Geradenterme führt zu folgendem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ku_1 - tv_1 &= -a_1 + b_1 \\ ku_2 - tv_2 &= -a_2 + b_2 \\ ku_3 - tv_3 &= -a_3 + b_3 \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} u_1 & -v_1 & -a_1 + b_1 \\ u_2 & -v_2 & -a_2 + b_2 \\ u_3 & -v_3 & -a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix kann unterschiedlich interpretiert werden. Entweder als (erweiterte) 3×2 Matrix zum inhomogenen Gleichungssystem

$$k \cdot \vec{u} + t \cdot (-\vec{v}) = -\vec{a} + \vec{b} \quad \text{mit drei Gleichungen und zwei Variablen,}$$

oder aber als Matrix zum homogenen 3×3 Gleichungssystem

$$k \cdot \vec{u} + t \cdot (-\vec{v}) + r \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

Für die rechnerische Behandlung spielen die Interpretationen keine Rolle. Die zusätzliche Nullspalte kann man sich dazu denken.

Eine Bearbeitung der obigen Matrix mit dem DERIVE-Befehl ROW_REDUCE, der Matrizen mit einem erweiterten Gauß-Algorithmus in ihre Standard-Endform transformiert, liefert nun folgende Resultate:

1. Sind die Geraden windschief, lautet die

resultierende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schneiden sich die Geraden, ist das Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Verlaufen g_1 und g_2 parallel, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Handelt es sich nur um eine Gerade, erscheint

folgende Lösungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht für * eine durch den Gauß-Algorithmus entstandene Zahl.

Zur Interpretation der Ergebnisse:

- Zu 1. Fasst man die Matrix als Darstellung eines homogenen 3×3 Gleichungssystems auf, so gibt es eine eindeutige Lösung mit dem Lösungselement $(0/0/0)$. D.h. die drei Vektoren \vec{u} , $-\vec{v}$, und $-\vec{a} + \vec{b}$ sind linear unabhängig und erzeugen den gesamten \mathbb{R}^3 . Die beiden Geraden sind also windschief.

Eine Interpretation der Matrix als erweiterte Matrix eines inhomogenen 3×2 Gleichungssystems zeigt die Nichtlösbarkeit in der letzten Zeile $[(0 \ 0 \ 1) \text{ d.h. } 0 = 1]$ und damit auch, dass die Geraden windschief sind.

- Zu 2. Die Tatsache, dass die letzte Zeile $(0 \ 0 \ 0)$ lautet, zeigt, dass unser Gleichungssystem nur zwei Dimensionen benötigt. Das System stellt demzufolge eine Ebene dar (der Lösungsraum des homogenen 3×3 Gleichungssystems ist eindimensional, und die drei Vektoren sind linear abhängig).

Betrachtet man nun die beiden ersten Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad \text{und fasst sie als inhomogenes } 2 \times 2$$

Gleichungssystem auf, so ist dies eindeutig lösbar mit den Lösungselementen, die in der letzten Spalte stehen. Unser Gleichungssystem hat also eine eindeutige Lösung in der Ebene. Daraus folgt, dass unsere Geraden sich schneiden. Den Ortsvektor des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen der Lösungselemente für k und t in die Gleichungen von g_1 bzw. g_2 .

- Zu 3. Die erste Interpretation ist gleich dem 2. Fall, das System benötigt nur zwei Dimensionen. Hier lauten aber die ersten beiden

$$\text{Zeilen } \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Und damit ist das inhomogene } 2 \times 2$$

Gleichungssystem nicht lösbar wegen der letzten Zeile $[(0 \ 0 \ 1) \text{ d.h. }]$ Die beiden Geraden müssen also in einer Ebene parallel verlaufen.

- Zu 4. Die reduzierte Matrix zeigt, dass wir mit einer Dimension auskommen; deshalb müssen die beiden Geraden identisch sein.

Lagebeziehungen im R³

Weitere Lagebeziehungen im R₃

Mit demselben Verfahren lassen sich auch die Lagebeziehungen von Punkt und Ebene, Gerade und Ebene sowie von zwei Ebenen leicht untersuchen.

Da der TI-92 Plus hier mit demselben Lösungsalgorithmus arbeitet (es ist nur der ROW_REDUCE Befehl von DERIVE durch den RREF Befehl im TI-92 zu ersetzen) können die Inhalte des Artikels mit beiden Systemen erarbeitet werden.

