



- ◆ TI-83: Abkühlung, Weg - Geschwindigkeit - Beschleunigung, Maximale Fahrstrecke ◆ TI-85: Optische Täuschungen ◆ TI-92: Bezierkurven, Komplexe Zahlen, Plotten von Funktionen, Schülermeinung
- ◆ CBL: Energie, Schwingungen, Freihandversuche ◆ T^3 ◆ Lehrerprogramme ◆ Literatur

Editorial

Mathematikunterricht mit Graphikrechnern

Als jüngstes Mitglied reiht sich nun Bayern in die Reihe derjenigen Bundesländer ein, in denen Graphikrechner im Unterricht und zu Prüfungen zugelassen sind. Somit setzt sich auch in diesem Bundesland der internationale Trend fort, der zunehmend weg von den einfachen Schulrechnern, hin zu den graphischen oder graphisch-symbolischen Taschenrechnern führt.

Was ändert sich damit für Ihren Unterricht?

Das hängt davon ab, wieviel sich Ihrer und der Meinung Ihrer aller Kollegen nach ändern soll. Graphikrechner stehen nicht im Widerspruch zu den derzeit existierenden Lehrplänen, wie zahlreiche Schulversuche übereinstimmend gezeigt haben. Die mathematischen Inhalte bleiben im wesentlichen dieselben, lediglich deren Gewichtung untereinander kann sich verschieben. Dafür gewinnt man einen neuen Reichtum an Methoden und es ergeben sich ganz neue unterrichtliche und didaktische Perspektiven. Prof. Dr. Herget informiert auf den Seiten 23-25 über den Stand der didaktischen Diskussion und zeigt Vorschläge für „etwas andere Aufgaben“ auf.

Die Natur, die Wissenschaft und die Technik sind im Regelfall nicht durch ganze Zahlen, sondern nur näherungsweise zu fassen. In steigendem Maße verlangen Lehrpläne die Einbeziehung entsprechender realitätsnaher und anwendungsbezogener Aufgaben. Graphikrechner ermöglichen hervorragend eine Umsetzung dieser Forderung, da man mit Ihnen auf recht einfache Weise Daten oder Funktionen in unterschiedlichen Formen nebeneinander darstellen kann, sei es als Graph, als Tabelle oder als Term.

Viele Menschen sind eher optisch orientiert. Sie verschaffen sich durch die Analyse des Graphen einen ersten Überblick über die funktionalen Zusammenhänge, ehe sie anschließend mit analytischen Methoden ihre Vermutungen überprüfen. Dieses Vorgehen eröffnet optisch orientierten Schülern einen neuen Zugang zur Mathematik, der Ihnen bisher verwehrt blieb. Dabei stellt sich heraus, daß jede Darstellungsart ihre eigenen Stärken und Schwächen hat. Ein einseitiges Vorgehen daher nicht mehr nötig. Überdies ist die Darstellung von Funktionszusammenhängen anhand der Graphik über den ViewScreen leichter als je zuvor.

Erst durch den Wechsel und die Gegenüberstellung der Darstellungen läßt sich ein viel tieferer Einblick in die jeweilige Problematik gewinnen, als es ein traditionelles, nur termorientiertes Vorgehen ermöglicht. Dadurch sind Graphikrechner und stärker noch die symbolisch-graphischen Taschenrechner weit mehr als bloße Rechenknechte. Sie sind didaktische Werkzeuge: flexibel in der Handhabung, variantenreich in der Anwendung und jederzeit und überall verfügbar.







Stephan Griebel
Schulbeauftragter

Kommunikation ist wichtig für uns – Sprechen Sie mit uns

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Support Center Kontakt auf, wenn Sie auf der Suche nach Begleitliteratur oder einer Handreichung sind. Auch wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner haben, ist das CSC die erste Adresse:

-  06196-975015
-  0032-27138068
-  ti-cares@ti.com
<http://www.ti.com/calc/deutschland>
-  Texas Instruments – E&P –
Haggertystr. 1
D-85356 Freising




Reparatur

Bevor Sie ein scheinbar defektes Gerät einsenden, rufen Sie uns bitte zuvor zunächst an. Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

-  06196-975015
oder  08774-96000
-  Service Center
Heimbach & Brummer
Hochmoos 25
D-84092 Bayerbach
heimbach.brummer@t-online.de

Lehrerunterstützungsprogramm

Für Informationen, wie Sie in den Genuß kommen:

