

# TI-Nachrichten

Ausgabe 2/99

Benno Grabinger

## Mathematik in der Kaffeetasse

### 1. Problemstellung

Im Sommer sitze ich gerne mit einer Tasse Kaffee in der Hand auf der Terrasse. Steht die Sonne günstig, so läßt sich auf der Flüssigkeit manchmal eine helle Linie erkennen. (Abb. 1)



Abb. 1

Derselbe Effekt wird auch in gut polierten Edelmetalltöpfen in der Küche deutlich, falls eine geeignete Lichtquelle eingeschaltet ist.

- Wie kommt diese Erscheinung zustande?
- Gibt es eine mathematische Beschreibung für die Form der beobachteten Kurve?

Zur Beschreibung des Sachverhaltes eignet sich die Strahlenoptik. Eine weit entfernte Lichtquelle – wie etwa die Sonne – erzeugt parallele Lichtstrahlen. Fallen diese Strahlen auf eine reflektierende Fläche, wie das Innere einer Kaffeetasse, so werden die einfallenden Strahlen nach dem Gesetz der Gleichheit von Einfallswinkel und Reflexionswinkel reflektiert. In Abb. 2 ist der Verlauf eines solchen Strahls dargestellt.

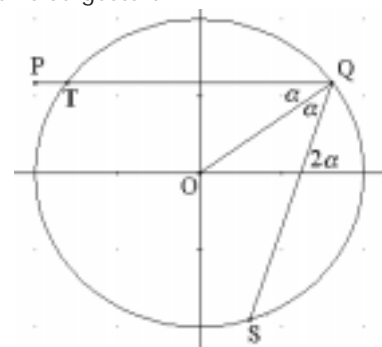


Abb. 2

Man betrachte die Punkte  $P(-r / r \sin(\alpha))$ ,  $T(-r \cos(\alpha) / r \sin(\alpha))$  und  $Q(r \cos(\alpha) / r \sin(\alpha))$  in Abb. 2.

Der Punkt S ergibt sich dann durch Spiegelung von T an der Geraden  $g(O, Q)$ .

Eine leichte Rechnung zeigt, daß S die Koordinatendarstellung  $S(-r \cos(3\alpha) / -r \sin(3\alpha))$  besitzt, denn das Dreieck OSQ ist gleichschenkelig mit Scheitel O.

Fortsetzung auf Seite 3

# Inhaltsverzeichnis

## Fachartikel

Grabinger: Mathematik in der Kaffeetasche . . . . .	1
Heinrich: Das erste Zentralabitur mit grafikfähigem Taschenrechner im Freistaat Sachsen . . . . .	5
Glöckler: Einsatz des TI-92 im MU der SI am Gymnasium . . . . .	8
Heitmeyer: Eine Methode zur Herleitung von Summenformeln . . . . .	11
Keunecke: Vorsicht bei Gleichungssystemen mit Parametern: rref() löst nicht alle! . . . . .	12
Kind: Zum empirischen Gesetz großer Zahlen . . . . .	14
Kleinfeld: Inverse Matrizen und Determinanten: Schüler verschicken verschlüsselte Nachrichten . . . . .	16
Niehoff: Vergleich numerischer Integrationsverfahren (2.Teil) . . . . .	19
Knechtel: Abituraufgabe Niedersachsen 1998 . . . . .	24
Noll: Funktionale Zusammenhänge mit Cabri Geometry II™ . . . . .	26
Rolfs: Transrapid – von Hamburg nach Berlin? . . . . .	29

## Informationen und Service

Inhaltsverzeichnis, Editorial . . . . .	2
Ideenbörse – Lehrer schreiben für Lehrer . . . . .	8
Konferenzen und Ausstellungen . . . . .	32
Service und Informationen . . . . .	32

# Editorial

## Liebe Lehrerin, lieber Lehrer,

in der aktuellen didaktischen Diskussion wird viel von einer veränderten Unterrichts- und Aufgabekultur gesprochen. Diese scheinbar neuen Begriffe spiegeln nichts weiter wider, als die bereits seit Jahrzehnten erhobenen und leider zuwenig beachteten Forderungen vieler Mathematiker, Didaktiker und – nicht zuletzt – Lehrer. Neu und verstärkt ins öffentliche Bewußtsein gerückt haben die hier vorgebrachten Vorstellungen unter anderem die vielzitierte TIMS-Studie, sowie die nachfolgenden BLK-Projekte zur Effizienzsteigerung im Mathematikunterricht und zum selbsttätigen Lernen und die in zahlreichen Bundesländern durchgeführten Tests. Um es frei mit SCHUPP zu sagen, zwingt aber auch der Computer, respektive der graphische und mehr noch der symbolische Taschenrechner, zum Nachdenken über Dinge, über die man auch ohne Computer schon lange hätte nachdenken müssen. (SCHUPP 1993)

Selbständiges, aktives und verantwortliches Lernen und Anwenden von Mathematik durch Schülerinnen und Schüler wird in diesem Zusammenhang ebenso genannt wie der verstärkte Einsatz kooperativer Lernformen und

die Zulassung alternativer Wege bei der Lösung eines Problems. Diese methodischen Veränderungen werden begleitet und unterstützt durch Aufgaben, die offener, komplexer und problemhaltiger sind als traditionelle. Das Modellieren von Realität und die innermathematischen Verknüpfungen führen zu einem vertieften inhaltlichen Argumentieren und Verstehen von Mathematik. Der Mathematikunterricht wird damit auch befreit vom steten Blick auf die nächste Klassenarbeit.

Lohnenswertes Ziel dieser Anstrengungen ist es, ein gültiges Bild der Vielschichtigkeit von Mathematik zu entwickeln: Mathematik als unentbehrliches Werkzeug zur Lebensbewältigung, als wertvolles menschliches Kulturgut und als Quelle von Freude und schöpferischer Freiheit.

Stephan Griebel  
Schulbeauftragter

## 2. Erste Experimente

Mit dem TI-92 kann der Verlauf eines Lichtstrahls von P über Q zum Punkt S leicht dargestellt werden. Mit je einem Line-Befehl können die Strecken PQ und QS gezeichnet werden. Dazu ist die Angabe eines konkreten Winkels  $\alpha$  erforderlich. Auch der Wert r des Kreisradius ist anzugeben. Im Beispiel ist  $\alpha=0.5$  und  $r=1$  gewählt worden. (Abb. 3)

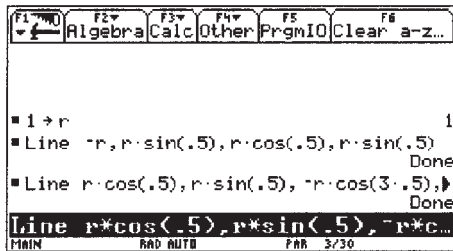


Abb. 3

Zeichnet man zuvor aus dem y-Editor heraus einen Kreis durch die Parameterdarstellung  $x_1=r \cos(t)$ ,  $y_1=r \sin(t)$ , so ergibt sich Abb. 4:

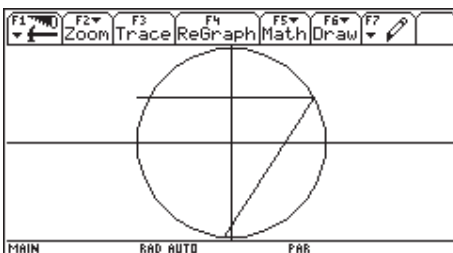
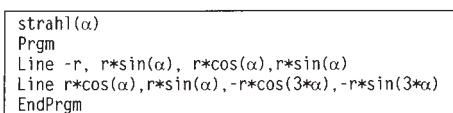


Abb. 4

Eine Prozedur „strahl“ zum Erzeugen von Strahlen für beliebige Winkel  $\alpha$  ist einfach:



Mehrfacher Aufruf dieser Prozedur mit unterschiedlichen Werten für  $\alpha$  liefert Abb. 5.

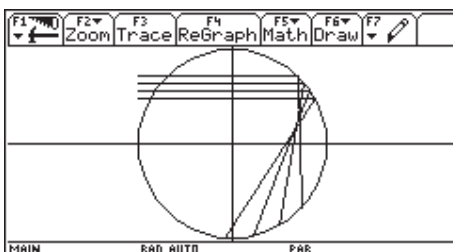


Abb. 5

## 3. Simulation

Um die mühsamen Einzelaufrufe der Prozedur „strahl“ zu vermeiden wird nun eine Prozedur „katakaustik“ benutzt, welche die Konstruktion für eine ganze Reihe von Strahlen ausführt (Abb. 6).

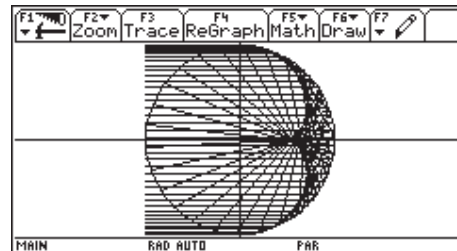
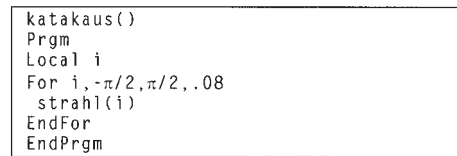


Abb. 6

Die Experimente mit dem TI-92 führen zu der Vermutung, dass die Gesamtheit der reflektierten Strahlen die beobachtete Erscheinung in der Kaffeetasse, die sogenannte Katakaustik, erzeugen.

## 4. Approximation der Grenzlinie

Die Abbildung 6 läßt vermuten, daß die Schnittpunkte der reflektierten Strahlen die gesuchte Grenzlinie bilden. Um dies weiter zu untersuchen werden die Schnittpunkte benachbarter Geraden ermittelt. Dazu muß zunächst die Gleichung für einen reflektierten Strahl aufgestellt werden: Für den in  $Q(r \cos(\alpha) / r \sin(\alpha))$  reflektierten Strahl (Abb. 2) ergibt sich die Gleichung in Punkttrichtungsform:

$$\frac{y - r \sin(\alpha)}{x - r \cos(\alpha)} = \tan(2\alpha).$$

Die rechte Seite der Gleichung wird mit „tcollect“ zu 
$$\frac{-(\sin(\alpha)r - \sin(2\alpha)x)}{\cos(2\alpha)}$$

vereinfacht. Durch diesen Term wird die Funktion  $f(x, \alpha)$  erklärt (Abb. 7).

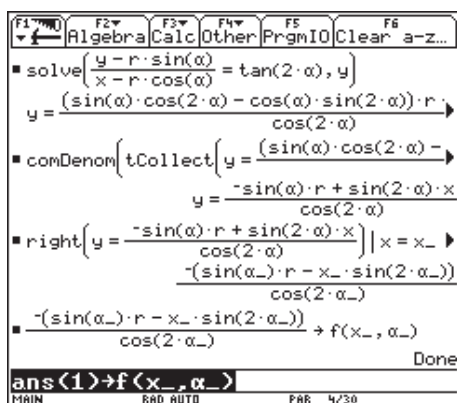


Abb. 7<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Die Umdeklarierung der Variablen x und alpha ist wegen eines sonst in Abb. 8 auftretenden „Circular Definition Errors“ erforderlich. Beim TI-92 Plus entfällt dies.

(Bei diesen Umformungen sollte man sich, auch um Tippfehler zu vermeiden, bei jedem Schritt der „ans(1)“ Funktion bedienen.)

Benachbarte Geraden ergeben sich in der Geradenschar  $f(x, \alpha)$  durch nahe beieinander liegende Werte des Parameters  $\alpha$ .  $f(x, \alpha)$  und  $f(x, \alpha + \delta)$  stellen in diesem Sinne benachbarte Geraden dar, wenn  $\delta$  möglichst klein ist.

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden, die zu den Parametern  $\alpha$  und  $\alpha + \delta$  gehören, erhält man durch Auflösen der Gleichung  $f(x, \alpha) = f(x, \alpha + \delta)$  nach x (Abb. 8).

```

solve(f(x, alpha) = f(x, alpha + delta), x)
x = (sin(alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta))) / (sin(2 * alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta)))
solve(f(x, alpha) = f(x, alpha + delta), x)
MAIN          RAD AUTO          PAR 1/30
  
```

Abb. 8

Für das weitere Vorgehen ist es von Vorteil dieses Ergebnis in eine Funktion „xwert(alpha)“ zu kopieren, die dann den zum Winkel  $\alpha$  gehörenden x-Wert des Schnittpunktes „benachbarter“ Geraden liefert.

```

xwert(alpha)
Func
(sin(alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta))) / (sin(2 * alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta)))
EndFunc
  
```

Den zugehörigen y-Wert dieses Punktes erhält man mit der Funktion „ywert(alpha)“

```

ywert(alpha)
Func
f(xwert(alpha), alpha)
EndFunc
  
```

Als Erfolg dieser Anstrengungen lässt sich der ungefähre Verlauf der Grenzlinie zeichnerisch darstellen, wenn die Schnittpunkte für verschiedene Werte von  $\alpha$  gezeichnet werden. Aufruf der Prozedur „punkte“ wenn  $r=1$  und  $\delta=0,05$  leistet das Gewünschte (Abb. 9).

```

punkte()
Prgm
Local i
For i, -pi/2, pi/2, .05
PtOn xwert(i), ywert(i)
EndFor
EndPrgm
  
```

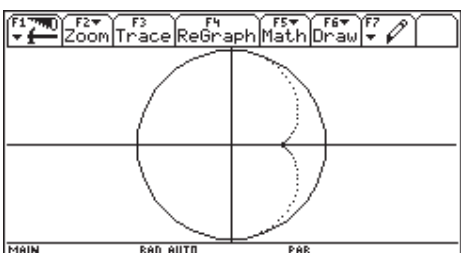


Abb. 9

## 5. Allgemeine Lösung

Die gesuchte Kurve besteht aus den Schnittpunkten von je zwei „benachbarten“ Geraden der Schar der reflektierten Strahlen.

Der Schnittpunkte zweier Geraden, die sich im Parameter um  $\delta$  unterscheiden, wurde in Abschnitt 4 bereits als Lösung der Gleichung  $f(x, \alpha) = f(x, \alpha + \delta)$  bestimmt. Für die exakte Lösung ist zu berücksichtigen, dass die Geraden sich beliebig wenig im Parameter unterscheiden sollen. Die gesuchte Kurve ist deshalb die Menge der Grenzlagen der Schnittpunkte jeder Geraden mit einer benachbarten Geraden.

Es ist also  $\lim_{\delta \rightarrow 0} x$  zu bilden, wobei x die zuvor berechnete Lösung von  $f(x, \alpha) = f(x, \alpha + \delta)$  ist.

Diese Berechnung liefert für x den Ausdruck  $\frac{3r \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \cos(3\alpha)}{4}$  (Abb. 10).

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
(sin(alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta))) / (sin(2 * alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta)))
lim((sin(alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta))) / (sin(2 * alpha) * cos(2 * (alpha + delta)) - cos(2 * alpha) * sin(2 * (alpha + delta))), delta, 0)
Limit(Ans(1), delta, 0)
MAIN          RAD AUTO          PAR 7/30
  
```

Abb. 10

Die y-Komponente ergibt sich durch Einsetzen der gefundenen x-Koordinate in  $f(x, \alpha)$  (Abb. 11).

```

tCollect(f(-(cos(3 * alpha) - 3 * cos(alpha)) * r), alpha)
tCollect(f(-(sin(5 * alpha) - 3 * sin(3 * alpha) + 4 * sin(alpha)) * r / (8 * cos(2 * alpha))), alpha)
tCollect(f(Ans(1)), alpha)
MAIN          RAD AUTO          PAR 8/30
  
```

Abb. 11

Damit hat man das gesuchte Endergebnis erhalten, das zur Bestätigung noch graphisch dargestellt wird (Abb. 12 und 13).