Hinweis:

Dieser Aufsatz ist die gekürzte Fassung eines gleichlautenden Beitrags aus der Feder des Autors. Die Originalfassung kann auf der TI-Materialienseite (education.ti.com/Deutschland/Materialien.htm) in der Rubrik TI-92/Lin.Algebra eingesehen und herunter geladen werden.

Autor:

Heinz Laakmann
 Agathastraße 20, D-48167 Münster
 hlaakmann@t-online.de

Karl-Heinz Keunecke

CBR: Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 1)

Einleitung

Abstandsmessung mit Ultraschall ist für den Physikunterricht inzwischen ein gängiges und vielseitig einsetzbares Messverfahren. Das CBR™ (Computer Based Ranger) ist eines dieser Geräte zur Bestimmung von Abständen. In Verbindung mit den Rechnern TI-83 bis TI-92 Plus ist es ein Messsystem, das flexibel an vielen Orten auch außerhalb des Physikraumes eingesetzt werden kann. Das Verfahren ist ausgereift, einfach zu handhaben und lässt sich in den meisten Fällen problemlos auch in Schülerexperimenten einsetzen. Gerade die Einfachheit verführt dazu, das System wie eine mechanisches Maßband zu verwenden. Es ist zuweilen aber doch erforderlich, sich in das Gedächtnis zu rufen, dass es sich um die Laufzeitmessung eines von dem Beobachtungsobjekt reflektierten Ultraschallimpulses handelt. Nicht immer wird das „richtige“ Echo für die Messung benutzt und so können sich dann falsche Abstände ergeben.

Im Folgenden werden Beispiele dargestellt, bei denen die Entfernungsanzeige auf dem Rechner nicht mit dem beobachteten Vorgängen übereinstimmen, die Ursachen erläutert und Vorschläge zur Abhilfe gemacht.

Messungen

Fall 1: Häufig beginnt man zur Einführung in das Messen mit dem CBR, Abstände zur Decke, zum Boden oder zur Wand bestimmen zu lassen. Im Weg-Zeit-Diagramm wird dann eine Parallele zur T-Achse erwartet, deren Abstand von der T-Achse gleich der gesuchten Distanz ist. Es können aber auch völlig andere s-t-Diagramme entstehen auftreten, wie z.B. in Abb. 1 gezeigt wird. Mit Hilfe der Trace-Funktion wird für die erste Messung ($x_c = 0$) der Abstand $y_c = 2,067\text{m}$ gemessen. In Abb. 2 ist das gleiche Weg-Zeit-Diagramm zu sehen und dort liest man für $x_c > 0$ die Distanz $0,501\text{m}$ ab.

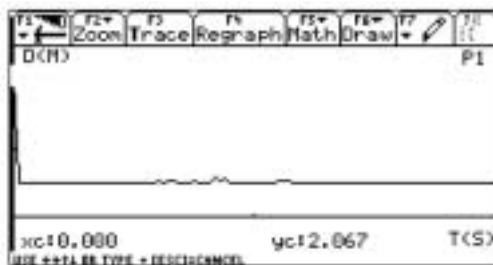


Abb. 1

Abstandsmessung, Messdauer 2s.

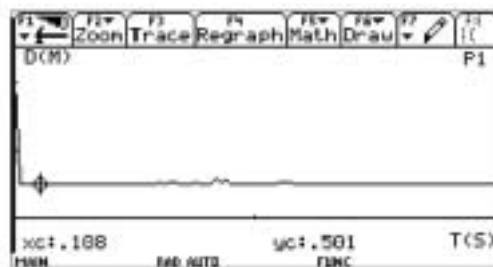


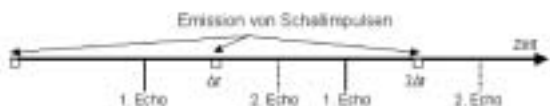
Abb. 2

Abstandsmessung, Messdauer 2s.

Es zeigt sich, dass der 1. Messwert ($x_c = 0$) den korrekten Abstand angibt, während die Werte für $x_c \neq 0$ deutlich zu klein sind. Um diese Darstellungen zu verstehen, muss man sich den Messvorgang im Detail klarmachen. Offensichtlich wird der erste Impuls, der von dem CBR ausgesendet wird, nach der Reflexion an der Decke wieder vom dem CBR empfangen und aus der Laufzeit der richtige Abstand berechnet. Nach der Zeit Δt wird der zweite Impuls emittiert. Da die zugehörige Zeitmessung nun zu einem wesentlich kleineren Abstand führt, muss vor dem vom Boden reflektierten Impuls ein weiteres Schallsignal beim CBR eingetroffen sein, was eine kürzere Laufzeit vortäuscht. Dieser Vorgang wiederholt sich danach mit großer Konstanz, wie man aus den Abbildungen erkennt.