-  06196-975015
-  ti-cares@ti.com
<http://www.ti.com/calc/deutschland/unterstuetzung.htm>
-  Texas Instruments – E&P –
Lehrerunterstützungsprogramm
Haggertystr. 1
D-85356 Freising

Leihprogramm

Wenn Sie Graphikrechner kostenlos für etwa 2 Wochen ausleihen wollen:

-  06196-975015
-  ti-schule-de@ti.com
<http://www.ti.com/calc/deutschland/leihprogramm.htm>
-  Texas Instruments – E&P –
Leihprogramm
Haggertystr. 1
D-85356 Freising

Inhalt dieser Ausgabe

Wiederaufladbare Batterien in TI-Graphikrechnern

Seit Mai 98 werden unsere Graphikrechner nur noch mit wiederaufladbaren Alkaline-Batterien der Firma Rayovac ausgeliefert:


TI-82, TI-83, TI-85, TI-86, TI-89, TI-92, TI-92 II

Vorteile gegenüber herkömmlichen wiederaufladbaren NiCd-Batterien:

- die Batterien sind bereits voll geladen und sofort einsatzbereit
- 1,5 Volt Alkaline Leistung
- Bei Lagerung bleiben Sie bis zu 5 Jahren aufgeladen
- Sie können aufladen ohne zuvor Entladen zu müssen (kein Memoryeffekt!)
- 0 % Quecksilber und 0% Kadmium
- umweltfreundlich, da weniger Batterien entsorgt werden

Das passende Rayovac Ladegerät kann über den Handel gekauft oder über das Texas Instruments Customer Support Center bestellt werden:

 06196-975015

 ti-cares@ti.com

Bitte beachten Sie: Rayovac aufladbare Alkaline Batterien dürfen nur in Rayovac Alkaline Ladegeräten geladen werden. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an das Customer Support Center.

Impressum

TI-Nachrichten für die Schule
 Ein kostenloser Informationsservice von Texas Instruments Educational & Productivity Solutions Business.
 Verantwortlich für den Inhalt:
 Stephan Griebel
 Gestaltung/Gesamtherstellung:
 Pinsker Druck und Medien, Mainburg
 Nachdruck nur mit Genehmigung von Texas Instruments.
 Für die Richtigkeit abgedruckter Beiträge externer Autoren haftet die Redaktion nicht.
 Texas Instruments
 Educational & Productivity
 Haggertystr. 1, D-85356 Freising

Informationen und Service

Anschriften	2
technische Auskünfte und Online-Informationen	2
Reparatur	2
Taschenrechner zum Ausleihen	26
Ideenbörse - Autoren gesucht	26
Referent gesucht? - TI hilft!	27
Konferenzen und Ausstellungen	27
T ³ - Teachers Teaching with Technology	28
Lehrerunterstützungsprogramm <i>20 plus 1</i> bzw. <i>30 plus 1</i>	29
Folien, Handreichungen, Kopiervorlagen	29
Literatur	30-32

Aktuell

Wiederaufladbare Batterien für Graphikrechner von TI	3
Software-Sammlung auf CD	26
TI-92 Software-Wettbewerb	26
Zusatzdateien Cabri Géomètre II	27
Zulassung von Graphikrechnern in Deutschland	29

Praxis

Abkühlvorgang mit dem TI-83	4-6
Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit dem TI-83	6-7
Maximale Fahrstrecke mit dem TI-83	8-9
Optische Täuschungen am graphikfähigen Taschenrechner	9-12
Bezierkurven mit dem TI-92	12-13
Interessante Probleme aus dem Bereich der Analysis	14-15
Komplexe Zahlen zum Anfassen	16-17
Das Plotten von Funktionen - ein Kinderspiel?	18
Der TI-92 in einem Mathematik-Grundkurs der Stufe 11.2	19
Energie eines springenden Balles	20-21
Freihandversuche mit High-Tech-Auswertung	21-22
Löst der Taschencomputer bald alle Probleme?	23-25

Rubriken

Editorial	2
Impressum	3

Friedrich Tinhof, Müllendorf

Abkühlvorgang mit dem TI-83

Beispiel:

In einem Raum mit einer Temperatur von konstant 20 °C kühlt sich heißes Wasser (Anfangstemperatur: 100 °C) in einem Gefäß innerhalb von 10 Minuten auf 40 °C ab.

Die Funktion der Temperaturabnahme ist grafisch darzustellen.