```

APLOTS
x1=r*cos(t)
y1=r*sin(t)
x2=-(cos(3*t)-3*cos(t))/4
y2=-(sin(5*t)-3*sin(3*t)+4*sin(t))/(8*cos(2*t))
xt3=
yt3=
xt4=
xt3(t)=
MAIN          RAD AUTO          PAR
  
```

Abb. 12

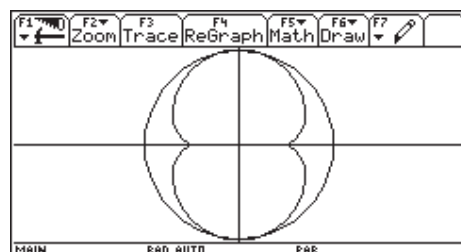


Abb. 13<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Man sieht sogar, daß mit Hilfe der Mathematik die Sonne von zwei Seiten scheinen kann!

## 6. Anhang

Der Term für die y-Komponente kann die viel einfachere

Form  $y = \frac{3r \cdot \sin(\alpha)}{4} - \frac{r \cdot \sin(3\alpha)}{4}$  annehmen.

Dann läßt sich die Parameterdarstellung der Grenzkurve in der folgenden schönen symmetrischen Form schreiben:

$$x = \frac{3r \cdot \cos(\alpha)}{4} - \frac{r \cdot \cos(3\alpha)}{4}, \quad y = \frac{3r \cdot \sin(\alpha)}{4} - \frac{r \cdot \sin(3\alpha)}{4}$$

Diese Kurve ist unter dem Namen **Nephroide** bekannt. Leider gelingt es dem TI-92 nicht, den Term entsprechend umzuformen. Die erforderlichen Handrechnungen sind aber nicht zu aufwendig:

Die gesuchte Darstellung ergibt sich durch Einsetzen von

$$x = \frac{3r \cdot \cos(\alpha)}{4} - \frac{r \cdot \cos(3\alpha)}{4} \text{ in } f(x, \alpha).$$

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) &= \frac{x \cdot \sin(2\alpha) - r \cdot \sin(\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \\ &= \frac{r \cdot \sin(2\alpha) \cdot (3\cos(\alpha) - \cos(3\alpha)) - 4\sin(\alpha)}{4(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2)} = (*) \end{aligned}$$

Wegen  $\cos(3\alpha) = 4 \cos(\alpha)^3 - 3 \cos(\alpha)$  wird daraus:

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{r \cdot (6\cos(\alpha) - 4\cos(\alpha)^3) \cdot 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 4\sin(\alpha)}{4(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2)} = \\ &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{3\cos(\alpha)^2 - 2\cos(\alpha)^4 - 1}{2\cos(\alpha)^2 - 1} = \\ &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{(\cos(\alpha)^2 - 1) + 2\cos(\alpha)^2 \cdot (1 - \cos(\alpha)^2)}{2\cos(\alpha)^2 - 1} = \\ &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sin(\alpha)^2 \cdot (2\cos(\alpha)^2 - 1)}{2\cos(\alpha)^2 - 1} = r \cdot \sin(\alpha)^3. \end{aligned}$$

Mit  $\sin(3\alpha) = 3 \sin(\alpha) - 4 \sin(\alpha)^3$  ergibt sich

$$\text{schließlich } y = \frac{3r \cdot \sin(\alpha)}{4} - \frac{r \cdot \sin(3\alpha)}{4}.$$

---

Autor:  
StD Benno Grabinger  
Am Häuselberg 1  
D-67434 Neustadt  
eMail: BennoGrabinger@t-online.de

---

Dr. Rainer Heinrich

# Das erste Zentralabitur mit grafikfähigem Taschenrechner im Freistaat Sachsen

Im Freistaat Sachsen ist seit 1996 die Verwendung grafikfähiger Taschenrechner (GTR) am Gymnasium ab Klasse 8 verbindlich vorgeschrieben. Im Frühjahr 1999 wurde erstmals in der Bundesrepublik ein Zentralabitur in Mathematik mit Verwendung des grafikfähigen Taschenrechners (ohne CAS) geschrieben. Obwohl Lehrer und Schüler u.a. durch Handreichungen und vorab veröffentlichte Beispielaufgaben vorbereitet wurden, sah man diesem Abitur mit viel Spannung entgegen.

Was war anders?

Auf den ersten Blick unterschieden sich die Aufgaben kaum von denen vergangener Jahre. Das war zu erwarten, denn schließlich schrieb der Lehrplan im wesentlichen dieselben traditionellen Inhalte fest. Allerdings ändert sich die Konkretheit der Aufforderungen an den Schüler. Dieser muß erkennen, was er wie zu Papier bringen soll. Aus der Aufgabenstellung muß klar hervorgehen, ob etwa Koordinaten lokaler Extrempunkte mithilfe der Grafik des GTR abgelesen oder auf rechnerischem Weg mithilfe der Differentialrechnung bestimmt werden sollen.

Dazu wurden u.a. folgende Festlegungen getroffen:

„Es bleibt das Grundprinzip bestehen, daß in der Abiturprüfung der Lösungsweg durch die Schüler deutlich erkennbar darzustellen ist (nachvollziehbar und in logisch einwandfreier und gut lesbarer Form). Auch bei Nutzung des GTR haben die Schüler den Lösungsweg zu kennzeichnen, z.B. indem sie in Kurzform die benutzten GTR-Verwendungen oder die durch GTR-Programme realisierten Hilfen bei der Problemlösung in nachvollziehbarer Weise darstellen“.

Vom Grundsatz der Nachvollziehbarkeit des Lösungsweges darf nur abgewichen werden, wenn dies ausdrücklich erlaubt ist (z.B. durch Formulierungen wie „geben Sie an“ oder „nennen Sie“).

Die Fixierung des Lösungsweges in Kurzform ist durch eine ausführliche sprachliche Darstellung zu ersetzen, wenn dies ausdrücklich verlangt wird (z.B. durch Formulierungen wie „beschreiben Sie“, „erläutern Sie“).

Bei Aufforderungen ohne Einschränkung (z.B. „ermitteln Sie“, „bestimmen Sie“, „zeigen Sie“, „untersuchen Sie“) stehen dem Schüler sowohl die Wahl der Lösungsstrate-

gie als auch die Wahl der einsetzbaren Werkzeugenebene (numerische und grafische Werkzeugenebene des GTR, GTR-Programme) frei. **Die Aufforderung „Berechnen Sie...“ schließt das Nutzen der grafischen Werkzeugenebene des GTR aus; Programme dürfen natürlich trotzdem verwendet werden.**

Betrachten wir folgendes Beispiel:

**Aufgabe A 1: (Analysis, Leistungskurs, Pflichtteil)**

Gegeben sind Funktionen  $f_a$  durch

$$y = f_a(x) = -x \cdot \ln(ax^2) \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_{f_a}).$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen  $f_a$  an, untersuchen Sie die Funktionen  $f_a$  auf Symmetrie und bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte. Weisen Sie die Art der Extrema nach. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Funktionen  $f_a$  liegen.

Erreichbare BE-Anzahl: 10

Diese Aufgabe mußte auf traditionelle Art gelöst werden. Durch die Verwendung eines Parameters in der Kurvenschar konnte der GTR ohne CAS zwar zur Kontrolle eingesetzt werden, indem einzelne Vertreter der Schar grafisch dargestellt worden, die Lösungen selbst mußten per Hand errechnet werden.

b) Zeigen Sie, daß die Graphen der Funktionen  $f_a$  keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Auch dieser Nachweis mußte rechnerisch erfolgen. Der GTR lieferte sogar ein zusätzliches Motiv für die Bearbeitung der Aufgabe, da die Darstellung einer Auswahl der Grafen der Schar leicht vermuten ließ, daß der Koordinatenursprung gemeinsamer Punkt sei.

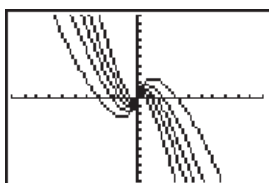


Abb. 1

Die Abbildung zeigt eine Kurvenschar für  $a=0,1; 0,25; 0,5; 1; 3$ .

c) Es gibt genau eine Gerade mit der Gleichung

$$y = c \quad (c \in \mathbb{R}, c > 0),$$

die mit dem Graph der Funktion  $f_{0,1}$  genau zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gemeinsam hat. Ermitteln Sie die Länge der Strecke  $\overline{P_1P_2}$ .

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Durch die Aufforderung „Ermitteln Sie“ standen den Schülern alle Wege offen.

Die Darstellung mit dem GTR liefert den Ansatz:

Die beschriebene Gerade muß durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion verlaufen, nur in diesem Fall existieren genau zwei gemeinsame Punkte. Die y-Koordinate des lokalen Maximumpunktes konnte sofort mit FMAX als  $y=2,3267$  abgelesen werden.

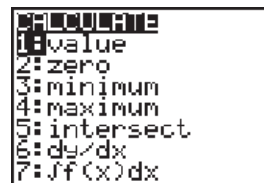


Abb. 2

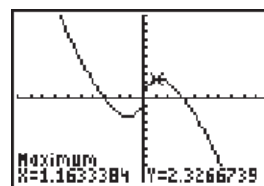


Abb. 3

Die Funktion  $y=2,3267$  konnte im GTR dargestellt werden. Anschließend wurden mithilfe von INTERSECTION die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Funktion mit dem Graph der Funktion  $f_{0,1}$  ermittelt.

$$S_1(-4,178 / 2,3267), \quad S_2(1,1612 / 2,3267)$$

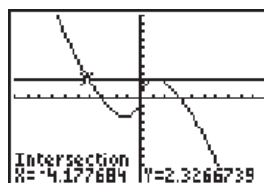


Abb. 4

Die Differenz der Schnittstellen lieferte die gewünschte Streckenlänge: 5,3.

Der TI-85 verfügt z.B. auch über die Routine DISTANCE, die die Entfernung zweier Punkte ermittelt.

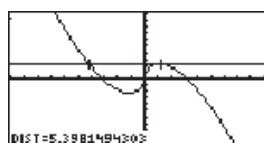


Abb. 5

Diese Teilaufgabe war für den Schüler ohne GTR nicht lösbar.

d) Für jedes  $a$  wird durch die  $x$ -Achse, die Tangente an den Graph der Funktion  $f_a$  im Schnittpunkt  $S(x>0;0)$  mit der  $x$ -Achse und durch die Gerade, welche durch den Koordinatenursprung und den lokalen Maximumpunkt bestimmt ist, ein Dreieck begrenzt. Weisen Sie nach, daß alle so gebildeten Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Hier wird vom Schüler ein rechnerischer Nachweis gefordert, der über die Schritte:

- Anstieg der Tangente
  - Anstieg der Geraden
  - Nachweis der Unabhängigkeit von  $a$
  - Begründung mit Hauptähnlichkeitssatz
- zum Ziel führte. Der GTR konnte zur Veranschaulichung und Kontrolle dienen.

Außerdem sind Funktionen

$$h_t \text{ durch } y = h_t(x) = \frac{2x}{x^2 + t^2} \quad (t \in \mathbb{R}, t > 0, x \in \mathbb{R})$$

gegeben.

e) Durch die Graphen der Funktionen  $f_{0,1}$ ,  $h_2$  und die Geraden mit den Gleichungen  $x=1$  und  $x=2$  wird eine Fläche vollständig begrenzt. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Auch diese Aufgabe war ohne GTR kaum lösbar. Da durch die Aufforderung „Ermitteln Sie“ aber keine Einschränkung der Werkzeugebenen des GTR gegeben war, war die Lösung recht einfach. Die betreffenden Graphen oder der Graph der Differenzfunktion wurden im GTR dargestellt und mit dem Integral-Befehl das bestimmte Integral in den Grenzen von 1 bis 2 ermittelt. Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 1,7.

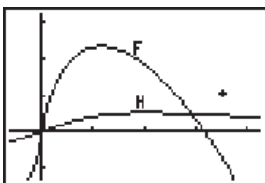


Abb. 6

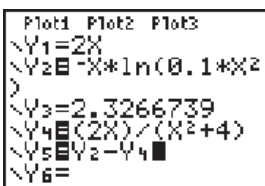


Abb. 7



Abb. 8

Es folgte noch eine klassische Extremwertaufgabe:

f) Für jede Funktion  $h_t$  wird für jedes  $x$  ( $x \in \mathbb{R}, x > 0$ ) durch die Punkte  $O(0 / 0)$ ,  $Q(x / 0)$  und  $P_t(x / h_t(x))$  genau ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Jedes dieser Dreiecke erzeugt bei Rotation um die  $x$ -Achse einen geraden Kreiskegel. Berechnen Sie die Stelle  $x_1$  in Abhängigkeit von  $t$ , für die das Volumen des zugehörigen Kreiskegels maximal wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

### Fazit:

Die Nutzung des GTR ist an vielen Stellen der Aufgabe zur ständigen Visualisierung, Veranschaulichung und zur begleitenden Kontrolle möglich.

Damit erhält der Schüler größere Erfolgchancen in der Prüfung. Rechenfehler werden schneller erkannt und korrigiert, lange Irrwege verhindert.

Es existieren Aufgabenteile, bei denen der Schüler nachweisen muß, daß er „Rechnenkönnen“ im Sinne auch des Rechnens und Umgehens mit zeitgemäßen Hilfsmitteln beherrscht. Diese Komponente des Rechnens konnte früher nicht Bestandteil der Abiturprüfung sein, sieht man von herkömmlichen Taschenrechnern ab. Bei der untersuchten Aufgabe waren z.B. 4 von 25 Bewertungseinheiten nur durch den geschickten Einsatz des GTR zu erreichen. Der Anteil scheint angemessen.

Nur eine Aufgabe kann natürlich kein Bild vom sächsischen Abitur vermitteln. Einige Formulierungen aus anderen Aufgaben deuten „Neues“ an:

„Bestimmen Sie eine Gleichung der Zielfunktion und geben Sie die maximale Streckenlänge an.“

„Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung einer Tangente in einem Punkt ....“

Nicht zuletzt soll auf die Möglichkeiten verwiesen werden, die sich Schülern durch die Nutzung von GTR-Programmen z.B. in der Analytischen Geometrie und der Stochastik ergeben.

Literatur:

Abiturprüfung 1998/99 Mathematik – Sachsen, paetec-Verlag Berlin, 1999. ISBN: 3-89517-009-7

# Ideenbörse – Lehrer schreiben für Lehrer

Die TI-Nachrichten sind ein Forum für alle interessierten und engagierten Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften. Wenn Sie überzeugt sind, daß graphische Taschenrechner einen hohen Wert für Ihren eigenen Unterricht haben, dann brauchen wir **Sie. Ihre Ideen und Ihre Erfahrung** erleichtern es Ihren Kollegen, graphische Taschenrechner sinnvoll und gewinnbringend im Unterricht einzusetzen.

In den TI-Nachrichten und auch im Internet möchten wir für Ihre Kollegen Artikel, ergänzende Materialien und Programme bereitstellen, die uns von Ihnen zugesandt werden. Hierzu berät und unterstützt uns ein derzeit sechsköpfiges Redaktionsteam von erfahrenen Lehrern und T<sup>3</sup>-Moderatoren:

## Udo Amelung

(udo.amelung@uni-muenster.de)

## Dr. Norbert Esper

(megesper@aol.com)

## Dr. Karl-Heinz Keunecke

(kh@keukiel.netzservice.de)

## Gregor Noll

(odsnoll@uni-koblenz.de)

## Wolfgang Pröpper

(w.proepper@wpro.franken.de)

## Wilhelm Weiskirch

(w.weiskirch@t-online.de)

## Hinweise für Autoren:

Ein Artikel für die TI-Nachrichten sollte bei einer Schriftgröße von 12pt und 1,5-fachen Zeilenabstand eine Länge von 4-5 Seiten nicht überschreiten. Längere Abhandlungen kommen jedoch für eine Veröffentlichung in Form von Handreichungen in Betracht. Programme können im Internet zum Download bereitgestellt werden.

Bitte verwenden Sie Formatierungen nur sparsam, d.h. möglichst nur Standardschriften wie Arial oder Times New Roman und Symbol einschließlich TI-Key Font und vermeiden Sie automatische Silbentrennung.

Versehen Sie die Bilder bitte mit Nummerierung und soweit nutzvoll mit einer Bildunterschrift. Verzichten Sie auf Farabbildungen, wenn es nicht unbedingt erforderlich ist. Die Beiträge sollten in elektronischer Form als Word-Dokument (\*.doc) eingereicht werden; Bilder bitte separat als \*.tif-Dateien beilegen.

Wenn Sie mithelfen wollen, den sinnvollen Einsatz von Graphikrechnern im Unterricht zu fördern, dann senden Sie Ihre Beiträge per Diskette oder e-Mail an einen der Redakteure oder an

**Texas Instruments -E&PS-, TI-Nachrichten,  
Haggertystr. 1,  
D-85356 Freising,  
ti-schule-de@ti.com, Fax: 08161-804907**

Josef Glöckler

## Einsatz des TI-92 im MU der SI am Gymnasium

Der folgende Text enthält Ausschnitte eines Erprobungsberichtes zum Einsatz des TI-92 in den Klassen 7 bis 10 eines Gymnasiums. Der ungekürzte Bericht findet sich auf dem rheinland-pfälzischen Bildungsserver unter [www.bildung.rp.schule.de/LMZ/mathe1\\_berichte.pht](http://www.bildung.rp.schule.de/LMZ/mathe1_berichte.pht)

### Einsatzmöglichkeit in Kl. 10

Aus den Lehrplanthemen:

- 10.1 Funktionen
- 10.2 Berechnungen am Kreis
- 10.3 Darstellung und Berechnung von Körpern
- 10.4 Trigonometrie
- 10.5 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

werden hier kurz die Abschnitte 10.2, 10.4 und 10.5 dargestellt.

### Berechnungen am Kreis

Die archimedische Methode zur Bestimmung von  $\pi$  über eine Folge von n-Ecken lässt sich ebenso schön programmieren wie z. B. die Monte Carlo-Methode.

Hier folgt nun eine Version nach Archimedes, wie man sie in Schulbüchern findet:

```
F1 Control F2 F3 F4 F5 F6
:arch(n)
:Prgm
:Local s
:setMode("Display Digits","FLOAT 12")
:J(2)+s
:2+i
:While i<2^n
:  i*2+i
:  J(2-J(4-s^2))+s
:  Disp i*s
:EndWhile
:EndPrgm
MAIN          RAD APPROX          FUNC
```

Bild 1

Sie liefert folgende Ergebnisse (zuerst die ersten 10, dann weitere 10 Näherungen)

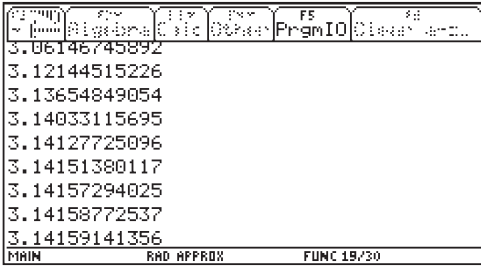


Bild 2

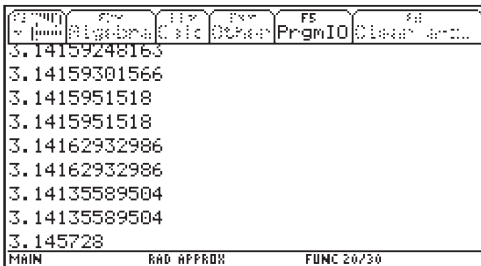


Bild 3

Die letzte Näherung sieht etwas verdächtig aus. Beim Erhöhen auf 28 Näherungen wird es ganz schlimm:

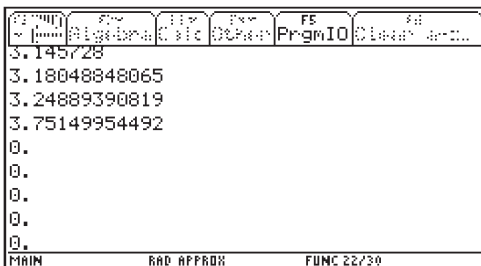


Bild 4

Das Ergebnis entfernt sich von dem gesuchten Grenzwert und wird schließlich konstant 0.

Die Frage ist, warum das archimedische Verfahren hier versagt, obwohl doch alles logisch richtig ist. Eine kleine Änderung behebt den Fehler: Wenn man in der Zeile, in der die neue Seitenlänge berechnet wird, entsprechend erweitert, sodaß die Differenz verschwindet und dafür einer Summe Platz macht, ist alles klar:

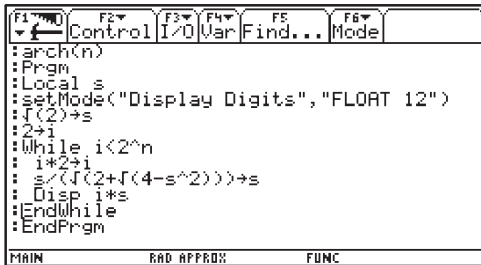


Bild 5

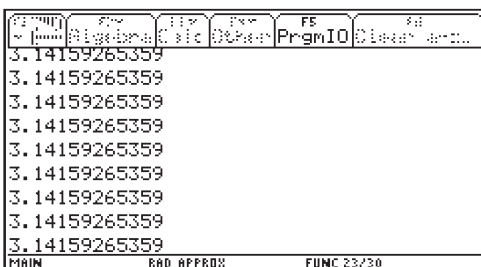


Bild 6

Das Stabilitätsproblem entsteht also durch die Differenz, und zwar werden durch die Differenz führende Nullen erzeugt. Damit bleiben nur noch wenige gültige Ziffern übrig. Dieses Problem wird durch die Umformung vermieden.

### Trigonometrie

Bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen kann der TI-92 sehr schnell sehr viele Beispiele von rechtwinkligen Dreiecken liefern und damit die Konstanz der entsprechenden Seitenverhältnisse demonstrieren:

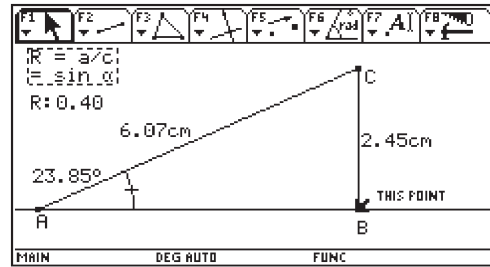


Bild 7

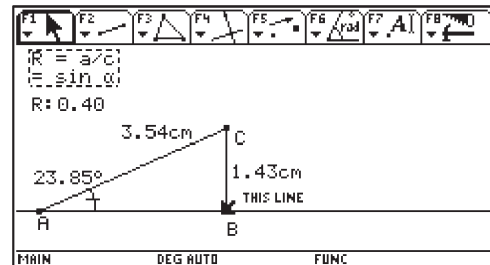


Bild 8

Bei Anwendungsaufgaben kann man, wie schon oft erwähnt, Variablen benutzen, die Formeln als Funktionen eingeben und so die Berechnungen durchsichtig gestalten. Bei der Betrachtung zyklometrischer Funktionen kann man den TI-92 wieder als Funktionenplotter einsetzen. Man kann dabei z. B. entdecken lassen, dass die Superposition zweier Sinusfunktionen mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wieder eine Sinusfunktion mit derselben Winkelgeschwindigkeit ergibt.

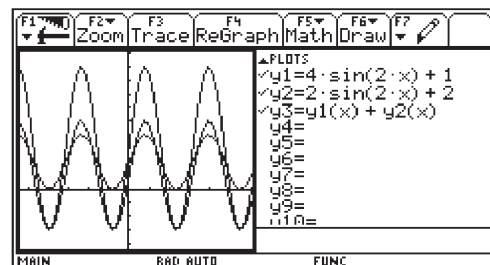


Bild 9

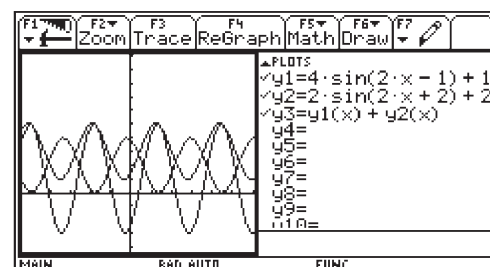


Bild 10

## Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Je komplexer und aufwendiger die Berechnungen werden, umso mehr lohnt sich der Einsatz des TI-92. So kann man z. B. mit dem TI-92 sehr schnell Intervallschachtelungen zur Bestimmung von Potenzen mit rationalem Exponenten programmieren und laufen lassen (hier am Beispiel von  $\sqrt[3]{200}$ ). Diese Intervallschachtelung kann man zwar auch von Hand machen, aber wenn das einmal durchgeführt und das Prinzip verstanden wurde, reicht das. Den Rest kann der Rechner besorgen

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
: wu3(x)
: Prgm
: Local w,d
: 0→w:1→d
: setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
: For i,1,6
:   While w^3<x: w+d→w: EndWhile
:   w→w
:   Disp string(w)&"<w<"&string(w+d)
:   d/10→d
: EndFor
: EndPrgm
MAIN RAD APPROX FUNC
  