CBR: Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 1)

Es lässt sich nun zeigen, dass der Störpuls durch eine zweite Reflexion des Schallsignals zwischen Decke und Tischoberfläche, auf der das CBR liegt, verursacht wird. Dies geschieht nur, wenn Decke und Tisch gute Reflektoren sind und ihr Abstand nicht zu groß ist, weil sonst die Amplitude des Signals zu gering geworden ist. Die Darstellung auf der Zeitachse verdeutlicht die Reihenfolge der Signale.



Durch eine Rechnung kann man den Vorgang auch quantitativ erfassen. Im Programm ranger() wählt man die Messdauer, in diesem Falle 2s aus. Da mit dieser Software stets 94 Messungen durchgeführt werden, beträgt die Wiederholzeit der Schallemission

$$\Delta t = \frac{2}{94} \text{ s} . \text{ Das Schallsignal benötigt die Zeit } t_a = \frac{2h}{c} ,$$

um die Strecke 2h zwischen Tisch und Decke hin und zurück zu durchlaufen. Das zweite Echo ist dann nach der doppelten Zeit 2t_a wieder beim CBR eingetroffen. Für das CBR liegt dann eine Laufzeit von 2t_a - Δt vor. Daraus wird dann die Distanz

$$d = \frac{1}{2} c \cdot (2t_a - \Delta t) = \frac{1}{2} \cdot 330 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2,07}{330} - \frac{2}{94} \right) \text{ m} = 0,63 \text{ m} \text{ berechnet.}$$

Dies stimmt mit dem in Abb.1 gezeigten Abstand von 0,5 m recht gut überein.

Eine Besonderheit stellt das s-t-Diagramm in Abb3. dar.

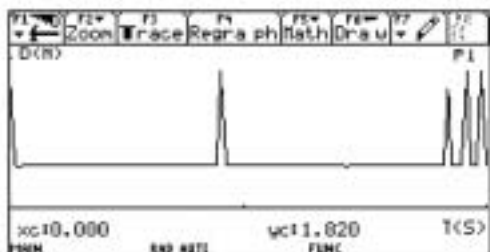


Abb. 3

Abstandsmessung, Messdauer 2s.

Dort ist das Signal der zweiten Reflexion in 4 Fällen zu schwach, um vom CBR empfangen zu werden. In genau diesen Fällen wird die korrekte Distanz von Decke und Tisch gezeigt, sonst nicht.

Fall 2: Es soll das Weg-Zeit-Diagramm eines frei fallenden Körpers bestimmt werden. Dazu ist das CBR an der Decke montiert. Der Abstand zum Boden beträgt 2,07 m, als Messzeit wird 1s gewählt. Somit beträgt die Wiederholzeit der Schallimpuls $\Delta t = \frac{1}{94} \text{ s}$. In diesem Zeitintervall können nur Echos von Gegenständen eintreffen, die höchstens 1,75 m vom CBR entfernt sind. Damit kann der Fall nicht bis zum Boden beobachtet werden. Es können aber bereits weit vor dem kritischen Abstand von 1,75 m Störungen auftreten, wie Abb.4 und 5 zeigen. Offensichtlich kann unter den vorliegenden Bedingungen der Fallkörper nur bis höchstens ca. 1,3 m beobachtet werden.

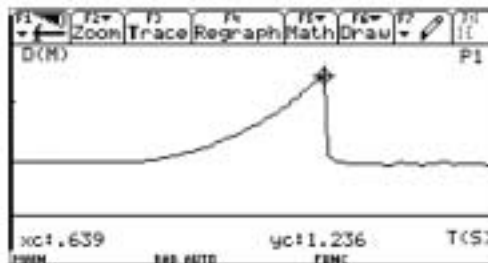


Abb. 4

Fallversuch, Störung durch Bodenecho.

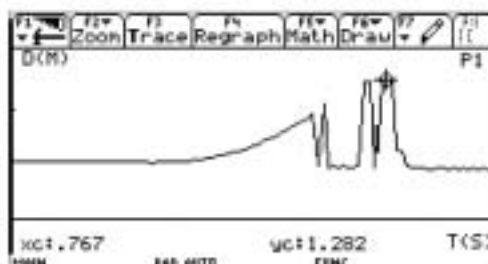


Abb. 5

Fallversuch, Störung durch Bodenecho.