Die Abkühlung eines Körpers von einer Ausgangstemperatur T_o auf eine konstante Temperatur der Umgebung T_u erfolgt nach dem Gesetz $T(t) = T_u + (T_o - T_u) \cdot e^{-k \cdot t}$.

Dabei ist

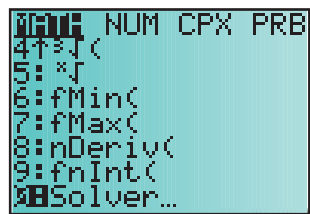
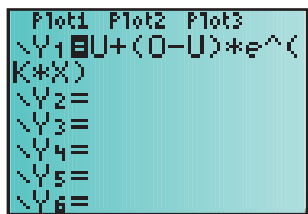
- T(t) die momentane Temperatur zum Zeitpunkt t [Bezeichnung hier Y1]
- t ist die Zeit, die seit Versuchsbeginn verstrichen ist [Bezeichnung hier X]
- T_u Raumtemperatur, konstante Umgebungstemperatur, in °C [Bezeichnung hier U]
- T_o Temperatur des Körpers (in°C) am Start des Versuches ; $T_o > T_u$ [Bezeichnung hier O]
- k positive Konstante [Bezeichnung hier K]

Nachdem der TI-83 als Variable nur einfache Großbuchstaben verwenden kann, lautet die Gleichung für den Abkühlvorgang, die Sie im Rechner eingeben wie folgt:

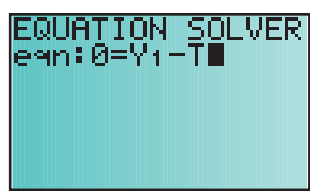
$$Y_1 = U + (O - U) \cdot e^{-(K \cdot T)}$$

Drücken Sie $\boxed{Y=}$ und geben Sie als ersten Schritt den Term der angegebenen Funktion in Y_1 ein. Da die Funktion einige Variable enthält und außerdem die Konstante K noch unbestimmt ist, soll die Eingabe der gegebenen Größen und die Berechnung von K mit dem **SOLVER** erfolgen.

Das Zusammenspiel von Solver und Grafik ist eine komfortable Vorgangsweise, die auch in anderen Anwendungsbereichen übernommen werden kann.



Um den **SOLVER** aufzurufen drücken Sie die Taste \boxed{MATH} gefolgt von „0“. Sie befinden sich jetzt im Gleichungssolver. Sollte der Solver schon eine Gleichung enthalten gehen Sie mit dem Cursor $\boxed{\leftarrow}$ in die



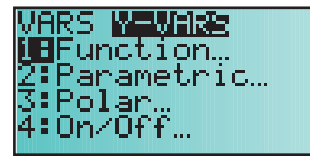
erste Zeile des Solvers. Hier haben Sie die Möglichkeit mit \boxed{CLEAR} die bestehende Gleichung zu löschen oder die bestehende Gleichung einfach zu überschreiben.

Geben Sie folgenden Term ein : **eqn:0= Y₁ -T**

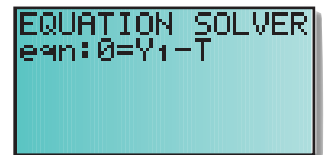
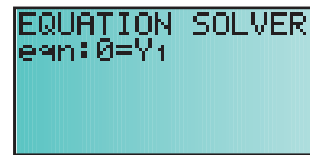
Dabei steht Y_1 für die in Y_1 eingegebene Funktion; T ist eine vorzugebende Temperatur.

Die Eingabe von Y_1 ist etwas kompliziert:

Drücken Sie die Taste \boxed{VARS} ; gehen Sie mit dem Cursor auf **Y-VARS** und bestätigen Sie **1:Function** mit \boxed{ENTER} . Es erscheint ein neuer Bildschirm mit einer Liste von Funktionen. Wählen Sie die gewünschte Funktion (hier 1:Y₁) und bestätigen Sie wieder mit \boxed{ENTER} .



Im Solver steht **eqn:0= Y₁**. Ergänzen Sie die Eingabe auf **eqn:0= Y₁ -T** und drücken Sie \boxed{ENTER} .



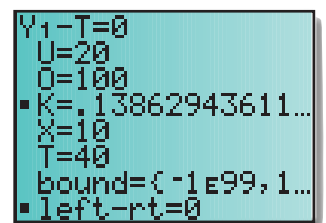
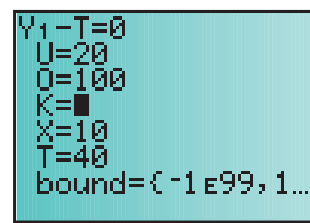
Der folgende Bildschirm enthält in der ersten Zeile die eingegebene Gleichung.