```

Bild 11

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc DblAns PrgmIO Clear ans...
5.<w<6.
5.8<w<5.9
5.84<w<5.85
5.848<w<5.849
5.848<w<5.8481
5.84803<w<5.84804
MAIN RAD APPROX FUNC 0/20
  
```

Bild 12

Wie beim Thema Funktionen ist auch hier der Funktionsplotter sehr gut einsetzbar. Darüber hinaus kann man mit den Befehlen **DRAWFUNC** und **DRAWINV** Funktionen und ihre Umkehrrelationen zeichnen lassen und daran die Gesetzmäßigkeiten von Exponential- und Logarithmusfunktionen erkennen

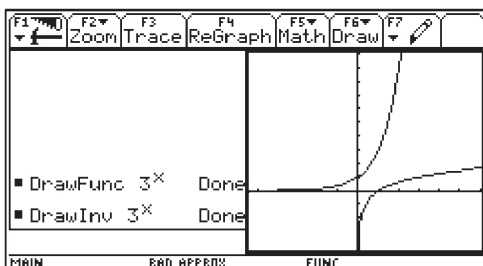


Bild 13

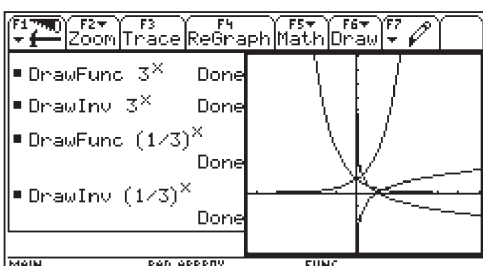


Bild 14

## Allgemeine Bemerkungen

- Der TI-92 erweist sich für fast alle Gebiete der Mathematik als eine starke und meist unkomplizierte Hilfe für die Unterrichtsgestaltung, sowohl für die Erarbeitung als auch zum Üben. Die aufgeführten Beispiele sind nur eine kleine Auswahl.
- Die Motivationssteigerung ist beim TI-92 wie beim normalen PC-Einsatz festzustellen. Beim TI-92-Einsatz entfällt der Aufwand, in den PC-Raum zu wechseln. Der TI-92 lässt sich somit harmonischer in den Unterricht integrieren.
- In manchen Situationen kann der TI-92 zu viel. Die Menüs sind nicht auf den Kenntnisstand der Schüler anpaßbar. Dies führt manchmal zu Problemen. „Forschende“ Schüler entdecken die Möglichkeiten des TI-92 sehr schnell und sind dann enttäuscht, wenn sie längere Umwege gehen müssen, wo der TI-92 elegante kurze Lösungen anbietet.
- Ich habe den TI-92 bei Überprüfungen nicht zugelassen, da
  1. nicht jeder Schüler sein eigenes Gerät hatte und bei Weitergabe von Geräten während eines Tests wohl auch die Ergebnisse mitgewandert wären,
  2. computergeübtere Schüler durch den TI-92-Einsatz bevorzugt gewesen wären. Dies war Anlass zu einigen Frustrationen.

Abschließend bleibt festzustellen, dass ich den TI-92 trotz häufigen Einsatzes bei weitem nicht ausreizen konnte und daß ich immer noch und immer wieder das Handbuch hinzuziehe und dazulerne. Das Experiment geht weiter.

---

Autor:  
 StD Josef Glöckler,  
 Heinrich-Wothe-Straße 12  
 D-55122 Mainz

# Eine Methode zur Herleitung von Summenformeln

## Ein Beispiel für Beweise in der Mathematik – trotz TI-92, aber mit TI-92

Der TI-92 bietet die Lösungen für die Summenformeln an. Dennoch ist es sinnvoll, die Frage nach einem möglichen Algorithmus zu stellen, der zu den Formeln führt. Dabei kann – wie die folgenden Aufzeichnungen zeigen – der TI-92 mit seinen Möglichkeiten lineare Gleichungssysteme zu lösen – mit rationalen Koeffizienten sogar exakt – eine entscheidende Hilfe sein.

### Die traditionelle Methode

Herkömmlich werden die Summenformeln für  $r=1$  und  $r=2$  wie folgt gelöst:

Der Fall  $r = 1$ :  $S_1 = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Man schreibt die Summe zweimal, aber in gegensätzlicher Reihenfolge an und addiert:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ S_1 &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ \hline 2S_1 &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \end{aligned}$$

Auflösen nach  $S_1$  liefert:  $S_1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Der Fall  $r=2$ :  $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

Hier formt man die 3. Potenzsumme über  $k+1$  um:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^3 &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n \end{aligned}$$

Umsortieren liefert:

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

Nun fasst man die linke Seite zusammen

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot S_2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n$$

und erhält schließlich (ggf. mit Hilfe des TI-92):

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Analog könnte man dann die Summe der 3-ten Potenzen bilden, usw. Dieses Verfahren wird für jedes folgende  $n$  umfangreicher, weil man die Summenformeln für die vorhergehenden Werte von  $n$  alle bestimmen müsste.

### Ein neuer Weg

Besser ist es, sich die Struktur der bisherigen Formeln anzusehen:

Summenformel der 1-ten Potenzen:

Polynom 2. Grades mit rationalen Koeffizienten

Summenformel der 2-ten Potenzen:

Polynom 3. Grades mit rationalen Koeffizienten

### Vermutung:

Für beliebiges  $r$  ergibt sich ein Polynom  $(r+1)$ -ten Grades mit rationalen Koeffizienten.

Für  $r=5$  führt dies zu folgendem Ansatz:

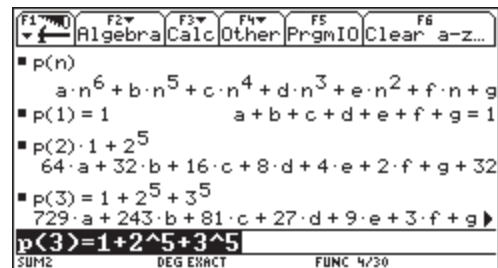


Abb. 1

Bedingungen für die Koeffizienten (1)

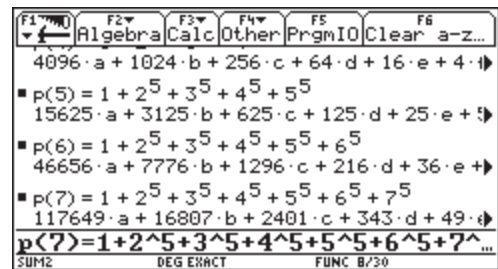


Abb. 2

Bedingungen für die Koeffizienten (2)

Die Matrix  $M_a$  des Gleichungssystems bzw. die rechte Seite  $r_s$  wird eingegeben und die Lösung im Exakt-Modus mit Hilfe des Befehls **simult** bestimmt. Die errechneten Werte für  $a, b, c, \dots, g$  werden in  $p(n)$  eingegeben:

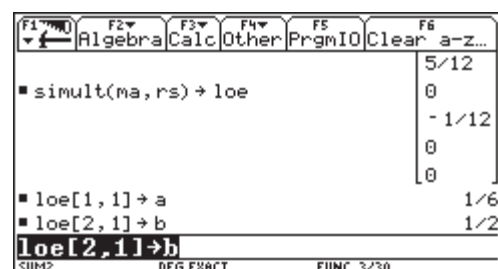


Abb. 3

Berechnung der Koeffizienten

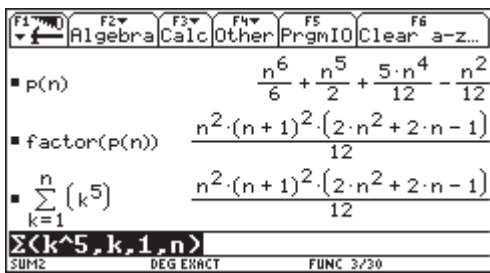


Abb. 4

Summenformel

Mit dem Befehl factor(p(n)) wurde die Übereinstimmung mit der vom TI-92 ausgegebenen Formel erzeugt. (ggf. kann auch mit expand gearbeitet werden).

### Der Beweis:

Die hergeleitete Formel „stimmt“ für  $n=1$  bis  $n=7$ . Für höhere Werte ist sie nicht überprüft worden. Dies geschieht jetzt mit der Beweismethode der „Vollständigen Induktion“:

(1) Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage der Formel ist wahr für  $n=1$ .

(2) Induktionsannahme

Die Aussage der Formel gelte für  $n=x$ .

Behauptung:

Dann gilt sie auch für  $n=x+1$ .

### Beweis:

Die Induktionsvoraussetzung ist erfüllt. Es muß noch gezeigt werden, daß  $p(x)+(x+1)^5$  mit  $p(x+1)$  übereinstimmt. Dies kann mit dem TI-92 im Exakt-Modus geschehen:

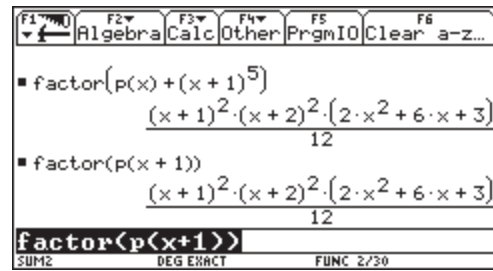


Abb. 5

Vergleich  $p(x+1)$  mit  $p(x)+(x+1)^5$

(3) Aus (1) und (2) folgt die Gültigkeit der Aussage für alle  $n$ .

Das Verfahren der „Vollständigen Induktion“ ist ein in der Mathematik sehr häufig gewähltes Beweisverfahren, es ist aber nicht konstruktiv, d.h. man kann eine Vermutung ggf. nachweisen, die Aussage – hier die Lösungsformel – muß aus anderen Überlegungen entstehen. Wegen der Wichtigkeit der Summenformeln für die Integralrechnung ist hier eine Gelegenheit, diese Problematik aufzuzeigen.

Autor:

Günter Heitmeyer

Parkstr.6

D-31655 Stadthagen

Schule: Ratsgymnasium Stadthagen

Karl-Heinz Keunecke, Kiel

## Vorsicht bei Gleichungssystemen mit Parametern: rref() löst nicht alle!

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit einem Computer-Algebra-System bietet es sich an, die Funktionen zur Bearbeitung von Matrizen zu verwenden. Mit Hilfe der Befehle für elementare Zeilenumformungen (Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl, Addition zweier Zeilen) kann ein lineares Gleichungssystem (LGS) bzw. die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise so umgeformt werden, daß eine Matrix in Dreiecksform oder in Diagonalform entsteht. Daraus ist dann die Lösung sofort abzulesen. Auf diese Weise können sich Schülerinnen und Schüler im Unterricht vollständig auf das Erlernen des Lösungsalgorithmus konzentrieren, denn die numerische Arbeit übernimmt das CAS des Taschenrechners. Interessiert dagegen nur die Lösung des LGS, so kann man mit nur einem Befehl bereits die Dreiecksform oder die Diagonalform erhalten.

Nach Eingabe der erweiterten Koeffizientenmatrix eines LGS kann man sich mit dem Befehl rref() von TI-89 und TI-92 die sog. reduced row-echelon-form (Diagonalform) der Matrix berechnen lassen, aus der dann die Lösungen

des linearen Gleichungssystems direkt abgelesen werden können. Dies zeigt das folgende Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x - y - z &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Das Verfahren kann auch auf Gleichungen angewendet werden, in denen Parameter auftreten. Im nächsten Beispiel ist  $t$  eine beliebige reelle Zahl.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2t \\ 5x - 4y - z &= 2 \\ x - 3y - 2z &= 2t + 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2t \\ 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2t + 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & t-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= t+1 \\ y &= t+1 \\ z &= t-1 \end{aligned}$$

Allerdings kann man nicht immer die Lösung aus den mit dem Befehl `ref()` (Dreiecksform) oder `rref()` (Diagonalform) berechneten Matrizen ablesen. Wählt man z.B. das folgende System mit  $k \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 6y - 3z = -6 \\ 4x + 3y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 9z = k \end{cases}$$

so liefern TI-89 und TI-92 nicht die richtige (vollständige) Lösung. Auf die erweiterte Matrix des LGS ist in Abb.1. der Befehl `rref()` angewendet worden.

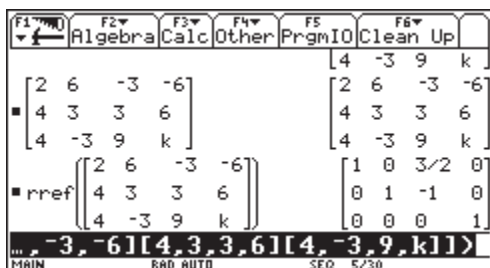


Abb. 1

Berechnung der Diagonalform der erweiterten Koeffizientenmatrix mit `rref()`.

Aus dem Ergebnis hat man zu folgern, daß das Gleichungssystem für alle  $k \in \mathbb{R}$  keine Lösung hat. Die unterste Zeile bedeutet  $0x+0y+0z=1$  und stellt somit eine falsche Aussage dar.

Dieses Ergebnis ist offensichtlich nicht korrekt. Denn für  $k=18$  erhält man doch eine Lösung, wie aus der Kopie des Bildschirms in Abb.2 erkennbar ist.

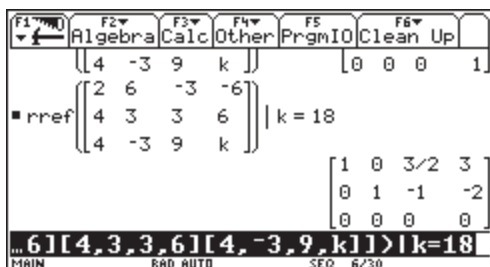


Abb. 2

Berechnung der Diagonalform mit `rref()` für  $k=18$ .

Man liest als Lösung ab,

$$k = 18: x = -\frac{3}{2}z + 3 \wedge y = z - 2, z \in \mathbb{R},$$

mit  $z$  als einem frei wählbaren Parameter.

Es fragt sich nun, warum die Lösung für  $k=18$  von dem CAS nicht erkannt wird. Die Ursache ist natürlich der Lösungsalgorithmus des jeweiligen CAS. Aber auch ohne diesen im Detail zu kennen, kann man im Unterricht erklären, warum die obige Lösung übersehen wird. Dazu braucht man nur die Lösung schrittweise durch elementare Zeilenumformungen zu bestimmen. Dies läßt sich mit den Befehlen des TI-89 und des TI-92 sehr einfach durchführen. Mit dem Befehl `mRow` (Faktor, Matrix,  $n$ ) multipliziert man die Zeile  $n$  mit Faktor. Der Befehl `mRowAdd` (Faktor, Matrix,  $n$ ,  $m$ ) erlaubt es, die Zeile  $n$  mit Faktor zu multiplizieren und zur Zeile  $m$  zu addieren. Im folgenden wird das System mit den angegebenen Befehlen gelöst.

Zunächst ist Zeile 1 mit  $-2$  multipliziert und zu Zeile 2 addiert worden (Abb.3).

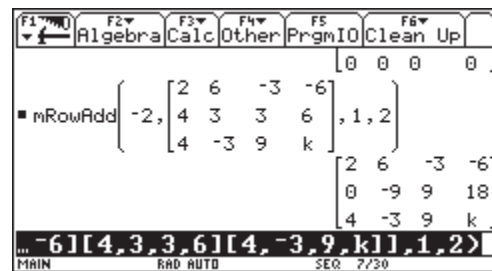


Abb. 3

Zeile 1 mit  $-2$  multiplizieren und zu Zeile 2 addieren.

Dann wird die Zeile 1 nochmals mit  $-2$  multipliziert und zur Zeile 3 addiert (Abb. 4).

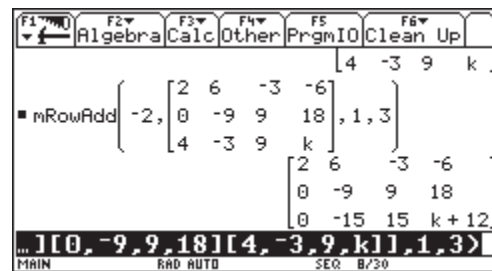


Abb. 4

Zeile 1 mit  $-2$  multiplizieren und zu Zeile 3 addieren.

Zur Vereinfachung wird Zeile 2 durch  $-9$  (Abb.5)

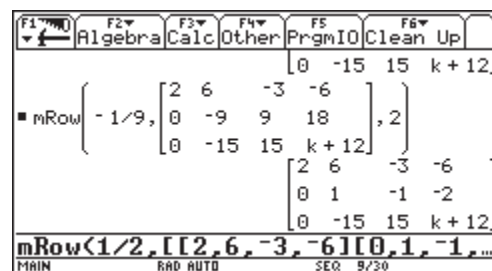


Abb. 5

Zeile 2 mit  $-1/9$  multiplizieren.

und Zeile 1 durch 2 geteilt (Abb.6).

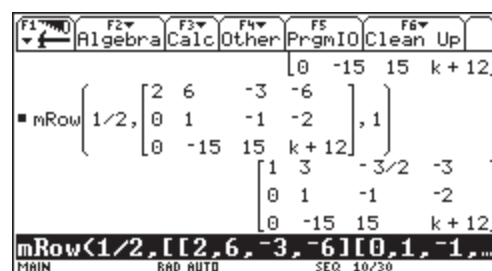


Abb. 6

Zeile 1 mit  $1/2$  multiplizieren.

Um die Diagonalform zu erhalten, wird in Abb.7 Zeile 2 mit  $-3$  multipliziert und zu Zeile 1 addiert.

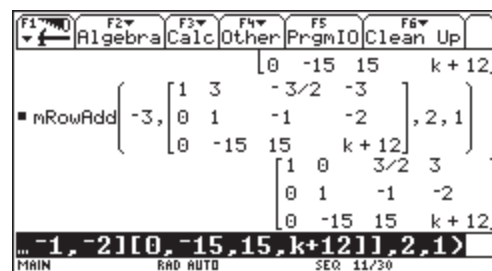


Abb. 7

Zeile 2 mit  $-3$  multiplizieren und zu Zeile 1 addieren.

Dann ist noch in Abb.8 Zeile 2 mit 15 zu multiplizieren und zur 3. Zeile zu addieren.

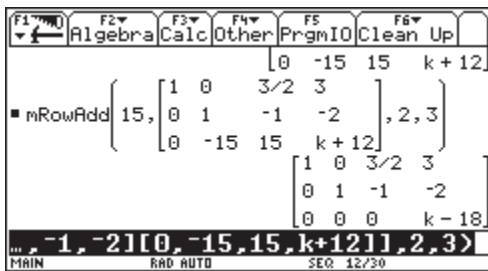


Abb. 8

Zeile 2 mit 15 multiplizieren und zu Zeile 3 addieren.

Aus der untersten Zeile der in Abb. 8 berechneten Matrix erkennt man, daß hier eine Fallunterscheidung  $k = 18$  oder  $k \neq 18$  erforderlich wird. Im ersten Fall ist das Gleichungssystem lösbar und im zweiten nicht. Die Lösungen für den zweiten Fall können nach weiteren Umformungen wieder direkt abgelesen werden:

$$k = 18: x = -\frac{3}{2}z + 3 \wedge y = z - 2, z \in \mathbb{R},$$

Die CAS von TI-89 und TI-92 haben diese Fallunterscheidung nicht durchgeführt, sondern die letzte Zeile unerlaubter Weise durch  $(k - 18)$  geteilt. Auch mit den TI89/92-Befehlen ist das – eigentlich konsequenter Weise – möglich, wie man in Abb. 9 sieht.

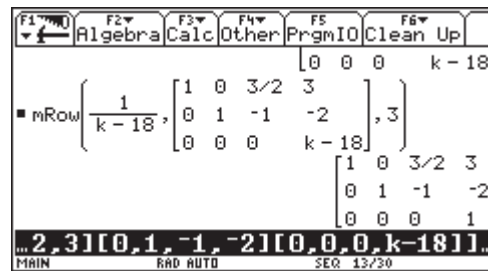


Abb. 9

Division von Zeile 2 durch  $(k-18)$

Das Ergebnis ist identisch mit dem Ergebnis des Befehls `rref()` in Abb.1. Die fehlende Fallunterscheidung bzw. die unerlaubte Division tritt nur auf, wenn bei Umformungen der Matrix die Elemente einer Zeile 0 sind, oder einen von Parametern abhängigen Term als gemeinsamen Faktor haben (im Beispiel ist das  $k-18$  in Zeile 3). Das angeführte Beispiel ist kein Einzelfall. Bei LGS mit Parametern, bei denen der Rang der Koeffizientenmatrix nicht mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt, kann man die vollständige Lösung im allgemeinen nicht mit `rref()` oder `rref()` bestimmen. Homogene Gleichungssysteme dieser Art können nur in Ausnahmefällen mit den angegebenen Befehlen korrekt gelöst werden.

Autor:  
Dr. Karl-Heinz Keunecke,  
kh@keukiel.netzservice.de

Reinhard Kind

## Zum empirischen Gesetz großer Zahlen

In vielen Schulbüchern findet man Merksätze wie die folgenden (aus Klassenstufe 7):

Obwohl der Ausgang jeder einzelnen Durchführung eines Zufallsversuches rein zufällig und daher nicht vorhersehbar ist, schwanken die dabei ermittelten relativen Häufigkeiten mit zunehmender Versuchszahl immer weniger um einen festen Wert.

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ergebnisses gibt an, welche relative Häufigkeit man bei häufiger Versuchsdurchführung für dieses Ergebnis erwarten kann. Sie ist der Wert, um den die relativen Häufigkeiten schwanken. Daher lassen sich **Wahrscheinlichkeiten** erst nach vielen Versuchsdurchführungen einigermaßen genau bestimmen.

*Beispiel:*  
Werfen einer Reißzwecke  $S = \{b, r\}$

Abb. 1

Im Unterricht wird man dazu die realen Experimente auch durchführen (Münze, verschiedene Würfel, Reißzwecke). Oft ergeben sich dabei jedoch Ergebnisse, die den gewünschten Effekt nicht zeigen. Die Diskussion darüber ist immer lohnend (keine vergleichbaren Voraussetzungen beim Werfen, ...). Hilfreich für die Formulierung des empirischen

Satzes wären jedoch Versuchsreihen, welche die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten auch zeigen. Hier ließe sich der Einsatz eines Zufallsgenerators rechtfertigen. Das Kennenlernen der sogenannten „Monte-Carlo-Methode“ gehört m.E. mit zur Allgemeinbildung, weil es in vielen Bereichen auch tatsächlich zur Anwendung gelangt.

Mit Hilfe des TI-92 lassen sich solche Graphen wie oben im Merksatz erzeugen. Bis auf die Programmierung der Funktion abshaeuf, welche die absoluten Häufigkeiten eines Elementarereignisses in einem Versuchsergebnis zählt, sind alle Bestandteile leicht verständlich.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:abshaeuf(liste,merkmal)
:Func
:Local i,wert
:@wert
:For i,1,dim(liste)
:If liste[i]=merkmal Then
:wert+1→wert
:EndIf
:EndFor
:wert
:EndFunc
MAIN RAD AUTO FUNC