Laufzeituntersuchungen ergeben, dass das Bodenecho eigentlich überhaupt keine korrekte Messung zulassen dürfte, denn es trifft jeweils von der zweiten Messung an nach

$$t_a - \Delta t = \frac{2 \cdot 2,07}{330} - \frac{1}{94} = 0,00191 \text{ s} \text{ beim CBR ein und beendet die}$$

Laufzeitmessung. Es müsste dann eine Distanz von 31 cm angezeigt werden. Das ist offensichtlich nicht der Fall. Trotzdem ist das Bodenecho für die Verkürzung des beobachtbaren Fallweges zuständig. Man kann es z.B. durch schalldämpfende Materialien wie eine Wolldecke so weit schwächen, dass es vom CBR nicht mehr wahrgenommen wird. Dann erhält man das Weg-Zeit-Diagramm von Abb.6, indem der Fallweg in Übereinstimmung mit den anfänglichen Überlegungen bis 1,78 m aufgezeichnet wird. Danach trifft dann kein Echo mehr beim CBR ein.

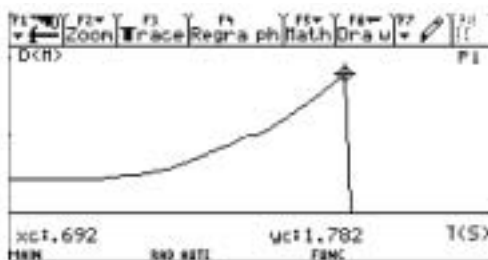


Abb. 6

Fallversuch, 1s, ohne Bodenecho.

Eine Erklärung für die Messungen von Abb.4 und 5 liefern Experimente mit verschiedenen Fallkörpern. Die beobachtete Messgrenze ist abhängig von Form und Größe des Fallkörpers und auch von der Positionierung unter dem CBR. Zu Beginn der Messung wird der Fallkörper – häufig ein größerer Ball – in ca. 50 cm Abstand unter das CBR gehalten. In diesen Fall trifft der in einem Winkel von ±10° abgestrahlte Schall ausschließlich auf den Ball, so dass kein Bodenecho möglich ist. Je weiter sich der Körper vom CBR entfernt, desto eher ist es

CBR: Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 1)

möglich, dass der Schall am Körper vorbei auf den Boden trifft und dort reflektiert wird. Von einer bestimmten Entfernung an wird dann nur noch das Bodenecho vom CBR aufgenommen wie in Abb.4. In Abb.5 konnte der Schall schon in einer früheren Phase zeitweilig am fallenden Körper vorbei zum Boden gelangen. Beide Diagramme zeigen nach 1,3 m einen Abstand von ca. 50 cm, der doch erheblich von der berechneten Distanz von 31 cm abweicht. Als Erklärung bietet sich an, dass das 2. Echo mit der doppelten Distanz für den Messwert verantwortlich ist. Vermutlich liegt aber der Grund darin, dass das CBR Laufzeiten, die zu Distanzen von 0cm bis ca. 45 cm gehören, nicht auswerten kann. Dies wird in Abb.7 demonstriert.

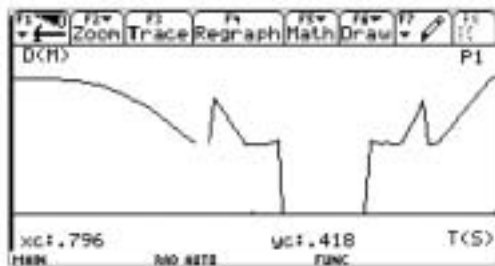


Abb. 7

Abstandsmessung 75cm bis 0cm.

Ein Gegenstand wird von 75 cm bis an die Oberfläche des CBR und wieder zurückgeführt.

Von 0,75 m bis 0,418 m wird der Abstand korrekt angezeigt. Für geringere Distanzen werden keine sinnvollen Längen ausgerechnet und auch nicht angezeigt. Beim Entfernen vom CBR gibt es wieder ab 0,42 m eine auswertbare Anzeige. Deshalb kann das CBR auch die zu 31 cm gehörende Laufzeit nicht korrekt messen und umrechnen.

Wie können die Störungen bei der Abstandsmessung vermieden werden?