In den folgenden Zeilen finden Sie alle Variable, die in der Gleichung enthalten sind.

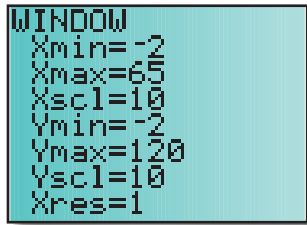
Neben den Variablen stehen die aktuellen, gespeicherten Werte.

Aktualisieren Sie die angezeigten Werte mit den Werten aus der Angabe.

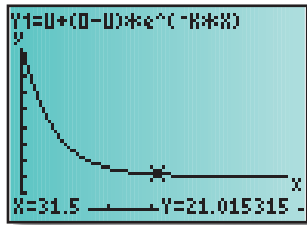
- U = 20 konstante Raumtemperatur; Umgebungstemperatur
- O = 100 Anfangstemperatur des Wassers
- K = ? Konstante ; muß erst berechnet werden
- X = 10 Zeit; 10 Minuten nach dem Versuchsbeginn soll die Temperatur T = 40 °C erreicht werden.
- T = 40 Temperatur 40 °C soll nach 10 Minuten erreicht werden.



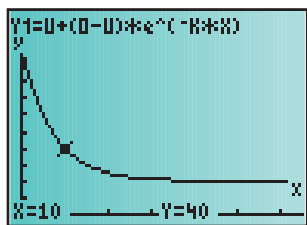
Zur Berechnung von K setzen Sie den Cursor hinter K=_ und drücken die Tasten [ALPHA] [SOLVE].
Der Wert der Konstanten wird berechnet und gespeichert.
K = 0,1386



Drücken Sie [WINDOW], geben Sie geeignete Grenzen für das Grafikfenster ein und zeichnen Sie die Abkühlkurve mit [GRAPH].
Wenn Sie zusätzlich noch die Taste [TRACE] drücken, können Sie mit den Cursortasten [right] und [down] dem Verlauf der Kurve folgen. Zeit (hier X) und Temperatur (hier Y) werden angezeigt.

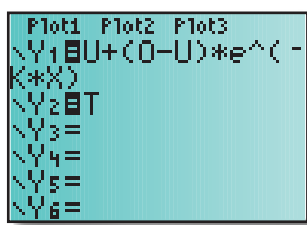
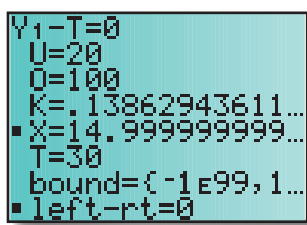


Wenn Sie die Temperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt (nach 10 Minuten) wissen möchten, geben Sie den Zeitpunkt („10“) ein und drücken auf [ENTER].
Das Ergebnis (natürlich 40) erscheint auf dem Bildschirm.



Wann erreicht die Wassertemperatur 30 °C ?

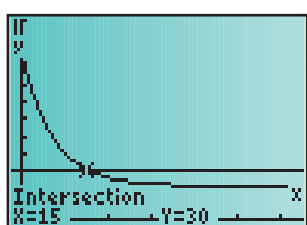
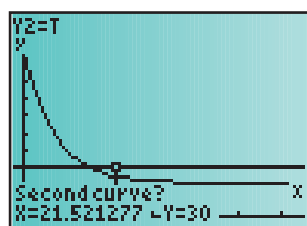
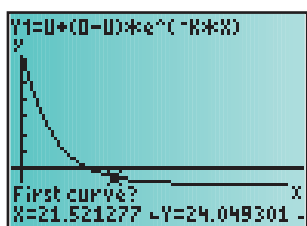
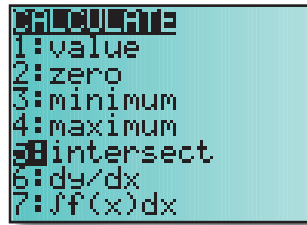
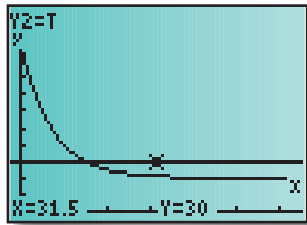
Gehen Sie mit [MATH] gefolgt von „0“ zum Solver zurück. Geben Sie für T den Wert 30 ein und setzen Sie den Cursor hinter X=_ .
Mit [ALPHA] [SOLVE] bestimmen Sie die gesuchte Zeit. (Lösung: 15 Minuten)



Auch grafisch kann diese Aufgabe gelöst werden:
Drücken Sie dazu zunächst [Y=] und geben Sie $Y_2 = T$ ein.
Nach der Taste [GRAPH] werden die definierten Funktionen gezeichnet.