```

Abb. 2

- Im HOME-Editor wird demonstriert, wie man
- Zufallsergebnisse ermitteln kann (Simulation eines realen Experimentes),
  - eine bestimmte Anzahl davon in eine Liste eintragen kann,
  - die absolute Häufigkeit eines bestimmten Ereignisses in einer Liste bestimmen kann,
  - die relative Häufigkeit ermitteln kann.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
:rand(6) 4
:rand(6) 3
:seq(rand(6),k,1,4) (3 6 5 5)
:abshaeuf({1 3 5 4 1 2 1},1) 3
:relhaeuf(6,10,2) 1/10
:relhaeuf(6,60,5) 11/60
:relhaeuf(2,12,1) .5
relhaeuf(2,12,1)
MAIN RAD AUTO FUNC 7/30

```

Abb. 3

Benötigt werden folgende Befehle:

- rand(m) liefert eine natürliche Zufallszahl von 1 bis m.
- seq(rand(m),k,1,n) liefert eine Liste von n natürlichen Zufallszahlen von 1 bis m.
- abshaeuf(a,i) liefert die Anzahl, wie oft das Ergebnis i in der Liste a vorkommt.
- relhaeuf(m,n,i) liefert die relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis i in der Liste der Zufallszahlen von 1 bis m bei n Versuchsdurchführungen vorkommt.

**Beispiele:**

- m=6; n=10; i=3: 10-maliges Werfen mit einem gewöhnlichen Würfel; Auswertung nach der Zahl 3
- m=2 : Werfen mit einer Münze;
- m=4 : Werfen mit einem Tetraeder

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:relhaeuf(flächen,versuche,merkmal)
:Func
:abshaeuf(seq(rand(flächen),k,1,versuche),merkmal)/versuche
:EndFunc
MAIN RAD AUTO FUNC

```

Abb. 4

Man könnte auch nur eine einzige Funktion benutzen, die alles in sich vereinigt. Die Aufteilung in zwei Funktionen abshaeuf und relhaeuf hat aber den Vorteil, daß man die beiden wichtigen Begriffe unabhängig testen kann.

Die Funktion relhaeuf(m,n,i) trägt man im SEQUENCE-Modus im Y=-Editor ein. Für m und i werden konkrete Werte gewählt.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style Axes...
PLOTS 1
u1=relhaeuf(2,n,1)
u2=
u3=
u4=
u5=
u1=
MAIN RAD AUTO SEQ

```

Abb. 5

Im WINDOW-Editor kann man nmax, also die Anzahl der Versuchsdurchführungen, einstellen..

```

F1 F2
Zoom
nmin=1
nmax=50
plotstr=1
plotstep=1
xmin=-2
xmax=50
xsc1=10
ymin=-2
ymax=1.1
ysc1=.1
MAIN RAD AUTO SEQ

```

Abb. 6

Die Werte für die relative Häufigkeit kann man direkt in der Applikation TABLE ansehen.

n	u1				
1.	.0				
2.	.5				
3.	.66667				
4.	.5				
5.	.2				
6.	.33333				
7.	.57143				
8.	.5				

n=1.

Abb. 7

Für den Graphen muß man im Y=-Editor die Option AXES auf CUSTOM mit x-Axis auf n und y-Axis auf u einstellen.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style Axes...
PLOTS 1
u1=n
u2=
u3=
u4=
u5=
u1=
MAIN RAD AUTO SEQ

```

Abb. 8

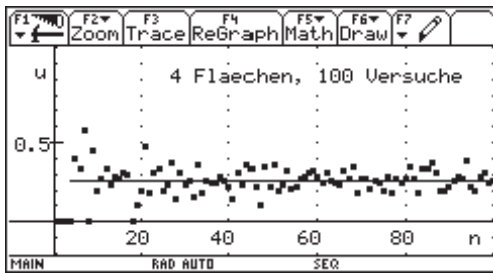


Abb. 9

Mit F4 ist sofort eine neue Serie mit den gleichen Parametern darstellbar. Die Zufallszahlen werden neu gewählt. Man kann aber auch gleiche Serien erzeugen, wenn man in die Funktion abshaeuf den Befehl randseed mit aufnimmt.

Zusätzlich können im Graphen auch Streifen um den Stabilisierungswert mit eingezeichnet werden.

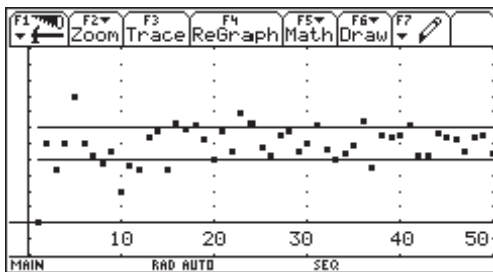


Abb. 10

Demonstriert wird jeweils die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bei einem bestimmten Wert. Man sieht sehr schön, daß hier keine Konvergenz im üblichen Sinn vorliegt, sondern „stochastische Konvergenz“. Bei  $n=100$  beträgt die Rechenzeit ca. 10 Minuten, bei  $n=60$  nur 4 Minuten.

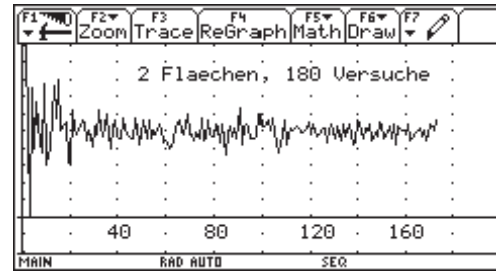


Abb. 11

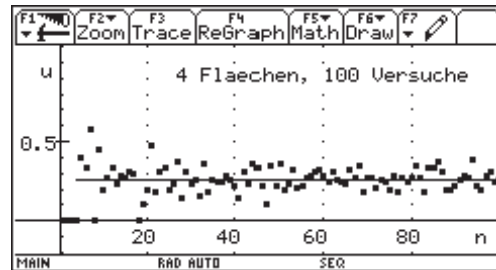


Abb. 12

Literatur:

Elemente der Mathematik, Niedersachsen, Band 7, Schroedel

Numerische Verfahren mit dem TI-92, Texas Instruments

Autor:

StD Reinhard Kind

Fachberater für Mathematik bei der Bezirksregierung Lüneburg

Gymnasium Bremervörde

Modersohnstr. 1

D-27432 Bremervörde

Achim Kleinfeld, Duisburg

# Inverse Matrizen und Determinanten: Schüler verschicken verschlüsselte Nachrichten

## Lerngruppe

LK 12

## Themenbereich

Lineare Algebra:  $GL_3(\mathbb{R})$ , LGS

## Zeitlicher Umfang

Eine Doppelstunde

## Vorkenntnisse

- Addition und Multiplikation von  $(m,n)$ -Matrizen
- Determinante einer  $(3,3)$ -Matrix
- Begriff der Gruppe

- algebraische Struktur der  $(3,3)$ -Matrizen: Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element
- lineare Gleichungssysteme und deren Lösbarkeit (Determinantenkriterium)

## Inhalt

- Codieren von Text in Matrixform durch Multiplikation mit  $(3,3)$ -Matrizen
- Berechnung von Decodiermatrizen mittels LGS
- Zusammenhang zwischen Determinante der Codiermatrix und Existenz einer Decodiermatrix
- algebraische Interpretation: Decodiermatrix ist multiplikative Rechtsinverse

**Absender:**

Name \_\_\_\_\_

Vorname \_\_\_\_\_

Schule \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

**Fächer**  
 Mathematik       Physik  
 sonstiges: \_\_\_\_\_

**Hauptinteresse**  
 wissenschaftliche Rechner  
 Graphikrechner  
 CAS-Rechner

bitte freimachen

**Kostenloses  
Abonnement**



**An**

**Texas Instruments -E&PS-  
TI-Nachrichten  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**

**Absender:**

Name \_\_\_\_\_

Vorname \_\_\_\_\_

Schule \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

**Fächer**  
 Mathematik       Physik  
 sonstiges: \_\_\_\_\_

**Hauptinteresse**  
 wissenschaftliche Rechner  
 Graphikrechner  
 CAS-Rechner

bitte freimachen

**Workshops**



**An**

**Texas Instruments -E&PS-  
Workshops  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**

**Bitte liefern Sie die Geräte an meine**

**Privatanschrift**  
Name \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

Telefon \_\_\_\_\_

**Schulanschrift**  
Schule \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

Telefon \_\_\_\_\_

bitte freimachen

**Taschenrechner  
zum Ausleihen**



**An**

**Texas Instruments -E&PS-  
Leihprogramm  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**



**Absender:**

Name

Schule

Straße

PLZ/Ort

bitte freimachen

An

**Texas Instruments -E&PS-  
TI-Nachrichten  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**

Für Ihre Unterlagen:

Die wichtigsten  
TI-Kontakt-Nummern:



06196-975015



0032-27138068



ti-cares@ti.com

www.ti.com/calc/deutschland



Texas Instruments – E&P –  
Haggertystr. 1  
D-85356 Freising

Wenn Sie z.B. Fragen  
haben zu:

- Unterrichtsmaterialien
- Lehrerprogramme
- Wünsche und Anregungen
- Fragen zu den Rechnern

**Absender:**

Name

Schule

Straße

PLZ/Ort

Datum

Unterschrift

bitte freimachen

An

**Texas Instruments -E&PS-  
Customer Support Center  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**

Bücher,  
Handreichungen  
und  
Kopiervorlagen



Alle Preise in DM und inkl. MwSt zzgl. Versandkosten.  
Irrtum, Tippfehler und Preisänderung vorbehalten.

**Absender:**

Name

Schule

Straße

PLZ/Ort

bitte freimachen

An

**Texas Instruments -E&PS-  
Customer Support Center  
Haggertystraße 1**

**D-85356 Freising**

Informationen  
Online



Alle Preise in DM und inkl. MwSt zzgl. Versandkosten.  
Irrtum, Tippfehler und Preisänderung vorbehalten.

# Kostenloses Abonnement

Gerne informieren wir auch Ihre Kollegen regelmäßig über den Einsatz von Graphikrechnern im Unterricht. Senden Sie uns dazu bitte nebenstehende Postkarte.

**Bitte senden Sie die TI-Nachrichten zukünftig auch an meine Kollegen.**

Kopieren Sie diese Karte falls nötig für weitere Kollegen.

Name \_\_\_\_\_  
Vorname \_\_\_\_\_  
Schule \_\_\_\_\_  
Straße \_\_\_\_\_  
PLZ / Ort \_\_\_\_\_

**Fächer**  
 Mathematik     Physik  
 sonstiges: \_\_\_\_\_

**Hauptinteresse**  
 wissenschaftliche Rechner  
 Graphikrechner  
 symbolische Rechner

Name \_\_\_\_\_  
Vorname \_\_\_\_\_  
Schule \_\_\_\_\_  
Straße \_\_\_\_\_  
PLZ / Ort \_\_\_\_\_

**Fächer**  
 Mathematik     Physik  
 sonstiges: \_\_\_\_\_

**Hauptinteresse**  
 wissenschaftliche Rechner  
 Graphikrechner  
 symbolische Rechner

*Vielen Dank für die Bereitschaft, diese Karte auszufüllen.*

## Workshop gesucht? – TI hilft

Wenn Sie einen Workshop zum Einsatz von Graphikrechnern im Unterricht wünschen, schicken Sie bitte nebenstehende Postkarte ausgefüllt an uns zurück. Wir werden uns bemühen, gemäß Ihren Wünschen den für Sie bestmöglichen Referenten zu finden.

## Ich möchte an einem Workshop teilnehmen

**Zu welchem Graphikrechner wünschen Sie einen Workshop?**

- TI-82/83/83 Plus     TI-85/86     TI-89/92     CBL/CBR™

**Wie viele Teilnehmer erwarten Sie zu diesem Workshop?**

- weniger als 10     10 oder mehr

**Wie erfahren ist die Mehrzahl der Teilnehmer im Umgang mit Graphikrechnern?**

- Anfänger     Grundkenntnisse     Fortgeschrittene

**Wünsche?**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## Zu Ihrer Erinnerung:

Ich habe am

\_\_\_\_\_

folgende Rechner  
leihweise bestellt:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Leihtermin: \_\_\_\_\_

Ausweichtermin: \_\_\_\_\_

Lieferort: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern

Im Rahmen des Leihprogramms möchte ich für ca. 3 Wochen folgende Graphikrechner ausleihen:

Stück	Produkt	Stück	Produkt	Stück	Produkt
_____	TI-82	_____	TI-85/86	_____	TI-92 II (E-Modul eingebaut)
_____	ViewScreen für TI-82	_____	ViewScreen für TI-85/86	_____	TI-92 PLUS (PLUS Modul eingebaut)
_____	TI-83	_____	TI-89	_____	CBL™ (Spannung / Helligkeit / Temperatur)
_____	ViewScreen für TI-83	_____	ViewScreen für TI-89	_____	CBR™
_____	TI-83 Plus (sobald verfügbar)	_____	TI-92	_____	Cabri Géomètre II™
_____	ViewScreen für TI-83 Plus	_____	ViewScreen für TI-92	_____	TI-Graph Link™

Ich benötige die Geräte vom \_\_\_\_\_ bis \_\_\_\_\_ (max. 3 Wochen) (Ausweichtermin: \_\_\_\_\_)

Ich beabsichtige die Durchführung

- eines Workshops     eines Unterrichtsversuches     eines Produkttests

Ort \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_ Unterschrift \_\_\_\_\_

Bitte bestellen Sie die gewünschten Rechner mindestens 6 Wochen im Voraus. Geben Sie bitte einen Ausweichtermin an, damit wir bei übergroßer Nachfrage geeignet disponieren können.  
Vergessen Sie nicht die Lieferadresse auf der Rückseite dieser Karte zu notieren!

### Fortführung

- Diskussion der Rechts-/Linksinvertierbarkeit und Eindeutigkeit
- Anwendung auf Lösung eines LGS:  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$

### Voraussetzungen im Umgang mit dem TI-92

- Beherrschung der Grundfunktionen im Home-Editor
- Eingabe und Speichern von Matrizen mittels „Apps“ (alternativ im Home-Editor mit „Define“)
- LGS-Lösung mit „simult“
- „det“-Befehl (aus „MATH“ oder per Hand)

### Zum Verlauf der Doppelstunde

Wenn Schüler im Unterricht Zettelchen verschicken, werden sie manchmal erwischt; deshalb wäre es besser, eine Nachricht wie „Kleinfeld ist doof“ so zu verschlüsseln, daß Unbefugte sie nicht lesen können.

Wie kann der aktuelle Stoff des Mathematik-Unterrichts (Matrizen) dazu verwendet werden?

Zunächst schreibt man den Text zeilenweise in eine Matrix, per Konvention in 3 Spalten und mit \* für Zwischenräume und zum Auffüllen:

Textmatrix: 
$$\begin{bmatrix} K & L & E \\ I & F & E \\ L & D & * \\ I & S & T \\ * & D & O \\ O & F & * \end{bmatrix}$$

Die einfachste Codierung erfolgt durch einfache Zuordnung der Zeichen zu Zahlen mit:

$$* \leftrightarrow 0, A \leftrightarrow 1, \dots, Z \leftrightarrow 26.$$

Für die weitere Arbeit deklariert man im Data/Matrix Editor eine neue 3x6 -„Nachrichten“-Matrix mit Namen n und gibt die Codierung zeilenweise ein:

	c1	c2	c3	c4	c5
1	11	12	5		
2	9	6	5		
3	12	4	0		
4	9	19	15		
5	0	4	20		
6	15	6	0		

Abb. 1

Diese Primitivcodierung knackt natürlich sogar der Lehrer.

Zur Verbesserung schlugen die Schüler Addition oder Multiplikation mit einer anderen Matrix oder mit einem Faktor vor. Im Unterrichtsgespräch wurde schnell geklärt, daß aus Formatgründen die Multiplikation der Nachrichtenmatrix mit irgendeiner (!?) (3,3)-Codier-Matrix am günstigsten ist.

co	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
det(co)	24

Abb. 2

So erhält man die sogenannte Sendematrix  $\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{co}$ .

n*co -> s	$\begin{bmatrix} 98 & 114 & 156 \\ 60 & 76 & 96 \\ 36 & 68 & 72 \\ 168 & 161 & 243 \\ 84 & 60 & 96 \\ 51 & 90 & 99 \end{bmatrix}$
-----------	---

Abb. 3

Klar, daß der Empfänger die Codiermatrix kennen muß. Als Sicherheitskennzahl wird die Determinante der Matrix co mit auf den Zettel geschrieben.

Wie kann man nun eine so codierte Matrix entschlüsseln?

Den Schülern war sehr schnell klar, daß die Gleichung  $\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{co}$  nach n aufzulösen ist und daß eine Decodiermatrix benötigt wird, die so etwas wie die inverse Matrix von co sein muß:

$$\text{Mit } \mathbf{co} \cdot \mathbf{dec} = \mathbf{E}_3 \text{ wäre } \mathbf{s} \cdot \mathbf{dec} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{co} \cdot \mathbf{dec} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_3 = \mathbf{n}.$$

Wie erhält man eine solche Decodiermatrix?

Hier gebe ich zu bedenken, daß der „^-1“-Befehl nicht unbedingt sinnvoll ist, da ja gerade herausgefunden werden soll, was diese Operation bedeutet. Es war nun nicht schwer herauszuarbeiten, daß man diese Gleichung als drei „simultane“ lineare Gleichungssysteme auffassen kann und so durch dreimalige Anwendung des „simult“-Befehls die Decodiermatrix dec spaltenweise erhalten kann.

simult	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/8 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ 5/12 \end{bmatrix}$
simult	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7/8 \\ 3/8 \\ -19/24 \end{bmatrix}$

Abb. 4

Einige pfiffige Schüler kamen allerdings während der folgenden Gruppenarbeit von selbst darauf, daß der TI den „^-1“-Befehl kennt und wendeten diesen stolz und ohne Bedenken an.

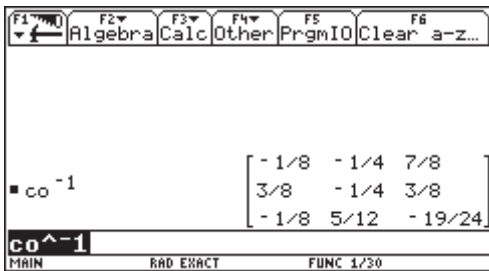


Abb. 5

Nach dem Eintippen der Decodiermatrix dec zeigt eine Probe schnell, ob alles stimmt.