1. Vermeidung von störenden Echos durch Schalldämmung oder durch Reflexion in andere Richtungen (geneigter Boden o.ä.)
2. Auswahl der richtigen Form des beobachteten Körpers oder eines geeigneten Reflektors. Ebene, glatte Flächen reflektieren den Schall möglicherweise in die falsche Richtung. Kugelförmige Oberflächen reflektieren den Schall immer auch direkt zurück. Kann man die Form nicht beeinflussen, so sollte versucht werden, die Oberfläche so zu verändern, dass eine diffuse Reflektion auftritt.
3. Auswahl einer Messzeit, die länger ist als die Laufzeit des zweiten Echos. (Z.B. 3s für den Versuch zu Abb.1 und 2.) Es wird empfohlen, vor der eigentlichen Messung statische Abstandsmessungen für den größten, den kleinsten Abstand und sogar einen Abstand dazwischen durchzuführen.

Zusammenfassung:

Bei den meisten Abstandsmessungen kommt man ohne Kenntnis der beschriebenen Abweichungen von den erwarteten Ergebnissen und der angegebenen Vorsichtsmaßnahmen aus. Trotzdem ist es möglicherweise hilfreich, auf Probleme dieser Art vorbereitet zu sein, weil die Erklärungen nur schwerlich spontan im Unterricht gefunden werden können.

Andererseits ist es sicherlich auch sinnvoll, einen Physikkurs mit diesen Ergebnissen zu konfrontieren und Schülerinnen und Schüler nach Erklärungen suchen zu lassen.

Autor:

Dr. Karl-Heinz Keunecke
Gorch-Fock-Str. 2, D-24159 Kiel
kh.keunecke@t-online.de

TI Key Fonts

Wenn Sie Arbeitsblätter professionell und einfach gestalten möchten, empfehlen wir Ihnen die TI-Key Fonts!

Mit den TI-Key-Fonts (True Type Fonts) können Sie Arbeitsblätter schnell und ansprechend gestalten. Die Funktionstasten der verschiedenen Rechnermodelle können als Sonderzeichen in den Text eingefügt werden.

Laden Sie TI-Key Fonts auf Ihren Rechner:
<ftp://ftp.ti.com/pub/graph-ti/sw-apps/fonts/>

Rekonstruktion einer Funktion

Numerische Berechnung der Fourierkoeffizienten

1. Grundlagen:

Ein bestimmtes Integral kann durch eine Summe von Rechteckflächen angenähert werden. Es gilt:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^q f(x_i)$$

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten ergibt sich:

Man unterteilt das Intervall $[0, T]$ in q gleichlange Intervalle mit der

Länge $\Delta t = \frac{T}{q}$. Die Funktionswerte $f(t_m)$ können am rechten

Intervallrand mit $t_m = 0 + \frac{m \cdot T}{q}$ (für $m=1..q$) bzw. in der Inter-

vallmitte mit $t_m = 0 + \frac{(2m-1) \cdot T}{2}$ (für $m=1..q$) berechnet werden.

(Natürlich könnte man auch die Funktionswerte am linken Intervallrand berechnen.)

Fourier-Reihe in der Sinus-Kosinus-Form:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q f(t_m)$$

$$a_n = \frac{2}{q} \sum_{m=1}^q f(t_m) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t_m) \text{ mit } t_m = 0 + \frac{m \cdot T}{q}$$

$$b_n = \frac{2}{q} \sum_{m=1}^q f(t_m) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t_m)$$

Die Reihe ist bis zur n -ten Oberwelle dargestellt. Daher sind $(2n+1)$ Koeffizienten zu bestimmen. Dies bedeutet wiederum, dass mindestens $(2n+1)$ Funktionswerte bzw. Abtastungen erforderlich sind. Das heißt, dass für eine Reihe mit n Oberwellen mindestens $(2n+1)$ Unterteilungen ($q \geq 2n+1$) erforderlich sind bzw. für die Ordnung n der Oberwelle, die man durch q Abtastungen darstellen kann, die

Beziehung $n \leq \frac{q-1}{2}$ gilt.

2. Beispiel:

Von einer Funktion, die in Abständen von $\Delta t = \frac{2\pi}{7}$

abgetastet wurde, kennt man die Funktionswerte:
 0,64 ; 1,23 ; 0,125 ; -0,125 ; -1,222 ; -0,64 ; 0

Ermittle mit Hilfe einer Fourier-Reihe die Funktionsgleichung und das Amplitudenspektrum.

Zunächst werden die Funktionswerte als Zeilenvektor eingegeben und unter fm abgespeichert.