Der x-Wert des Schnittpunktes der beiden Funktionen ist die Antwort auf die gestellte Frage.

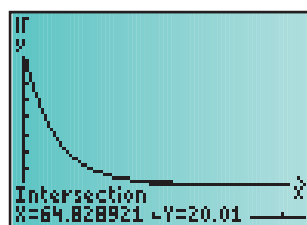
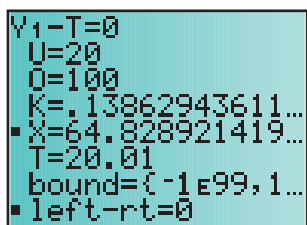
Die Berechnung des Schnittpunktes erfolgt mit [2nd] [CALC] ; 5:intersect .



Bestätigen Sie danach die vorgeschlagenen Funktionen (First curve und Second curve) mit [ENTER].
Nachdem Sie auch auf die Frage "Guess" mit [ENTER] geantwortet haben, wird der Schnittpunkt berechnet.

Wann erreicht die Wassertemperatur 20,01 °C ?

Gehen Sie mit [MATH] gefolgt von „0“ zum Solver zurück. Geben Sie für T den Wert 20,01 ein und setzen Sie den Cursor hinter X=_ . Mit [ALPHA] [SOLVE] bestimmen Sie die gesuchte Zeit. (Lösung: 64,83 Minuten)
Nach der Taste [GRAPH] werden die aktuellen Funktionen gezeichnet, deren Schnittpunkt wieder ermittelt wird.



Zeigen Sie, daß die momentane Abkühlgeschwindigkeit **proportional** zur Temperaturdifferenz zwischen Körper (Wasser) und Umgebung ist. (Proportionalitätsfaktor: - K)
Dieser Teil der Aufgabe ist etwas umfangreicher und der Lösungsweg soll daher hier nur angedeutet werden. Drücken Sie zunächst [Y=] und geben Sie folgende Funktionen ein:

Y1= U + (O - U) · e^{-K·X}
 Y2= Y1 - U

Y3= nDeriv(Y1,X,X)

Y4= Y3/Y2

Abkühlkurve
 Temperaturdifferenz
 Körper - Umgebung
 Änderung der Temperatur
 pro Zeit; Ableitung der
 Abkühlkurve;
 Abkühlgeschwindigkeit
 Quotient aus Temperatur-
 differenz und Abkühlge-
 schwindigkeit ;
 - muß konstant (- K) sein

Nur Y₄ wird aktiviert.

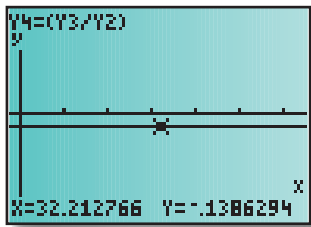
Drücken Sie **[WINDOW]**, geben Sie geeignete Grenzen für das Grafikfenster ein und zeichnen Sie die gesuchten Funktionen mit **[GRAPH]**.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=U+(O-U)*e^(-
K*X)
\Y2=Y1-U
\Y3=nDeriv(Y1,X,
X)
\Y4=(Y3/Y2)
\Y5=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-2
Xmax=65
Xscl=10
Ymin=-1
Ymax=1
Yscl=1
Xres=3
    