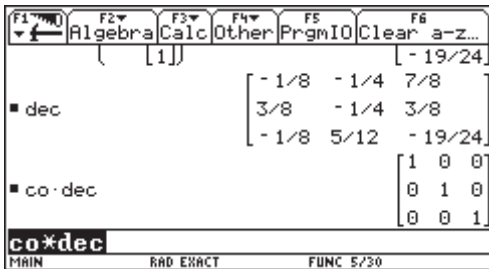


Abb. 6

Nun erhält man schnell die eigentliche Nachrichtenmatrix, der Rest ist von Hand zu machen.

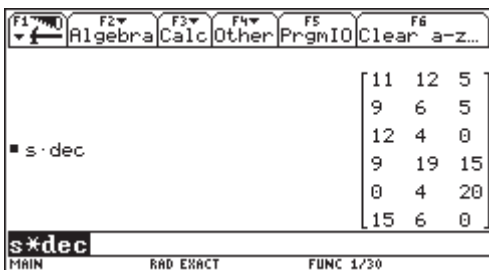


Abb. 7

Die in vier Gruppen aufgeteilten Schüler bekamen nun eine Liste mit jeweils denselben von mir vorgegebenen 10 Codiermatrizen  $co_j$ , die jede Gruppe arbeitsteilig in den Rechner eingeben sollte. Die ersten acht dieser Matrizen sind regulär, die letzten beiden nicht.

Ebenso sollte sich jeder einen Text ausdenken und als Nachrichtenmatrix  $n$  speichern. Das Eintippen ist auch als Hausaufgabe zu dieser Stunde denkbar. Neben den üblichen Standardtexten wie „Guten Morgen“ sollte der durchaus originelle Text „Bistum Aachen“ versendet werden.

Auf einem Zettel verschlüsselt nun jede Gruppe für jede andere eine Nachricht mit einer der ersten acht Codiermatrizen. Der Zettel muß neben der Sendematrix und der Determinante der verwendeten Codiermatrix auch die Nummer derselben enthalten. Dabei ist dafür zu sorgen, daß die Schüler möglichst verschiedene der ersten acht (regulären!) Codiermatrizen verwenden.

Zur Binnendifferenzierung erhalten einzelne besonders schnelle Schüler den Auftrag, unter sich Nachrichten zu verschicken, die mit den singulären Matrizen verschlüsselt wurden.

Beim Entschlüsseln – sei es mit „simult“ oder mit dem „^-1“-Befehl – meldet der TI-92: „singular matrix“.

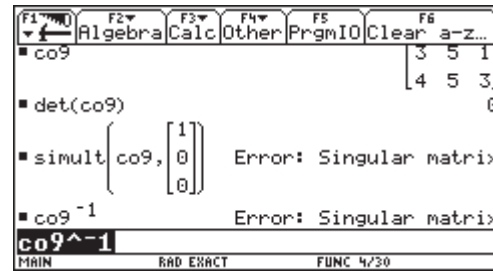


Abb. 8

Während dieser recht lebendigen Arbeit in Gruppen – die natürlich leicht zur Einzel- oder Partnerarbeit modifiziert werden kann – ließ ich die Schüler auf einer Folie die ermittelten Decodiermatrizen in eine Tabelle mit den drei Spalten  $co_j$  /  $\det(co_j)$  /  $dec_j$  eintragen; die ersten beiden Spalten hatte ich bereits ausgefüllt. Mit dem Vorlesen der entschlüsselten Texte wurde die Auswertungsphase eingeleitet:

**Kann man die Decodiermatrizen wieder als Codiermatrizen verwenden?**

Die regulären Matrizen waren so gewählt, daß jeweils die Codiermatrix die Inverse der vorherigen Decodiermatrix war. Es war sofort klar, daß die ersten acht Matrizen wieder zum Codieren verwendet werden konnten. Aber welche Sicherheitskennzahl (Determinante) haben sie?

Mit dem TI konnten die Schüler arbeitsteilig die acht Determinanten schnell ausrechnen, als vierte Spalte der Tabelle auf der Folie eintragen und das Ergebnis war sehr offensichtlich:

**Die Determinante einer Decodiermatrix ist der Kehrwert der Determinante der jeweiligen Codiermatrix!**

Wieso hat nun die Berechnung der Decodiermatrizen im singulären Fall mit dem TI-92 nicht geklappt? Den Schülern war sofort klar, daß dies gar nicht klappen konnte, denn wegen  $\det(co_9) = \det(co_{10}) = 0$  hätten die Determinanten der zugehörigen Decodiermatrizen den Wert  $1/0$  haben müssen!

Den Schülern war zwar bekannt, daß Gleichungssysteme, deren Matrizen die Determinante 0 haben, entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen haben, aber hier ist nicht unmittelbar klar, warum mehrere Decodiermatrizen unmöglich sein sollten. Da der Gauß-Algorithmus noch nicht behandelt war, wäre die Benutzung der TI-Operation „ref“ zum Beweis der Nichtexistenz einer Decodiermatrix nicht sinnvoll gewesen. Das obige Determinantenargument schien mir ein eleganter und mittels TI-92 realistischer Weg (ohne Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes), diese Frage zu klären oder gar nicht erst aufkommen zu lassen. Sie kam auch nicht auf.

Die Eindeutigkeit der Decodiermatrix war durch die Art ihrer Berechnung klar geworden, denn Gleichungssysteme mit  $\det \neq 0$  sind – das war bekannt – eindeutig lösbar, also sind die Spalten der Decodiermatrizen und damit die Matrix selbst eindeutig.

Als Ergebnis der Doppelstunde formulierten die Schüler das

**Fazit:**

- Zu (3,3)-Matrizen mit  $\det \neq 0$  existiert eine eindeutig bestimmte (3,3)-Matrix, die rechtsinvers bezüglich der Matrixmultiplikation ist.
- Man kann sie mit Hilfe dreier (simultan schreibbarer) linearer Gleichungssysteme spaltenweise berechnen.
- Ihre Determinante ist der Kehrwert der ursprünglichen Matrix.
- Also kann zu einer Matrix mit  $\det = 0$  keine solche inverse Matrix existieren.

Als Hausaufgabe kann das Bilden von Produkten der Art  $dec \cdot co$  bei der Beantwortung der Frage helfen, was das Stundenergebnis für einen Nutzen bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen in Matrixform haben könnte.

**Zur Arbeit mit dem TI-92**

Zu Beginn hatten die Schüler zwei Arbeitsblätter zur Matrizenrechnung mit dem TI-92 als Hausaufgabe bekommen. Die Beschränkung auf wenige Befehle machte die Arbeit für die Schüler sehr leicht. Auch die anfangs skeptischen

unter ihnen und der Kurslehrer (ich war Referendar) waren am Ende der Unterrichtsreihe überzeugt, daß gerade im Bereich der Matrizenrechnung ein ständig verfügbares Computeralgebrasystem äußerst sinnvoll und nützlich ist, denn gerade hier fallen viele lästige Rechnungen elementarster Art an (Matrixmultiplikation, Determinantenberechnung), bei denen man nichts lernen kann. Ein heuristisches Vorgehen in diesem Bereich erscheint mir durch Computeralgebra überhaupt erst möglich. Die Möglichkeit, den TI-92 bei Hausaufgaben und in der Klausur einzusetzen, stellt einen deutlichen Vorteil gegenüber dem Arbeiten mit Computeralgebrasystemen im Rechnerraum dar.

Literatur:

Kroll, Vaupel: Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Dümmler-Verlag

Autor:

Achim Kleinfeld  
Birkenstraße 2  
D-47198 Duisburg  
kleinfeld@t-online.de

Ulrich Niehoff, Hameln

# Vergleich numerischer Integrationsverfahren (2. Teil)

Dieser Aufsatz ist das von Herrn Ulrich Niehoff für eine regionale Fortbildung der Bezirksregierung Hannover aufbereitete Ergebnis eines Workshops mit dem Thema „Integrationsverfahren“ nach Ideen von Herrn Dr. Rainer Kühl und Herrn Markus Eberle.

**Phase 2:**

**Die Suche nach einem besseren Verfahren**

Beim Trapezverfahren wird die Fläche unter dem Graphen im Intervall  $[x; x+h]$  angenähert durch:

$$A \approx \frac{f(x)+f(x+h)}{2} \cdot h = h \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(x+h) \right)$$

Die zweite Schreibweise kann man so deuten, daß die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[x; x+h]$  mit den beiden Stützwerten  $f(x)$  und  $f(x+h)$  (an den Stellen  $x$  und  $x+h$ ) linearisiert worden ist und als Gewichtungsfaktoren jeweils 0,5 verwendet wurde. Um nun ein Verfahren zu finden, das eine höhere als die Fehlerordnung zwei hat, kann man im Intervall  $[x; x+h]$  drei äquidistant liegende Stützstellen verwenden, so daß als Ansatz mit den noch zu bestimmenden Gewichtungsfaktoren  $\gamma_0, \gamma_1$  und  $\gamma_2$  entsteht:

$$A \approx h \cdot \left[ \gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f\left(x + \frac{1}{2} \cdot h\right) + \gamma_2 \cdot f(x+h) \right]$$

Für die zunächst einmal verwendete Randfunktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  kann man die Gewichtungsfaktoren durch folgenden Ansatz bestimmen:

$$\int_x^{x+h} x^2 dx - h \cdot \left[ \gamma_0 \cdot x^2 + \gamma_1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}h\right)^2 + \gamma_2 \cdot (x+h)^2 \right] = 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Integrieren:

$$x^2 \cdot h \cdot (1 - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2) + x \cdot h^2 \cdot (1 - \gamma_1 - 2\gamma_2) + h^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \gamma_1 - \gamma_2 \right) = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \\ 1 - \gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

\* Zum Verifizieren leistet der TI-92 natürlich gute Dienste!

Dieses LGS kann mit dem TI-92 gelöst werden, z. B. mit dem in den TI-Nachrichten 2/97 auf S. 7 veröffentlichten Programm „solsyst“ von W. Pröpper.

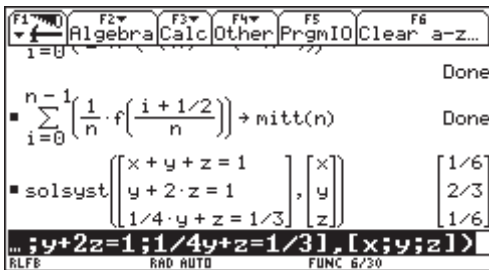


Abb. 7

Die Abbildung 7 zeigt diese Methode, wobei die Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  statt  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  genannt wurden und die drei Gleichungen in etwas weniger schreibaufwendiger Form eingegeben wurden.

Auch die Lösungen  $\gamma_0 = 1/6$ ,  $\gamma_1 = 2/3$  und  $\gamma_2 = 1/6$  sind zu ersehen. Für die Darstellung der Ergebnisse in Brüchen wurde allerdings vorher der Rechenmodus auf „EXACT“ eingestellt. Die Bedingung, daß die Summe der Gewichtungsfaktoren 1 ergeben muß, ist auch hier wieder erfüllt. Als Ergebnis erhalten wir nun folgende Formel:

$$A = h \cdot \left[ \frac{1}{6} \cdot f(x) + \frac{2}{3} \cdot f\left(x + \frac{1}{2} \cdot h\right) + \frac{1}{6} \cdot f(x + h) \right].$$

Dies ist die sogenannte **Simpson-Regel**, die für  $f(x) = x^2$  eine exakte Lösung ist, sogar für beliebige Polynomfunktionen dritten Grades exakt den Flächeninhalt angibt und für andere Randfunktionen eine Näherung darstellt, deren Qualität nun durch die Fortsetzung der Arbeit mit dem TI-92 untersucht werden soll.

Die Randfunktion  $f(x) = x^2$  und das Integrationsintervall  $[0;1]$  werden zunächst einmal beibehalten, um das neue Verfahren an bekannten Inhalten testen zu können. Im „Home-Fenster“ wird dazu die folgende Summenformel eingegeben:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{6n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{2}{3n} \cdot f\left(\frac{i+0.5}{n}\right) + \frac{1}{6n} \cdot f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \rightarrow \text{sim}(n)$$

Um zu zeigen, daß das Simpsonverfahren bei  $x^2$  exakte Werte liefert, kann man Beispielwerte berechnen lassen. Abb. 8 zeigt je zwei im „APPROX-“ und zwei im „EXACT-MODE“ berechnete Werte.

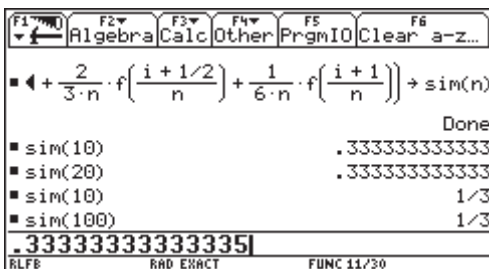


Abb. 8

In die Eingabezeile ist zusätzlich noch das Ergebnis von  $\text{sim}(20)$  hineinkopiert worden, da man so sehen kann, daß der mit max. 12 Nachkommastellen angezeigte Wert 0,333333333333 intern durch Rundungsfehler in der 14.

oder 13. Nachkommastelle von diesem Wert abweichen kann. Der „EXACT-MODE“ ist hier aufschlußreicher. Für eine Fehlerabschätzung zum Simpsonverfahren ist aber das Beispiel der Funktion  $f$  mit  $f(x)=x^2$  nicht geeignet. Deshalb wird es jetzt auf weitere Potenzfunktionen angewendet, da hier einerseits das Simpsonverfahren eine echte Näherung darstellt und andererseits schnell eine exakte Flächeninhaltsbestimmung als Vergleich herangezogen werden kann. Dazu wird im „Home-Fenster“  $x^4 \rightarrow f(x)$  eingegeben und dadurch die alte Festlegung  $x^2 \rightarrow f(x)$  überschrieben. Das Intervall  $[0;1]$  bleibt erhalten.

### Fortsetzung der Tabelle:

Mit „APPS“, „6: Data/Matrix Editor“ und „1: Current“ geht man wieder in die vorhandene Tabelle hinein, um sie um die Werte des Simpsonverfahrens bei  $x^4$  zu erweitern, die in der Spalte „c7“ eingetragen werden.

DATA	mitt(n)	sim bei x^4
	c6	c7
1	.3325	.20000083333
2	.333125	.2000005208
3	.33324074074	.2000001029
4	.33328125	.2000000326
5	.3333	.2000000133
6	.33331018519	.2000000064
7	.33331632653	.2000000035

Abb. 9

Die Abb. 9 zeigt die Wertetabelle hierzu im Vergleich zu den Werten des Mittenrechteckverfahrens in der Anwendung auf  $f(x)=x^2$ . Hier werden schon die Unterschiede in der Annäherungsgeschwindigkeit an die jeweiligen Grenzwerte deutlich. Die „Cell Width“ wurde mit „F1“, „9: Format“ auf den Maximalwert 12 eingestellt. Aus den Spalten „c7“ und „c2“ wird der Plot Nr. 5 erstellt, bei dem in der Abb. 10 außer den Werten des Simpsonverfahrens in Abhängigkeit von  $h$  die Gerade  $y=1/5$  dargestellt ist.

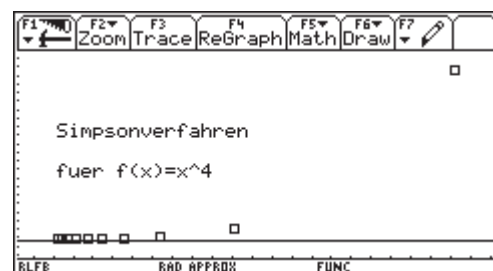


Abb. 10

### Regression zum Simpsonverfahren:

Der Verlauf der Punkte in Abb. 10 zeigt die schnelle Annäherung an den exakten Flächeninhaltswert  $1/5$ . Diese schnelle Annäherung ermutigt zu dem Ansatz einer Regression vierter Ordnung für das Simpsonverfahren. Von der Tabelle aus wird „F5(=Calc)“ eingegeben, in dem sich dann öffnenden Fenster der „Calculation Type“ ausgewählt, hier also „A: QuartReg“ für eine Regression vierter Ordnung und dann für „x“, „c2“ und für „y“ die Tabellenspalte „c7“. Der TI-92 liefert jedoch die Fehlermeldung „Singular matrix“. Die Regression vierter Ordnung muß also anders bearbeitet werden.

Der Ansatz für das Regressionspolynom lautet:

$$p(h) = a \cdot h^4 + b \cdot h^3 + c \cdot h^2 + d \cdot h + e.$$

Als Stützstellen werden die Werte

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{50}, \frac{1}{70} \text{ und } \frac{1}{100}$$

für  $h$  verwendet, entsprechend den Werten 10, 30, 50, 70, und 100 für  $n$ . Das ergibt dann das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^4 & \left(\frac{1}{10}\right)^3 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & \frac{1}{10} & 1 \\ \left(\frac{1}{30}\right)^4 & \left(\frac{1}{30}\right)^3 & \left(\frac{1}{30}\right)^2 & \frac{1}{30} & 1 \\ \left(\frac{1}{50}\right)^4 & \left(\frac{1}{50}\right)^3 & \left(\frac{1}{50}\right)^2 & \frac{1}{50} & 1 \\ \left(\frac{1}{70}\right)^4 & \left(\frac{1}{70}\right)^3 & \left(\frac{1}{70}\right)^2 & \frac{1}{70} & 1 \\ \left(\frac{1}{100}\right)^4 & \left(\frac{1}{100}\right)^3 & \left(\frac{1}{100}\right)^2 & \frac{1}{100} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sim}(10) \\ \text{sim}(30) \\ \text{sim}(50) \\ \text{sim}(70) \\ \text{sim}(100) \end{pmatrix}$$

Das oben erwähnte Programm „solsyst“ wird mit diesem Gleichungssystem nicht fertig<sup>1</sup>. Deshalb soll es mit der vom TI-92 standardmäßig angebotenen Möglichkeit des Befehls „simult“ bearbeitet werden.

Konkrete Eingabe auf dem TI-92: Nach dem Befehlswort „simult“ werden eine runde und dann eine eckige Klammer geöffnet. Danach werden die einzelnen Werte der Koeffizienten, jeweils durch Komma voneinander abgetrennt, eingegeben. Dabei wird zeilenweise verfahren und die Koeffizienten einer Zeile durch ein Semikolon von denen der nächsten Zeile abgetrennt. Ist dies geschehen, wird die eckige Klammer geschlossen, ein Komma gesetzt und dann in einer neuen eckigen Klammer die Elemente des Ergebnisvektors, jeweils durch Semikolon voneinander abgetrennt, eingegeben. Nach Schließen der runden Klammer wird das Ergebnis in der Variablen loesvek abgespeichert. Also:

$$\text{simult}([\text{1/10000}, \text{1/1000}, \text{1/100}, \text{1/10}, \text{1}; \text{1/(30)}^4, \text{1/(30)}^3, \dots], [\text{sim}(10); \text{sim}(30); \dots]) \rightarrow \text{loesvek}$$

Dieses Gleichungssystem kann der TI-92 sogar im exakten Rechenmodus lösen (siehe den Lösungsvektor in Abb. 11) und man erhält als Regressionspolynom:

$$p(h) = \frac{1}{120} \cdot h^4 + \frac{1}{5}$$

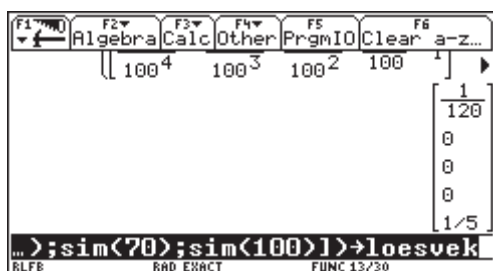


Abb. 11

Damit ist die Regression vierter Ordnung geglückt. Man kann auch schreiben:

$$\text{sim}(h) - 0,2 = \frac{1}{120} \cdot h^4$$

d. h. beim Simpsonverfahren hat man einen Fehler vierter Ordnung. Die Abb. 12 zeigt, wie der Graph dieses Regressionspolynoms durch die schon in der Abb. 10 vorhandenen Punkte des Plots zum Simpsonverfahren verläuft (Außerdem dargestellt: die Gerade zu  $y=1/5$ ).