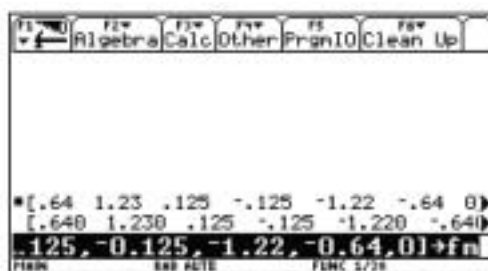


Abb. 1

Berechnung von a_0 :

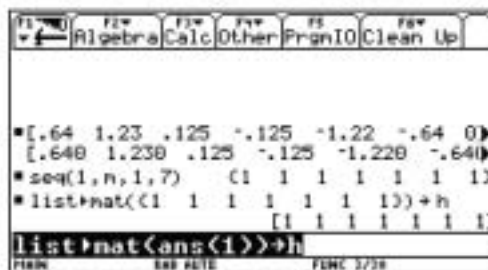


Abb. 2



Abb. 3

Die Summenbildung erfolgt über das Skalarprodukt. Daher benötigen wir einen Hilfsvektor h , der aus lauter Einsen besteht. Diesen erzeugt man mit dem Seq-Befehl und wandelt anschließend die Liste in einen Vektor um, der unter h abgespeichert wird.

Die Anzahl der Abtastungen wird unter q abgespeichert. Zum Schluss berechnet man a_0 mit Hilfe des Skalarproduktes.

Rekonstruktion einer Funktion

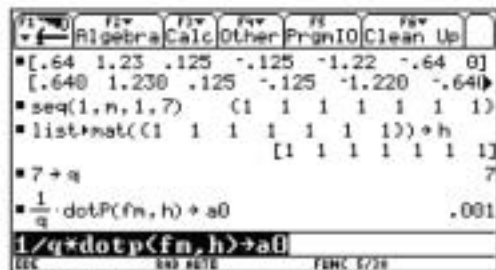


Abb. 4

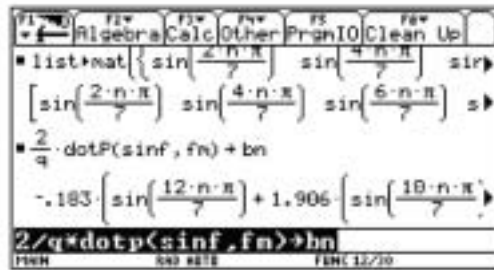


Abb. 8

Berechnung von a_n :

Die Berechnung der Koeffizienten b_n erfolgt analog.

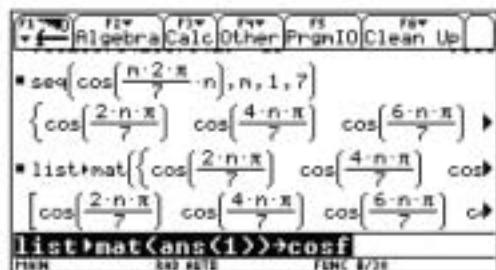


Abb. 5

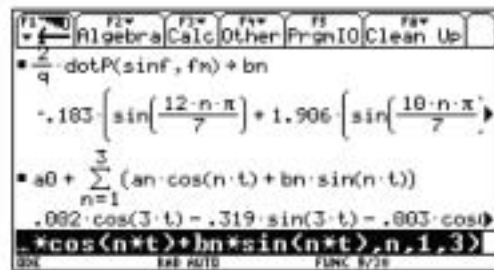


Abb. 9

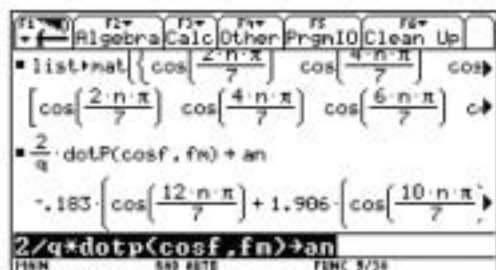


Abb. 6

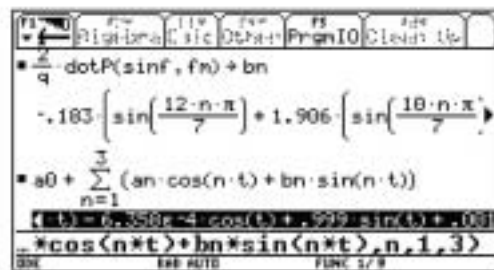


Abb. 10

Für die Berechnung der Koeffizienten a_n wird zunächst eine Liste der Kosinusfunktionen erstellt und in einen Vektor umgewandelt, der unter *cosf* abgespeichert wird. Danach bildet man das Skalarprodukt der Vektoren der Funktionswerte *fn* und der Kosinusfunktionen *cosf* und multipliziert es mit $2/q$ und speichert es unter *an* ab.

Zum Schluss errechnet man sich die Fourier-Reihe bis zur Ordnung 3. Vernachlässigt man die Koeffizienten die kleiner als $1/100$ sind, so kommt man zu folgender Fourier-Reihe:

$$f(t) = -0,32\sin(3t) + 1,00\sin t$$

Berechnung von b_n :

Grafische Darstellung:

Gibt man die Datenpunkte in den Daten-Editor und die ermittelte Fourier-Reihe in den y-Editor ein, so erhält man die dargestellte Graphik.

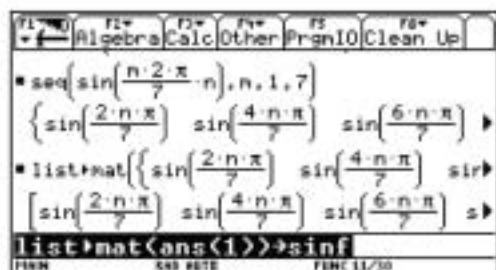


Abb. 7

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
2	$4\pi/7$	1.2308			
3	$6\pi/7$	-.1250			
4	$8\pi/7$	-.1250			
5	$10\pi/7$	-1.220			
6	$12\pi/7$	-.6408			
7	2π	0			
8					

Abb. 11

Rekonstruktion einer Funktion

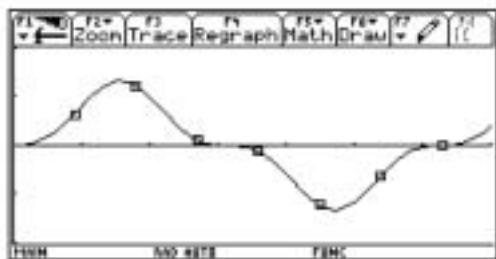


Abb. 12

Amplitudenspektrum

Das Amplitudenspektrum gibt Informationen über die Größe der Amplituden in Abhängigkeit der Frequenz. Allerdings kann man aus dem Amplitudenspektrum keine Rückschlüsse auf die Funktion schließen. Für die Darstellung am TI-92 Plus wählt man die Parameterdarstellung. Im y-Editor gibt man bei xt die Ordnung und bei yt die Amplitudenwerte ein. Weiters aktiviert man bei Style (F6) Square. Mit F7 Line zeichnet man die Amplituden ein.

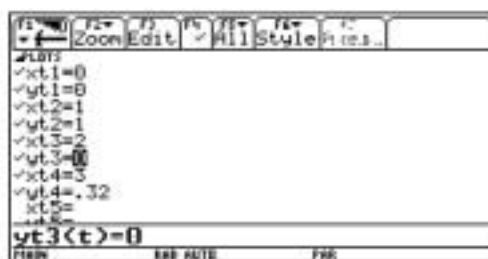


Abb. 13

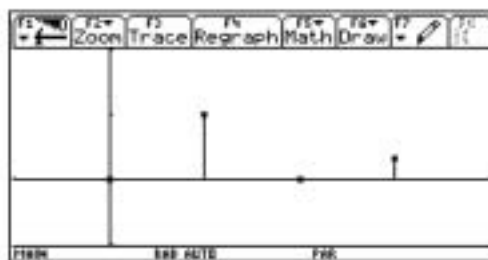


Abb. 14

Autor:

Dr. Gerald Kaiser
 Paulahofsiedlungsstrasse E3, A-8600 Oberaich
 Gerald.Kaiser@HTL-Kapfenberg.ac.at

Tipps und Tricks: Umlaute mit dem TI-89/92 Plus

Bei deutschen Texten sind Umlaute beinahe nicht zu umgehen. Sei es für Eingabeaufforderungen bei Programmen oder bei Kommentaren in Skripts. Der TI-89 und der TI-92 Plus bietet unterschiedliche Möglichkeiten für den Abdruck von Umlauten an.

Das CHAR Menü

Im CHAR Menü, das bei beiden Rechnern mit $\text{2nd} + \text{+}$ erreicht wird, findet man unter 5 : **International** ein Untermenü aus dem weitere Untermenüs aufgerufen werden können. Daraus können Sonderbuchstaben der unterschiedlichsten Art ausgewählt werden.