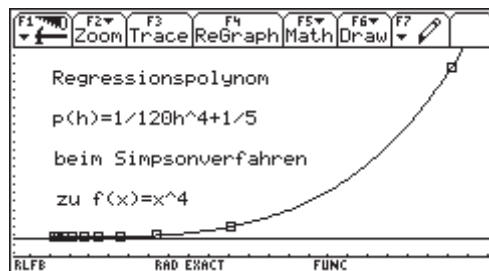


Abb. 12

### Die „Powerregression“ als Variante:

Am Beispiel der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^5$  soll eine Variante aufgezeigt werden, die der TI-92 bietet. Dazu wird im „Home-Fenster“  $x^5 \rightarrow f(x)$  eingegeben und dadurch die zuletzt gültige Belegung  $x^4 \rightarrow f(x)$  überschrieben. Das Intervall  $[0;1]$  bleibt wieder erhalten. Damit wird die Tabelle um die Spalte „c8“ erweitert. Wie bereits oben beschrieben, scheitert die Methode „QuartReg“ auch hier. Deshalb wird noch eine andere Methode ausprobiert. Von der Tabelle aus wird „F5(=Calc)“ eingegeben, als „Calculation Type“, „8: PowerReg“ ausgewählt und dann für „x“ „c2“ und für „y“ die Tabellenspalte „c8“. Der TI-92 liefert ein Fenster mit den Koeffizienten der Regressionsfunktion  $y = a \cdot x^b$  (siehe Abb. 13).

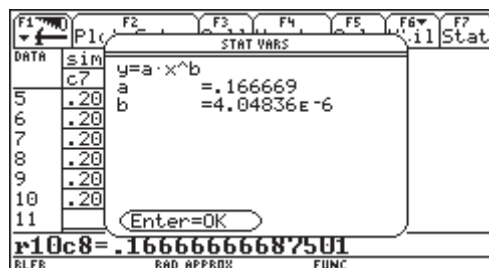


Abb. 13

Die Powerregression des TI-92 setzt also voraus, daß der Graph der Regressionsfunktion durch den Koordinatenursprung verläuft. Deshalb muß in unserem Fall von den Werten des Simpsonverfahrens in der Spalte „c8“ jeweils der Grenzwert  $1/6$  subtrahiert werden. Diese Werte werden in der Spalte „c9“ abgespeichert. Die abermalige Powerregression, nun zu den Spalten „c2“ und „c9“ ausgeführt, liefert die Regressionfunktion, die als „y7“ automatisch abgespeichert wurde und in Abb. 14 zu sehen ist.

<sup>1</sup> Siehe die redaktionelle Anmerkung am Schluß des Beitrags

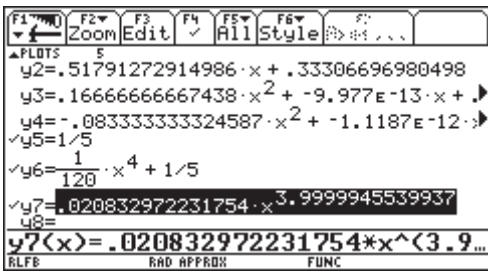


Abb. 14

Die Regression der Ordnung vier wird bestätigt. Das Hilfsmittel Powerregression ist also im Vergleich zu der vorangegangenen Berechnung des Regressionspolynom 4. Grades mittels eines 5x5 LGS sehr elegant, setzt aber voraus, daß der Grenzwert (hier 1/6) bekannt ist. Genau dies ist aber nicht der Fall, wenn man nun den Bogen zum Anfang schließt und mit den guten Erfahrungen beim Simpsonverfahren sich wieder der Funktion f mit  $f(x) = e^{-x^2}$  zuwendet.

**Das Simpsonverfahren bei  $e^{-x^2}$ :**

Wie oben mehrfach beschrieben wird im „Home-Fenster“  $e^{-x^2} \rightarrow f(x)$  eingegeben und dann damit die Tabellenspalte „c10“ berechnet. Auch hier wird analog zu dem oben beschriebenen Verfahren mit Hilfe eines 5x5 LGS das Regressionspolynom 4. Grades bestimmt. Dazu muß nur der entsprechende „simult“-Befehl aus dem „History“-Bereich mit „ENTER“ in die Eingabezeile kopiert werden und dort durch „ENTER“ nochmals ausgeführt werden.

Bei dieser Funktion kann der TI-92 das Gleichungssystem nicht mehr exakt, sondern nur noch im „APPROX-MODE“ lösen. Die Koeffizienten des Regressionspolynoms zeigt der in Abb. 15 dargestellte Lösungsvektor.

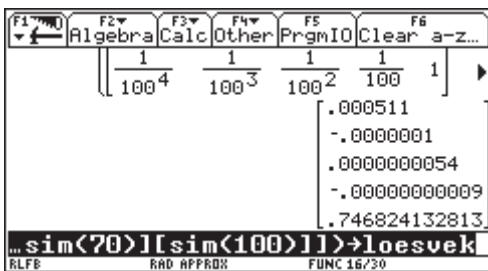


Abb. 15

Unter Vernachlässigung der sehr kleinen Koeffizienten b, c und d kann man dann für das Regressionspolynom schreiben:

$$p(h) \approx 5,11 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132813 \quad \text{bzw.}$$

$$\text{sim}(h) \approx 5,11 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132813$$

d.h. die Fehlerordnung vier für das Simpsonverfahren wird bestätigt und als Näherungswert

$$\text{für } \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ ergibt sich hier der Wert } 0,746824132813,$$

im Vergleich zur direkten Integralberechnung (vgl. Abb. 1 im Heft 1/1999): 0,746824132812

**Ausblick:**

Das Verfahren von Heun arbeitet im Gegensatz zum Simpsonverfahren mit nur zwei Stützstellen, die aber nicht mehr äquidistant liegen. Der Ansatz zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall  $[x; x+h]$  lautet dann:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx \approx h \cdot [\gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f(x + \alpha \cdot h)]$$

Führt man den bei der Herleitung der Gewichtungsfaktoren für die Simpsonregel beschriebenen Ansatz an der Funktion f mit  $f(x)=x^2$  durch, so erhält man

$\gamma_0 = 1/4, \gamma_1 = 3/4$  und  $\alpha = 2/3$ , was mit dem Integrationsintervall  $[0;1]$  zu folgender Eingabe in den TI-92 führt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{4n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{3}{4n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{2}{3n}\right) \right) \rightarrow \text{heu}(n)$$

Die entsprechenden Werte ergeben die Spalte „c11“ der Tabelle. Aus „c11“ und „c2“ entsteht der Plot Nr. 9, zu dem mit „F5(=Calc)“ als „Calculation Type“, „3: CubicReg“ ausgewählt wird und dann für „x“ „c2“ und für „y“ die Tabellenspalte „c11“. Die Abb. 16 zeigt die Ausgabe der zugehörigen Regressionsfunktion und die Abb. 17 den Plot mit den Werten zum Heunverfahren bei  $f(x) = e^{-x^2}$  sowie den Graphen der gerade zuvor berechneten und abgespeicherten Regressionsfunktion.

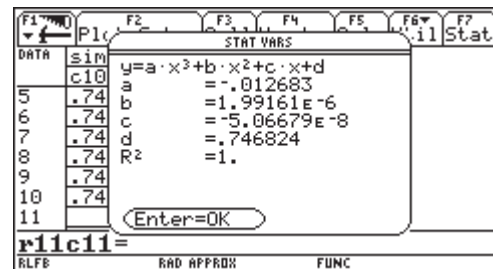


Abb. 16

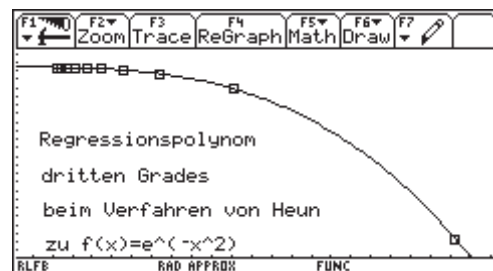


Abb. 17

Das Verfahren von Heun hat also bei nur zwei Stützstellen einen globalen Fehler der Ordnung drei.

Auch die Behandlung der 3/8-Regel (die von Newton „pulcherrima“ genannt wurde) ist mit dem TI-92 möglich. Hier wird im Unterschied zur Simpsonregel mit vier statt drei (aber immer noch äquidistanten!) Stützstellen gearbeitet. Der Ansatz zur Berechnung der Fläche unter dem Graphen der Funktion f im Intervall  $[x; x+h]$  lautet dann:

$$A \approx h \cdot \left[ \gamma_0 \cdot f(x) + \gamma_1 \cdot f\left(x + \frac{1}{3} \cdot h\right) + \gamma_2 \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h\right) + \gamma_3 \cdot f(x+h) \right]$$

Führt man den für die Herleitung der Gewichtungsfaktoren bei der Simpsonregel beschriebenen Ansatz an der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  durch, so erhält man  $\gamma_0 = 1/8$ ,  $\gamma_1 = 3/8$ ,  $\gamma_2 = 3/8$  und  $\gamma_3 = 1/8$ , was mit dem Integrationsintervall  $[0;1]$  zu folgender Eingabe in den TI-92 führt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{3}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{3n}\right) + \frac{3}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{2}{3n}\right) + \frac{1}{8n} \cdot f\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) \right) \rightarrow \text{drei}(n)$$

Die entsprechenden Werte ergeben sich mit der immer noch im TI-92 gültigen Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{-x^2}$  die Spalte „c12“ der Tabelle. Da das Simpsonverfahren schon die Fehlerordnung vier hat, ist nicht zu erwarten, daß hier eine kleinere Fehlerordnung vorliegt. Die „Powerregression“ wäre allerdings wieder nur möglich, wenn man z.B. den Wert  $\text{sim}(100)$  von allen Werten der Spalte „c12“ subtrahiert. Wir verfahren anders und versuchen, wie beim Simpsonverfahren auch, ein Regressionspolynom vierter Ordnung mit Hilfe des „simult“-Befehls.

`simult([1/10000,1/1000,1/100,1/10,1;1/(30)^4,1/(30)^3,....],[drei(10);drei(30);....]) → loesvek`

Die Abb. 18 zeigt die Koeffizienten des Regressionspolynoms im Lösungsvektor. Unter Vernachlässigung der sehr kleinen Koeffizienten  $b$ ,  $c$  und  $d$  kann man dann für das Regressionspolynom schreiben:

$$p(h) \approx 2,267 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132812 \quad \text{bzw.}$$

$$\text{drei}(h) \approx 2,267 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 + 0,746824132812$$

d.h. die Fehlerordnung vier für die 3/8-Regel wird bestätigt

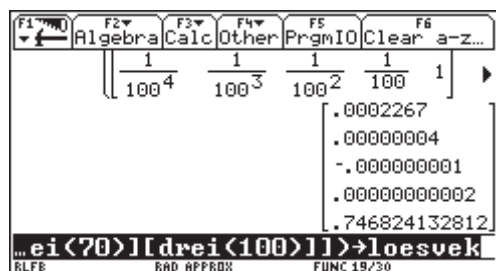


Abb. 18

Die Erhöhung der Stützstellenanzahl hat also im Vergleich zum Simpsonverfahren keine Erhöhung der Fehlerordnung gebracht. Dies steht auch im Einklang mit der mathematischen Theorie, die hierzu besagt:

Bei einem Verfahren mit äquidistanten Stützstellen ist die Fehlerordnung um zwei größer als der Grad des verwendeten Newtonschen Interpolationspolynoms, wenn dieser **gerade** ist. Ist der Grad des Interpolationspolynoms **ungerade**, so ist die Fehlerordnung nur um eins größer als dieser Grad.

Dazu noch einmal die Verhältnisse bei Simpson- bzw. 3/8-Regel in tabellarischer Form:

Verfahren	Stützstellenanzahl	Grad des Interpolationspolynoms	Fehlerordnung des Verfahrens
Simpsonregel	3	2	4
3/8-Regel	4	3	4

Autor:  
Ulrich Niehoff,  
Grüttnerstr.3, D – 31785 Hameln

**Zwei Anmerkungen der Redaktion:**

1. Entgegen der Meinung des Verfassers können alle hier mit der `simult` Funktion gelösten Gleichungssysteme auch mit der Funktion `solsyst` gelöst werden. Entscheidend ist nur der Ansatz:

Zuerst müssen die Gleichungen deklariert werden.

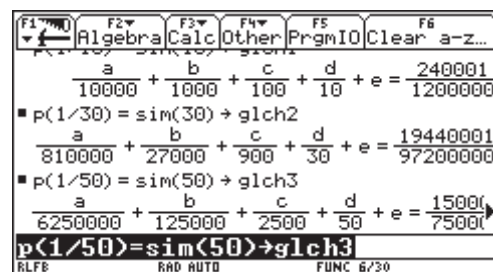


Abb. 1

Dabei kann bequem mit der Editiermöglichkeit des TI-92 gearbeitet werden. Dann kann erst der Lösungsansatz mit `solsyst` erfolgen.

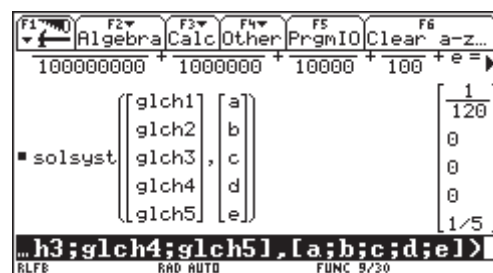


Abb. 2

Bei der Potenzfunktion kommt die Lösung wie in Abb. 11 auch im Exact- bzw. Auto-Mode.

Für die im Beitrag besprochene e-Funktion muß allerdings im Approx-Mode gearbeitet werden.

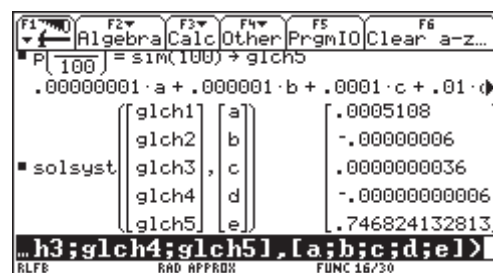


Abb. 3

Der Lösungsvektor stimmt in den entscheidenden Koeffizienten mit denen der Abb. 15 überein.

**(Vorsicht!** Wenn man hier im Auto-Mode arbeitet, besteht die Gefahr, dass sich der TI-92 „verklemt“ und nur nach einem gewalttätigen Reset (d.h. Unterbrechen der Spannungsversorgung - was einen Verlust aller Daten bedeutet!!) wieder ins Leben zurückrufen läßt.)

2. Die in diesem Beitrag behandelten Integrationsverfahren können größtenteils auch mit dem Programm integ(), das dem bei bk-teachware verlegten Büchlein

**J. Böhm, W. Pröpper:**

Einführung des Integralbegriffs mit dem TI-92, ISBN 3-901769-21-3 auf Diskette beigefügt ist, graphisch, numerisch und symbolisch veranschaulicht werden.

Heiko Knechtel

## Abituraufgabe Niedersachsen 1998

### Aufgabe 3

Die Poisson-Verteilung und die Normalverteilung werden häufig als Näherung für die Binomial-Verteilung benutzt.

a) In einem Zeitschriftenartikel wird im Rahmen einer Untersuchung von sogenannten Light-Zigaretten gesagt, daß ca. 32 Millionen Bundesbürger Raucher sind und daß es durch die gesundheitsschädliche Wirkung des Rauchens pro Jahr bei ca. 250.000 Rauchern zu verfrühtem Tod kommt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß von 300 zufällig ausgewählten Rauchern

(i) genau 4

(ii) weniger als 2

im folgenden Jahr infolge der schädlichen Wirkung des Rauchens verfrüht sterben.

Geben Sie einen exakten Term und den zugehörigen Wert an. Vergleichen und bewerten Sie die Näherungswerte nach Poisson bzw. de Moivre-Laplace und den exakten Wert!

b) In einem Fernsehkrimi wurde ein Trickbetrug gezeigt. In der darauffolgenden Woche wurden nach dem selben „Muster“ 12 Delikte bei der Polizei gemeldet. Kann man dem Fernsehredakteur einen Vorwurf machen, wenn normalerweise nur 4 solche Delikte pro Woche auftreten?

c) Die nebenstehenden Grafiken zeigen den Verlauf des prozentualen Fehlers bei der Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung bzw. durch die Näherungsformel von de Moivre-Laplace.

- Bestimmen Sie für  $n=10000$  und  $p=0,005$  die exakten und die genäherten Wahrscheinlichkeitswerte nach Poisson bzw. de Moivre-Laplace für die Werte von  $k=35; 45; 50$

- Vergleichen Sie diese Werte mit den untenstehenden Grafiken und interpretieren Sie die Grafiken.

- Wieviel Prozent aller Werte sind in einem  $2\text{-}\sigma$ - Bereich um  $\mu$  zu erwarten?

- Beurteilen Sie den prozentualen Fehler beider Näherungsverfahren und geben Sie eine Empfehlung bzgl. der Anwendung der Näherungsverfahren (für diese Werte von  $n$  und  $p$ ).

- Wägen Sie ab, in welchen Fällen allgemein derartige Approximationen bei Einsatz eines Taschencomputers sinnvoll bzw. überflüssig sind.

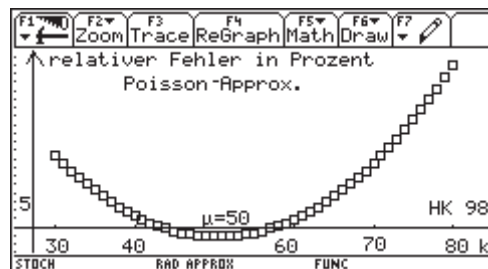


Abb. 1

relativer Fehler Poisson

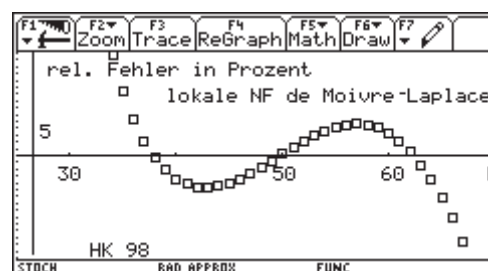


Abb. 2

relativer Fehler de Moivre-Laplace.

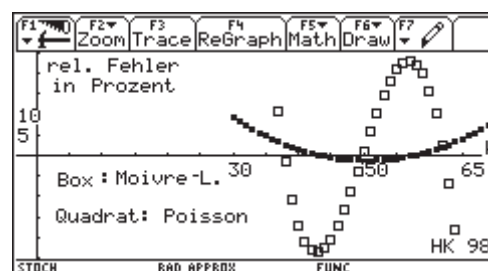


Abb. 3

rel. Fehler - Vergleich

## Lösung und Erwartungshorizont

3	Erwartete Lösungswege und Ergebnisse	Vorgesehene Bewertung
a	Übersetzung der angegebenen Daten in ein entsprechendes Wahrscheinlichkeitsmodell $p, n$ entnehmen, $\mu$ bestimmen $p(X=4)=12,09\%$ $p(x<2)=31,97\%$ jeweils exakt und mit Näherung bestimmen Vergleich der Werte Bewertung unter Beachtung der jeweiligen Faustformel	13
b	Text in ein entsprechendes Wahrscheinlichkeitsmodell (Poisson Verteilung) übersetzen $\mu=4$ als einziger Parameter dem Text entnehmen $p(X\geq 12)=0,09\%$ nach Poisson bestimmen ( $X\geq 12$ , da Dunkelziffer in der Verbrechenaufklärung!) Bewertung des Ergebnisses im Textzusammenhang	6
c	Werte mit dem TC bestimmen relativen Fehler bestimmen und mit Grafik in Abgleich bringen Interpretation der Grafik $p( X-\mu \leq 2\sigma)=96,1\%$ $\mu=50$ als hervorragendes Merkmal in der Argumentation erkennen, kritische Reflexion der Faustformeln für beide Näherungen, Bereich für gute Näherungen erkennen und bewerten Verallgemeinerung bzgl. TC-Einsatz	14

### Hinweise zum Einsatz des TC und zu der Aufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler haben 2 Schuljahre den TI-92 vollintegriert im Unterricht, zu Hause und in den Klausuren eingesetzt. Hierbei mußten sie Umfang und Zeitpunkt des Einsatzes jeweils eigenständig entscheiden. Der Gesamtvorschlag umfasst 3 Aufgaben aus den Themengebieten Analysis und Stochastik. Grundthema dieser Aufgabe sind stochastische Näherungsverfahren, die bei Einsatz eines TC nur noch eingeschränkten Sinn machen. Dies soll in dieser Aufgabe erarbeitet werden.

a) Die Übersetzung des Textes ist nicht schwierig und im Unterricht geübt. Bei den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten müssen die Werte mittels TC oder Tabelle ermittelt werden. Bei der Näherung mit de Moivre-Laplace wird mit der entsprechenden Korrekturformel der Zahlenwert noch „schlechter“.

b) Die Erkennung der Poissonverteilung muß textlich erschlossen werden. Die Bestimmung des Wertes ist elementar, die Interpretation ist Reorganisation.

c) Derartige Grafiken sind im Unterricht zwar nicht behandelt worden, aber sie sind weitgehend selbsterklärend. Trotzdem  $\mu$  sehr groß ist, ist die Poisson-Näherung in weiten Teilen besser als die Moivre-Laplace-Näherung. Dies kann aus der Grafik und den ermittelten Werten abgeleitet werden. Hier muß eine Auseinandersetzung mit der Faustformel textlich erfolgen. Wenn ein Schüler auf die besondere Form der beiden Fehlergraphen im Sinne der Aufgabe 1 (Ausgleichfunktionen; siehe TI-Nachrichten Ausgabe 1/99) eingeht, ist dies als zusätzliche Transferleistung zu werten! Ein sinnvoller Einsatz der Näherungsformeln liegt in dem Bereich, der kleiner als  $\mu\pm 2\sigma$  ist. In diesem Bereich liegt aber der größte

Teil der Werte. Die Verallgemeinerung bzgl. Sinn und Nutzen derartiger Näherungsformeln ist im Unterricht nur am Rande angesprochen worden, die Argumentation wird durch die vorherigen Untersuchungen noch unterstützt.