So findet man das kleine „ä“ mit $\text{2nd} + \text{5} + \text{1} + \text{A}$ oder ein großes „Ö“ mit $\text{2nd} + \text{5} + \text{4} + \text{9}$. Bei Licht betrachtet ein etwas umständliches Verfahren, insbesondere, weil man im letzten Menü bis zu 15 Varianten durchsuchen muß.

Der Nachteil wird (zum Teil?) dadurch ausgeglichen, dass das Verfahren universell, d.h. für den TI-89 und für den TI-92 Plus in gleicher Weise verwendet werden kann.

Die Tastatur (beim TI-92 Plus)

Der TI-92 Plus (und ebenso das Vorläufermodell ohne „Plus“) bietet einen einfacheren und vor allem leicht merkbaren Weg an.

Die Tastenkombination $\text{2nd} + \text{U}$ bereitet auf die Eingabe von Umlauten (merke: U entspricht U mlaut!) vor. Ein nachfolgendes A erzeugt damit den Kleinbuchstaben „ä“, ein nachfolgendes $\text{I} + \text{O}$ ruft entsprechend ein großes „Ö“ hervor.

Das heißt, statt fünf Tastendrucke, mit evtl. umständlichem Suchen, reichen 3 oder 4 Tasten, wenn man die Eselsbrücke „ U mlaut“ verinnerlicht hat.

Ähnlich leicht zu merken sind die griechischen Buchstaben. Sie erfordern nur das Präfix $\text{2nd} + \text{G}$ (für G riechisch).

Für das (nach der Rechtschreibreform bald aussterbende) „scharfe s“ bietet sich einfach $\text{2nd} + \text{G}$ an. Deutlich einfacher als $\text{2nd} + \text{5} + \text{6} + \text{7}$! Diese Methode kann entsprechend auf andere Akzentzeichen ausgedehnt werden. Genauere Beschreibungen finden sich im TI-89/92 Plus Handbuch im Kapitel 18, auf S. 323-326.

Eine Schnellastentastenkombination zum Auffinden der „versteckten“ Zeichen ist $\text{2nd} + \text{K}$ (für K eyboard). Der TI-89, mit wesentlich weniger so zugänglichen Zeichen verlangt hier $\text{2nd} + \text{EE}$.

W. Pröpper
 Josef-Simon-Str. 59, D-90473 Nürnberg
 w.proepper@wpro.franken.de

Service auf einen Blick

Innovative Technologie



Dank der Flash-Technologie unserer Graphikrechner TI-83 Plus, TI-83 Plus *Silver Edition*, TI-89, TI-92 Plus und Voyage™200 (verfügbar voraussichtlich ab Juni 2002) können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Taschencomputer einschließlich Zubehör testen?
– Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!



Unterrichtsmaterialien

Zum Einsatz unserer Graphikrechner haben wir Unterrichtsmaterialien entwickelt, die Sie bei der Vermittlung der Lehrinhalte unterstützen. Über 60 Titel erhältlich!



Lehrerfortbildungen

Graphikrechner sind für viele Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen, auch an Ihrer Schule! Anruf genügt!
Tel: +49 (251) 51038-0;
E-Mail: t3info@uni-muenster.de



CBL 2™/CBR™

Portables, universell einsetzbares Messwert-erfassungssystem für den naturwissen-schaftlichen Unterricht. Über 40 zusätzli-che Sensoren erhältlich. Kompatibel zu allen TI-Graphikrechnern.



TI-GRAPH LINK™

Die Verbindung zu Computer, Drucker und Internet. Liegt allen TI-Rechnern und Taschencomputern bei. Der TI-83 Plus ist auf Nachfrage auch ohne TI-Graph Link erhältlich.



TI ViewScreen™

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen und Over-headprojektor!



TI-Presenter™

Zur Projektion des Displays der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mittels Beamer oder Fernseher.



Allgemeine Informationen



Nehmen Sie mit unserem Customer Support Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da: Mo – Fr, 9.00 – 17.00 Uhr

TI-CSC c/o SITEL
Woluwelaan 158
B-1831 Diegem

Tel D: +49 (6196) 975015
Tel AT: +43 (1) 502910007
Tel CH: +41 (1) 2730688

Fax D: +49 (6196) 975044
Fax AT: +43 (1) 502910034
Fax CH: +41 (22) 7100036

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Taschencomputern:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Schulrechner bietet Texas Instruments 2 Jahre Austauschgarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser CSC an. Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden. Defekte Rechner bitte dem Händler Ihrer Wahl übergeben.

**education.ti.com/deutschland · education.ti.com/oesterreich · education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com**