### Lösungshinweise:

In Aufgabenteil a) muß eigenständig unter Berücksichtigung der Faustformel eine Bewertung vorgenommen werden. Hierbei können sich nach Lösung von Aufgabenteil c) bzgl. der Verwendung von Faustformeln neue Aspekte ergeben.

In Aufgabenteil b) ist die Übersetzung des Problems die wesentliche Leistung. Die Erkenntnis, daß man eine Bereichswahrscheinlichkeit bestimmen muß, ist nicht trivial!

Die zentrale Leistung in Aufgabenteil c) ist die „Gesamt-schau“ des Problems. Das klassische Näherungsverfahren nach de Moivre-Laplace, das aufgrund der Faustformel ausgewählt wird, führt hier in weiten Bereichen zu deutlich schlechteren Ergebnissen als die Näherung nach Poisson. Eine Begründung dafür wird hier nicht erwartet, es soll lediglich eine Sensibilisierung für die Kritik an entsprechenden Faustformeln erreicht werden. Eine Extrapolation der Graphen durch entsprechende Regressionsgraphen kann hierbei die Argumentation unterstützen.

---

Autor:  
 Heiko Knechtel, Ratsgymnasium  
 Büschingstr. 37, D-31655 Stadthagen  
 Hknechtel@aol.com

# Funktionale Zusammenhänge mit Cabri Geometry II™

Mit der Zuggeometrie von Cabri Geometry II™ lassen sich nicht nur geometrische Konstruktionen dynamisch verändern, es lassen sich auch funktionale Zusammenhänge visualisieren und untersuchen. Dies unterstützt Cabri besonders durch seine Fähigkeit „Ortskurven“ aus der Bewegung von Objekten abzuleiten. Damit eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten, Schülerinnen und Schüler zu eigenständigen Entdeckungen und Untersuchungen von Kurven anzuregen. Der folgende Artikel möchte dazu mit Beispielen und Hinweisen einige Anregungen geben.

Wir erzeugen einen Kreis mit dem Durchmesser AB und konstruieren das Dreieck ABC dessen Punkt C ebenfalls auf der Kreislinie liegen soll. Betrachten wir nun die Fläche des Dreiecks ABC, so ändert sich ihr Wert, wenn wir mit C die Kreislinie durchlaufen.

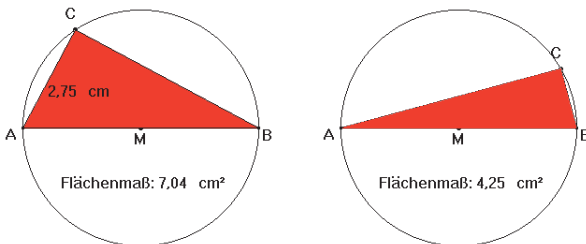


Abb. 1

Wie ändert sich diese Fläche in Abhängigkeit von der Entfernung des Punktes C von Punkt A? Dazu lassen wir uns von Cabri die Maßzahl der Dreiecksfläche und die Länge der Strecke AB ausgeben. Jetzt können wir die Veränderungen an den entsprechenden Zahlenwerten während des Ziehens von Punkt C „in Echtzeit“ ablesen.

Einen „funktionalen“ Überblick erhalten wir jedoch erst, wenn wir die Flächenmaßzahl in Abhängigkeit von der Streckenlänge in ein Koordinatensystem einzeichnen. Dies lässt sich in Cabri folgendermaßen durchführen:

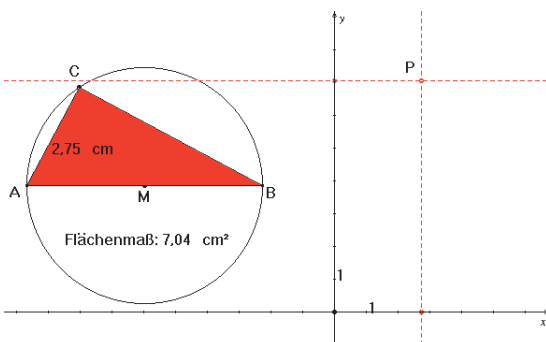


Abb. 2

Die Maßzahl der Streckenlänge übertragen wir mit dem Werkzeug „Maß übertragen“ auf die x-Achse des vorher sichtbar gemachten Koordinatensystems. Die Flächenmaßzahl übertragen wir auf die y-Achse. Mit zwei zu den Achsen orthogonalen Hilfsgeraden konstruieren wir den zugehörigen Punkt P. Anschließend verstecken wir der Übersichtlichkeit halber die Hilfsgeraden und die Punkte auf der x- und y-Achse mit dem Werkzeug „Ausblenden/Zeigen“.

Da die Konstruktion eines Punktes im Koordinatensystem mit vorgegebenen Koordinatenwerten des Öffnen benötigt wird, erstellen wir aus der obigen Konstruktion ein Makro. Seine Startobjekte sind zwei Zahlenwerte x und y, sowie ein Koordinatensystem. Zielobjekt ist der Punkt P(x/y).

Bewegen wir nun den Punkt C, so wandert P im Koordinatensystem umher. Die Kurve aller Punkte, die P dabei durchläuft, lassen wir uns mit dem Werkzeug „Ortskurve“ von Cabri konstruieren.

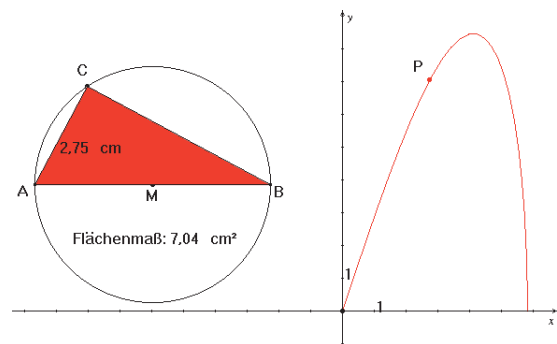


Abb. 3

Offensichtlich entsteht ein Funktionsgraph mit einem Maximum.

Unterrichtlich ergeben sich jetzt interessante Fragestellungen, die Schülerinnen und Schüler selbständig auf graphischen und auf algebraischen Wegen lösen können.

Typische Fragen wären etwa:

- Wann wird das Maximum erreicht?
- Welche Funktion steckt hinter dem Graphen?
- Wie ändert sich der Graph, wenn der Kreisdurchmesser kleiner (größer) wird?

Oder weitergehend:

- Was ändert sich, wenn AB kein Durchmesser (keine Sehne) ist?
- Welche Kurven ergeben sich, wenn C nicht auf einem Kreis sondern z. B. auf einem Quadrat mit der Seite AB bewegt wird?

Die folgenden zwei Abbildungen, ergaben sich im Unterricht aus den beiden letzten Fragestellungen. Es war zu beobachten, daß solche Visualisierungen für Schülerinnen und Schüler ganz ungewohnte und nicht einfach zu verstehende aber sehr motivierenden Untersuchungsobjekte darstellen.

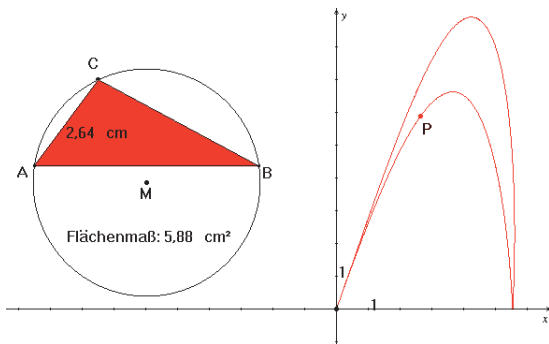


Abb. 4

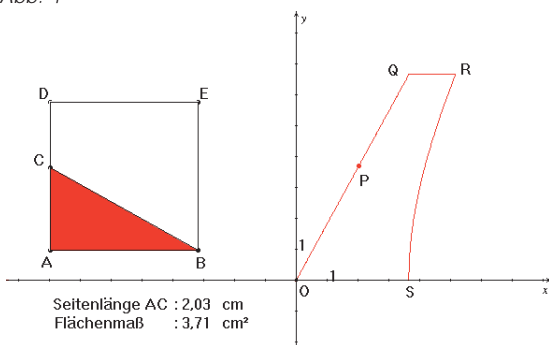


Abb. 5

Cabri bietet über das Werkzeug „Berechnen“ die Möglichkeit, Graphen für Funktionsterme zu zeichnen. Damit lassen sich algebraisch hergeleitete Funktionsterme der Ortskurve verifizieren.

Wir führen dies hier exemplarisch für den Abschnitt RS der obigen Ortskurve vor. Der Punkt C bewegt sich dann gerade auf der Strecke EB des Quadrats. Eine einfache Überlegung zeigt, dass in diesem Fall für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt:  $A(x) = 0,5\sqrt{x^2 - a^2}$ , wobei x die Länge der Strecke AC und a die Länge der Quadratseite AB ist.

Um den Graph zu  $A(x)$  in unser Koordinatensystem einzuzichnen gehen wir wie folgt vor:

- Wir konstruieren eine genügend große Strecke UV und legen darauf einen Punkt X fest.
- Der Abstand UX soll der veränderbare x-Wert des Funktionsterms  $A(x)$  sein.
- Mit dem Werkzeug „Berechnen“ definieren wir den Funktionsterm  $A(x)$  in Abhängigkeit vom Abstand UX gemäß der angegebenen Formel.
- Wir übertragen (mit dem Makro) den Abstand UX und den Wert des Funktionsterms als Punkt  $(x/A(x))$  in das Koordinatensystem.

- Ein „Ziehen“ an X verändert x und damit den Funktionswert  $A(x)$  und die Lage des Punktes. Mit Hilfe des Werkzeuges „Ortskurve“ können wir Cabri den Funktionsgraph zeichnen lassen.

Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis und die Korrektheit des hergeleiteten Funktionsterms

$$A(x) = 0,5\sqrt{x^2 - a^2}$$

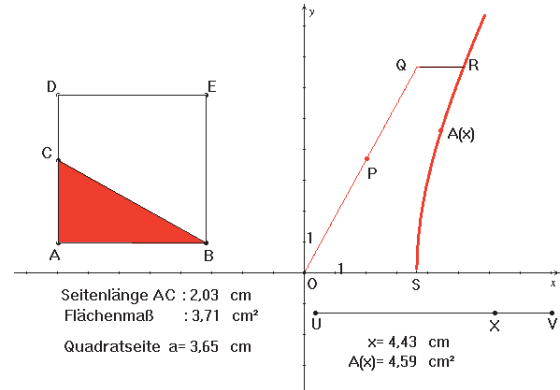


Abb. 6

Das hier vorgestellte Verfahren zur Konstruktion eines Funktionsgraphen ist für jede Funktion, deren Term sich mit dem Werkzeug „Berechnen“ definieren lässt, durchführbar.

Wir wenden es im Folgenden auf eine allseits bekannte Extremwertaufgabe an:

**Gegeben zwei Punkte A und B auf der gleichen Halbebene einer Geraden g, sowie ein dritter, auf der Geraden g beweglicher Punkt C. Wo muß dieser liegen, damit die Summe der Entfernungen von A nach C und von C nach B minimal ist.**

Zunächst konstruieren wir die Vorgaben. Nehmen wir nun als x-Wert die Entfernung des Punktes C zum Lotfußpunkt F des Punktes A auf der Geraden g und als y-Wert die Entfernungssumme, so können wir wieder eine Ortskurve des zugehörige Punktes  $P(x/y)$  konstruieren:

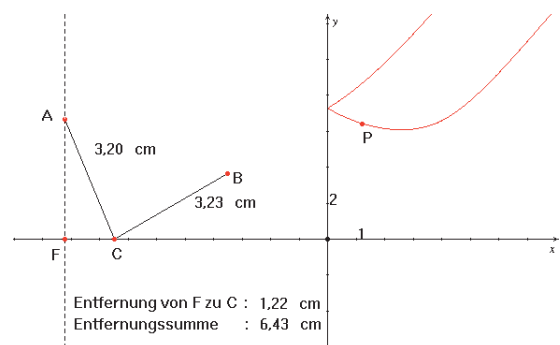


Abb. 7

Auf den ersten Blick überrascht das Ergebnis (nicht nur Schülerinnen und Schüler). Einerseits ist zu erkennen, daß P minimal werden kann, andererseits scheint der oberhalb von P verlaufende Ast der Kurve nicht recht verständlich. Dies klärt sich aber schnell auf, wenn wir C be-

wegen und sich so der Weg von P beobachten läßt. Der obere Ast wird genau dann durchlaufen, wenn C über F hinweg nach links gezogen wird.

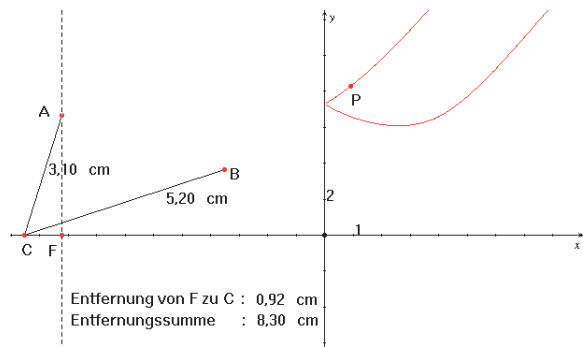


Abb. 8

Liegt C links von F so bedeutet dies (funktional gesehen) einen negativen x-Wert für P, der jedoch als Entfernung zweier Punkte von Cabri als positiver Wert gemessen wird. Der obere Kurvenast läßt sich somit als ein an der y-Achse gespiegelter Teil eines Funktionsgraphen interpretieren.

Wie lautet nun der zugehörige Funktionsterm?

Eine Berechnung des Zusammenhangs zwischen der Entfernung von C zu F und der Entfernungssumme liefert das folgende Ergebnis:  $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$  wobei die Konstanten a, b und c die in der Abbildung 9 festgehaltenen Bedeutungen haben.

Soll der Graph von  $f(x)$  zur Kontrolle eingezeichnet und dabei auch negative x-Werte verarbeitet werden, so müssen wir zu einem kleinen Trick greifen.

Zur Festlegung und Variation der x-Koordinate wird wieder eine Strecke UV vorgegeben und durch einen verschiebbaren Punkt X geteilt. Als x-Wert nehmen wir jetzt aber nicht mehr die Länge der Strecke UX sondern die Differenz  $UX - XV$  der Streckenlängen UX bzw. XV. In der Mitte der Strecke UV hat dann x den Wert Null, recht davon ist x positiv und links davon negativ.

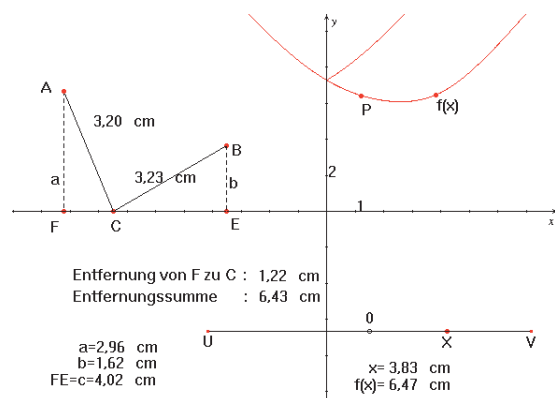


Abb. 9

Zum Abschluß ein Beispiel aus der geometrischen Optik. Mit wenig Aufwand lassen sich die Verhältnisse bei der Abbildung durch eine Konvexlinse darstellen. Durch dynamische Veränderung kann der Einfluß von Gegen-

standsgröße, Gegenstandsweite und Brennweite auf das Bild studiert werden.

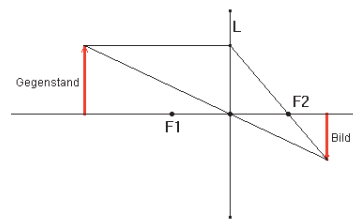


Abb. 10

Trägt man nur in einem Koordinatensystem Gegenstandsgröße und Bildgröße gegeneinander auf so ergibt sich folgendes Bild:

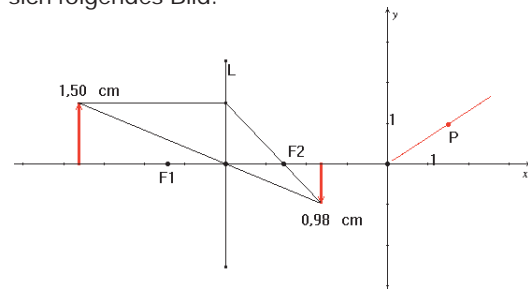


Abb. 11

Durch welche Variation entsteht dabei die Ortskurve des Punktes P? Offensichtlich wurde hier die Gegenstandsgröße verändert, denn die Bildgröße B ist gemäß „Strahlen“-Satz  $\frac{B}{b} = \frac{G}{g}$  bei fester Bild- und Gegenstandsweite zur Gegenstandsgröße G proportional.

Weitergehende Fragen liegen auf der Hand:

- Was ändert sich an der Ortskurve, wenn wir die Gegenstandsweite oder die Brennweite verändern?
- Welche Kurve ergibt sich, wenn man die Bildweite gegen die Gegenstandsweite abträgt.
- Was ändert sich im letzten Fall, wenn wir die Brennweite kleiner oder größer machen?

Die zur vorletzten Frage konstruierte Abbildung sei hier ohne Kommentar wiedergegeben. Leserinnen und Leser mögen die Konstruktion nachfertigen und die Bewegung des Punktes P beobachten und erklären.

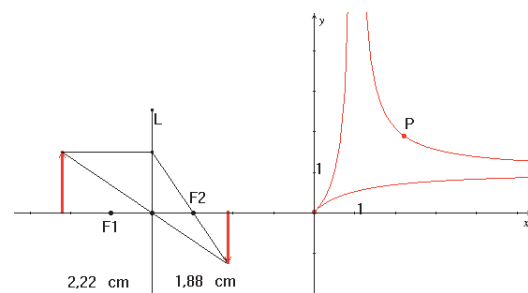


Abb. 12

Ohne Zweifel bieten die im Rahmen dieses Aufsatzes nur ansatzweise darstellbaren Möglichkeiten, mit dynamischer Geometriesoftware funktionale Untersuchungen zu verknüpfen und neue Fragestellungen zu initiieren, ein

weites Feld für einen unterrichtlichen Einsatz auf verschiedenen Klassenstufen. Die Beschäftigung mit solchen Fragestellungen, ihre konstruktiven und algebraischen Lösungen, sowie die Interpretationen und die Erklärungen der sich dabei ergebenden Graphen, fördern und fördern bei unseren Schülerinnen und Schülern wert-

volle Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen.

Autor:  
Gregor Noll, Rhein-Gymnasium Sinzig,  
Marktplatz 4a, D-53579 Erpel / Rhein,  
odsnoll@uni-koblenz.de

Josef Rolfs

# Transrapid - von Hamburg nach Berlin ?

Breiten Raum bei der Bearbeitung dieser Fragestellung in meinem Mathematikunterricht des Leistungskurses nahm das Mathematisieren bzw. Modellieren ein. Wir einigten uns auf eine Planung, die völlig frei von finanziellen Begrenzungen, natürlichen Gegebenheiten wie Höhenzügen, Flußläufen und von bereits vorhandenen Leitlinien (Autobahn, Eisenbahn, Kanal,...) sein sollte und nur mit der Forderung nach möglichst geringer Gesamtkrümmung und Kürze der Trasse durchgeführt werden sollte. Von den Schülern gefordert wurden Zwischenstopps in Lübeck, in Schwerin und in Parchim (damals sollte dort ein Großflughafen entstehen).

Aus dem Atlas wurden folgende Daten gewonnen:

<b>Hamburg:</b>	<b>10,0° O</b>	<b>53,6° N</b>	<b>Abkürzung H</b>
<b>Lübeck:</b>	<b>10,8° O</b>	<b>53,8° N</b>	<b>Abkürzung L</b>
<b>Schwerin:</b>	<b>11,2° O</b>	<b>53,6° N</b>	<b>Abkürzung S</b>
<b>Parchim:</b>	<b>11,6° O</b>	<b>53,4° N</b>	<b>Abkürzung P</b>
<b>Berlin:</b>	<b>13,2° O</b>	<b>52,5° N</b>	<b>Abkürzung B</b>

Ein vereinfachtes Modell ergab dann in einem ebenen x-y-Koordinatensystem mit dem 52,5°N-Breitenkreis als x-Achse, dem 10,0°O-Längengrad als y-Achse, den Einheiten 1 LE = 0,2°O (x-Achse) und 1 LE = 0,1°N (y-Achse) und der groben Annahme 1 LE = 13 km die folgende Aufgabe: **Lege durch die Punkte H(0/11), L(4/13), S(6/11), P(8/9) und B(16/0) einen möglichst kurzen Bogen mit möglichst geringer Gesamtkrümmung.**

Die Eingabe der Punkte erfolgt im Data/Matrix-Editor als Datafeld mit den x-Koordinaten in der c1-Spalte und den y-Koordinaten in der c2-Spalte. Unter dem Plot-Setup kann man dann die folgende Darstellung der Punkte festlegen und ggf. nach ZoomData dem Display optimal anpassen.

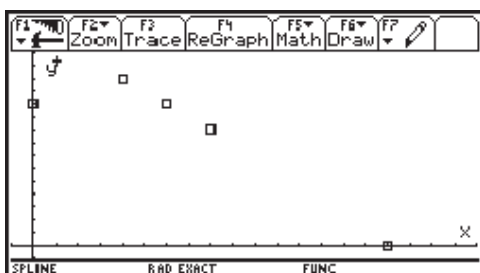


Abb. 1

## Streckenzug

Die kürzeste Linie ist natürlich der Streckenzug HLSPB mit ca. 22,1706 LE  $\approx$  288 km. Die Übergänge sind jedoch weder glatt noch ruckfrei. Man müßte in Lübeck und Parchim Drehscheiben zum Ändern der Zugrichtung bereitstellen.

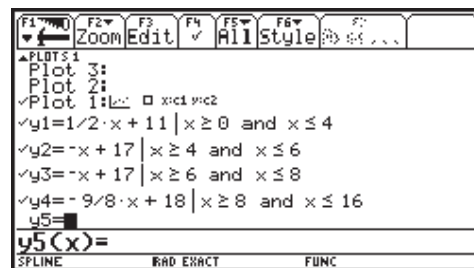


Abb. 2

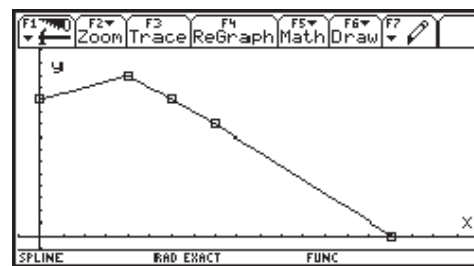


Abb. 3

## Stützstellenpolynom

Da die Kurve durch 5 Punkte gehen muß, ist ein Polynom 4. Grades zu bestimmen. Die Funktion ist überall beliebig oft diffbar, und so ist die Kurve überall glatt und weist keine Krümmungssprünge auf.

$$p(x) = -\frac{31}{15360}x^4 + \frac{173}{2560}x^3 - \frac{1483}{1920}x^2 + \frac{211}{80}x + 11$$

mit  $0 \leq x \leq 16$

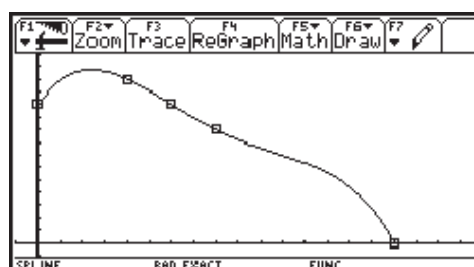


Abb. 4

<sup>1</sup> Die Koeffizienten des Polynoms können einfach mit dem Verfahren ermittelt werden, das in der Anmerkung zum Beitrag von Herrn Niehoff auf S. 23 beschrieben ist.

Die Berechnungen liefern als maximale Krümmung ca. 0,751006 und somit als minimalen Krümmungskreisradius ca. 1,33 LE. Die Gesamtkrümmung beträgt ca. 3,09201, ist also etwa vergleichbar mit der eines Halbkreises oder der Normalparabel. Schließlich ist die Kurve ca. 23,8045 LE  $\approx$  309,5 km lang.

### Splinefunktionsbogen

Für einen natürlichen kubischen Spline ergibt sich folgender Ansatz:

$$sp(x) = \begin{cases} sp1(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ sp2(x) & \text{für } 4 \leq x \leq 6 \\ sp3(x) & \text{für } 6 \leq x \leq 8 \\ sp4(x) & \text{für } 8 \leq x \leq 16 \end{cases}$$

mit den Termen

$$sp1(x) = a1 \cdot x^3 + a2 \cdot x^2 + a3 \cdot x + a4 \text{ und}$$

$$sp2(x) = a5 \cdot x^3 + a6 \cdot x^2 + a7 \cdot x + a8 \text{ und}$$

$$sp3(x) = a9 \cdot x^3 + a10 \cdot x^2 + a11 \cdot x + a12 \text{ und}$$

$$sp4(x) = a13 \cdot x^3 + a14 \cdot x^2 + a15 \cdot x + a16$$

Zur Vermeidung von Sprüngen muß

$$sp1(0)=11, sp1(4)=13, sp2(4)=13, sp2(6)=11, sp3(6)=11, sp3(8)=9, sp4(8)=9, sp4(16)=0 \text{ sein.}$$

Damit keine Knicks auftreten, wird

$$sp1'(4)=sp2'(4), sp2'(6)=sp3'(6), sp3'(8)=sp4'(8).$$

Um Krümmungssprünge zu überwinden wird

$$sp1''(4)=sp2''(4), sp2''(6)=sp3''(6), sp3''(8)=sp4''(8)$$

Und für eine Anfangs- und Endkrümmung 0 wird

$$sp1''(0)=0, sp4''(16)=0$$

Diese Bedingungen ergeben ein **LGS mit 16 Gleichungen und 16 Unbekannten**. Die Ermittlung des LGS geschah mit TI-92-Hilfe an der Tafel bzw. im Heft. Das LGS wurde zuhause in eine Matrix mit 16 Zeilen und 17 Spalten umgesetzt. Dies gelang fehlerfrei nur einem Schüler, so daß dessen Daten den anderen Lk-Teilnehmern überspielt werden mußten. Im Data/Matrix-Editor des TI-92 sollte folgende Matrix **koeff** gespeichert sein:

Gleich	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	b
1.				1													11
2.	64	16	4	1													13
3.					64	16	4	1									13
4.					216	36	6	1									11
5.									216	36	6	1					11
6.									512	64	8	1					9
7.													512	64	8	1	9
8.													4096	256	16	1	0
9.	48	16	1		-48	-16	-1										0
10.					108	12	1		-108	-12	-1						0
11.									192	16	1		-192	-16	-1		0
12.	24	2			-24	-2											0
13.					36	2			-36	-2							0
14.									48	2			-48	-2			0
15.		2															0
16.													96	2			0

Mit **rref(koeff)**  $\rightarrow$  **loesmat** wird die Koeffizientenmatrix auf Diagonalform gebracht und die rechte Spalte von **loesmat** enthält die Lösungen für a1, a2,...,a16. Man erhält schließlich für die 4 Teilterme der Splinefunktion:

$$\begin{aligned} \sqrt{y1} &= \frac{-67}{2048} \cdot x^3 + \frac{131}{128} \cdot x^2 + 11 \mid x \geq 0 \text{ and } x \leq 4 \\ \sqrt{y2} &= \frac{85}{1024} \cdot x^3 - \frac{711}{512} \cdot x^2 + \frac{421}{64} \cdot x + \frac{115}{32} \mid x \geq 4 \\ \sqrt{y3} &= \frac{-23}{1024} \cdot x^3 + \frac{261}{512} \cdot x^2 - \frac{77}{16} \cdot x + \frac{211}{8} \mid x \geq 6 \\ \sqrt{y4} &= \frac{5}{4096} \cdot x^3 - \frac{15}{256} \cdot x^2 - \frac{17}{64} \cdot x + \frac{57}{4} \mid x \geq 8 \end{aligned}$$

Abb. 6

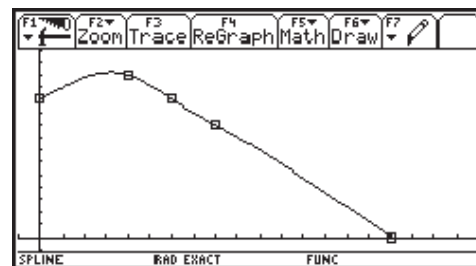


Abb. 7

Berechnungen liefern als maximale Krümmung ca. 0,656465 und somit als minimalen Krümmungskreisradius ca. 1,52 LE. Die Gesamtkrümmung beträgt ca. 1,87206, ist also etwa vergleichbar mit der eines Viertelkreises. Schließlich ist die Kurve ca. 22,5263 LE  $\approx$  292,8 km lang.

Der Spline schneidet bei allen drei Kriterien besser ab als das Polynom. Der Spline liefert die Biegelinie durch die gegebenen Punkte. Man kann nachweisen, daß er die Kurve mit der geringsten Gesamtkrümmung über dem Intervall ist.  $\rightarrow$

### Weitergehende Fragestellungen

#### Jans Überlegung:

Man sollte nicht  $sp1''(0)=0$  und  $sp4''(16)=0$  fordern, sondern stattdessen  $sp1''(2)=0$  und  $sp4''(12)=0$ , d.h. die Kurve sollte auf freier Strecke die Krümmung 0 aufweisen. Da der Zug in Bahnhofsnähe ohnehin langsam fahren muß, kann hier die Krümmung ruhig größer sein.

#### Birgits Frage:

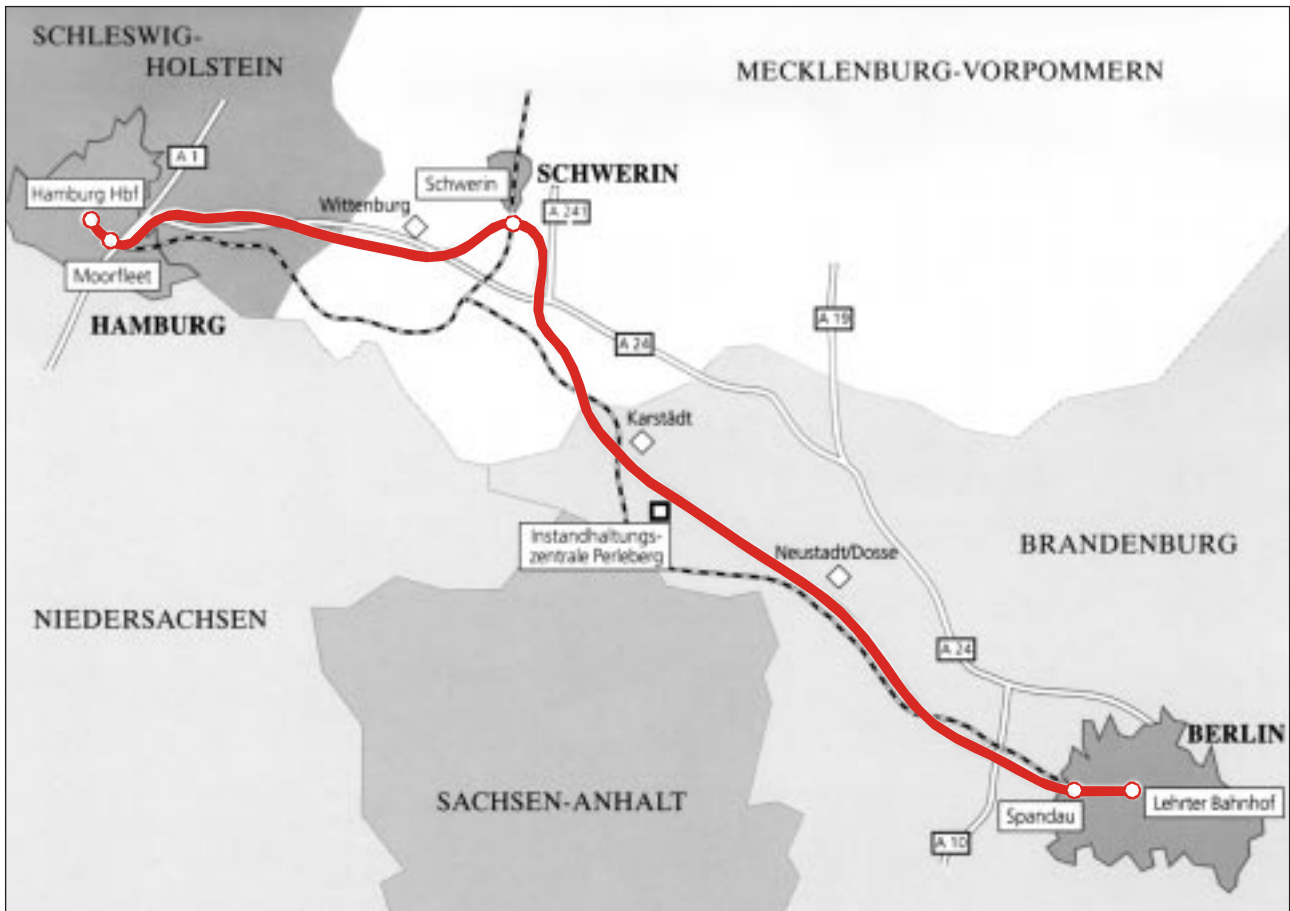
Sieht es nur so aus oder ist es wirklich so, daß die Kurve Wendepunkte aufweist. Ist der Spline über einem Teilstück linksgekrümmt ?

#### Marions Einwurf:

Eigentlich ist ganz genau höchstens ein Gleis durch den Spline erfaßt. Wie findet man das „parallele Gleis“ ?

Durch die aktuelle Planung der Transrapid-Strecke Hamburg-Berlin könnte die Aufgabe aktualisiert werden mit Hilfe der Darstellung der Magnetschnellbahn Planungsgesellschaft mbH vom Juni 1999:

Man erkennt, daß aus heutiger Sicht das Kriterium der Finanzbedarf ist, denn vorhandene Leitlinien legen in erster Linie die Trasse fest und nicht die Forderung nach möglichst geringer Krümmung.



Autor:  
Josef Rolfs, StR  
Willohstr. 26, 26169 Friesoythe  
Albertus-Magnus-Gymnasium  
Hansaplatz 11, D-26169 Friesoythe  
eMail: Josef.Rolfs @ t-online.de

# Konferenzen und Ausstellungen

Auch in diesem Jahr nimmt Texas Instruments wieder an zahlreichen Konferenzen und Ausstellungen teil. Wenn Sie uns persönlich kennenlernen wollen, so besuchen Sie uns.

Zeit	Ort	Veranstaltung
14.9.	Köln	MNU Nordrhein
14.9.	Norderstedt	Schule und Computer
15.9.	Kassel	MNU Hessen
21.9.	Dortmund	MNU Westfalen
24. - 26.9.	Wolfenbüttel	GDM Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik“
25.9.	Erfurt	MNU Thüringen
27.9. - 1.10.	Fuldatal	Fachleitertagung Physik
29.9.	Hannover	MNU Niedersachsen I
29.9.	Saarbrücken	MNU Saarland
30.9.	Freiburg	MNU Baden Württemberg
5. - 6.10	Kiel	MNU Schleswig-Holstein
5.10.	Leipzig	MNU Sachsen
20.10.	Augsburg	MNU Südbayern
20. - 22.10.	Speyer	MNU Rheinland-Pfalz
23.10	Pforzheim	1. T <sup>3</sup> Konferenz Baden-Württemberg
30.10.	Finsterwalde	MNU Brandenburg
4.11.	Meppen	MNU Niedersachsen II
13.11.	Halle	MNU Sachsen Anhalt
15. - 16.11.	Bremerhaven	MNU Bremen
16.11.	Coburg	MNU Franken
1. - 2.2.2000	Bremen	Mathematisch-Naturwissenschaftliche Tage Bremen
14.2.2000	Dresden	Tage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
14. - 18.2.2000	Köln	Interschul / Didacta
15.2.2000	Chemnitz	Tage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
16.2.2000	Zwickau	Tage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
17.2.2000	Plauen	Tage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
3. - 10.3.2000	Konstanz	Computeralgebra-Symposium Konstanz
16. - 20.4.2000	Stuttgart	MNU Kongress
26. - 28.4.2000	Thurnau	Computeralgebra in Lehre, Ausbildung, Weiterbildung

# Service und Informationen

## Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Support Center Kontakt auf, wenn Sie auf der Suche nach Begleitliteratur oder einer Handreichung sind. Auch wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner haben, ist das CSC die erste Adresse:

**Tel:** 06196-975015

**Fax:** 0032-25 145344

**e-mail:** ti-cares@ti.com

**www:** www.ti.com/calc/deutschland

**Post:** Texas Instruments -E&PS-  
Haggertystr. 1  
D-85356 Freising

## Garantie und Reparatur

Auf alle Schultaschenrechner bietet Texas Instruments 2 Jahre Austauschgarantie. Sollte jedoch doch mal etwas defekt sein, rufen Sie uns bitte zunächst an, bevor Sie ein scheinbar defektes Gerät einsenden. Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden. Bei einer Einsendung bitte Kaufbeleg und Anschrift nicht vergessen!

**Tel:** 06196-975015

**e-mail:** ti-cares@ti.com

**Post:** Texas Instruments CSC  
c/o UPS  
Industriegebiet,  
Friedrich der Grosse  
D-44628 Herne

## Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern

Wenn Sie Graphikrechner und Zubehör kostenlos für etwa 3 Wochen ausleihen wollen:

**Tel:** 06196-975015

**e-mail:** ti-schule-de@ti.com

**www:** www.ti.com/calc/deutschland/leihprogramm.htm

**Post:** Texas Instruments - E&PS -, Leihprogramm  
Haggertystr. 1  
D-85356 Freising

## Lehrerfortbildungen und Workshops:

Teachers Teaching with Technology (T<sup>3</sup>) vermittelt bundesweit Lehrerfortbildungen und Workshops für alle Lehrer, die daran interessiert sind, durch den sinnvollen Einsatz graphikfähiger Taschenrechner das Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften effizienter zu gestalten.

**Post:** Bärbel Barzel / Dr. Detlef Berntzen / Udo Amelung  
Zentrale Koordination Lehrerausbildung - T<sup>3</sup>  
Prinzipalmarkt 38,  
D-48143 Münster

**e-mail:** t3.info@uni-muenster.de

**www:** www.uni-muenster.de/ZKL-t3

## Lehrerunterstützungsprogramm

Für Informationen, wie Sie in den Genuß eines Unterstützungsgeräts kommen:

**Tel:** 06196-975015

**e-mail:** ti-cares@ti.com

**www:** www.ti.com/calc/deutschland/unterstuetzung.htm

**Post:** Texas Instruments - E&PS -, Lehrerunterstützungsprogramm  
Haggertystr. 1  
D-85356 Freising

Texas Instruments und die angeschlossenen Händler sind bemüht, möglichst exakte und genaue Informationen in dieser Dokumentation weiterzugeben. Dennoch kann für die Richtigkeit der Angaben keinerlei Gewähr übernommen werden. Die dargestellten Meinungen entsprechen nicht unbedingt der Position der Texas Instruments. Alle Rechner und elektronischen Organizer sind nach der Norm ISO 9000 zertifiziert. Paper-Free, Constant Memory, APD (Automatic Power Down), ANYLITE, SuperView, Data Synchronization sowie dessen Grafikanzeige, EOS, AOS, TI-GRAPH LINK, ViewScreen, CBL und CBR sind eingetragene Warenzeichen der Texas Instruments Incorporated. Cabri Geometry II ist ein Warenzeichen der Universität Joseph Fourier. IBM ist ein eingetragenes Warenzeichen der International Business Machines Corporation. Windows ist ein Warenzeichen der Microsoft Corporation. Alle anderen Warenzeichen sind im Besitz der genannten Eigentümer. Texas Instruments behält sich das Recht vor, Produkte, Spezifikationen, Dienstleistungen und Programme ohne vorherige Ankündigung zu ändern. Gedruckt auf chlorfreiem Papier durch Color-Offset München, Satz und Reproduktion F8 Medientechnik GmbH München, 100% recyclingfähig.