```



Der Graf der Funktion Y₄ ist waagrecht mit dem konstanten Wert - 0,1386, was die Annahme bestätigt.

Autor:
 Mag. Friedrich Tinhof, Hauptstraße 1, A-7052 Müllendorf
 tindorf@netway.at

Friedrich Tinhof, Müllendorf Weg-Zeit-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramm mit dem TI-83

Die Fahrt einer U-Bahn zwischen Haltestelle und Haltestelle wurde untersucht. Der zurückgelegte Weg s(t) (in Metern) wurde als Funktion der Zeit (in Sekunden) wie folgt dargestellt:

$$s(t) = \begin{cases} 0,5 \cdot t^2 & 0 \leq t \leq 12 \\ 0,2 (t + 18)^2 - 108 & 12 < t \leq 35 \\ 21,2 (t - 35) + 453,8 & 35 < t \leq 38 \\ -0,48 (t - 60)^2 + 749,72 & 38 < t \leq 60 \end{cases}$$

- a) Zeichnen Sie den Grafen der Weg-Zeit-Funktion im Zeitintervall [0 , 60].
- b) Bestimmen Sie abschnittsweise die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion und stellen Sie diese Ableitungsfunktion grafisch dar!
 (Beachten Sie: Die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion ist die Geschwindigkeit. $v(t) = \frac{d s(t)}{dt}$)

Lösung a):

Stellen die gegebene Funktion im kartesischen Koordinatensystem dar und schreiben für die **Zeit t** den Wert **X** und für den Weg **s(t)** den Wert **Y(X)**. Durch Hinzufügen von Logikfaktoren ist es möglich, Funktionen nur in bestimmten Bereichen zu zeichnen. Die eingegebenen Funktionen haben folgendes Aussehen:

- Y₁ = 0,5 · X² (X>0)(X<12) für 0<X<12
- Y₂ = (0,2(X + 18)² - 108)(X>12)(X<35) für 12<X<35
- Y₃ = (21,2(X - 35) + 453,8)(X>35)(X<38) für 35<X<38
- Y₄ = (-0,48(X - 60)² + 749,72)(X>35)(X<60) für 38<X<60
- Y₅ = Y₁ + Y₂ + Y₃ + Y₄ Summe aller Funktionen;
 Bitte nur diese Funktion aktivieren!

```

TEST LOGIC
\Y1=
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

Die Ungleichheitszeichen erhalten Sie mit **[2nd]** **[TEST]**; und der entsprechenden ausgewählten **Zahl**.
 Zunächst wird nur die Funktion Y₅ aktiviert.
 Y₁ bis Y₄ werden deaktiviert.

```

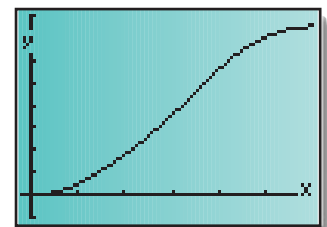
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=.5X^2(X>0)(X<
12)
\Y2=(.2(X+18)^2-1
08)(X>12)(X<35)
\Y3=(21.2(X-35)+
453.8)(X>35)(X<3
8)
    
```

```

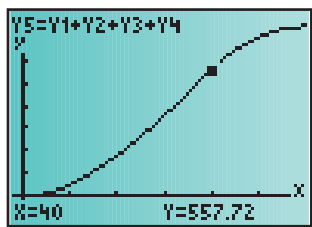
Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=(-.48(X-60)^2
+749.72)(X>38)(X
<60)
\Y5=Y1+Y2+Y3+Y4
\Y6=nDeriv(Y5,X,
X)
    
```

```

WINDOW
Xmin=-2
Xmax=60
Xscl=10
Ymin=-100
Ymax=800
Yscl=100
Xres=1
    
```



Anmerkung:
 Logikfaktoren können nur die Werte „0“ (wenn die Aussage „falsch“ ist) oder „1“ (wenn die Aussage „wahr“ ist) annehmen.



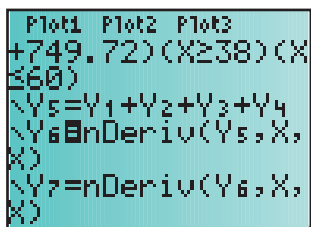
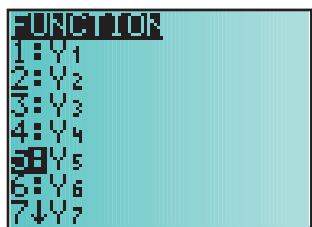
Wenn Sie den zurückgelegten Weg nach beispielsweise 40 Sekunden bestimmen wollen, drücken Sie **TRACE** und geben die Zahl "40" und **ENTER** ein. Der zurückgelegte Weg wird angezeigt: Y=557,72 m.

Lösung b):

Deaktivieren Sie die Funktionen **Y₁** bis **Y₅**. Zur Berechnung der Ableitungsfunktionen verwenden wir den Befehl **MATH**; **8:nDeriv(Y5 [= abzuleitende Funktion], X [= Variable, nach der abgeleitet werden soll] , X [= Stelle, an der die Ableitung berechnet werden soll])**.

Drücken Sie die Taste **Y=** und setzen Sie den Cursor hinter **Y₆=**. Drücken Sie danach die Taste **MATH** und geben Sie danach „8“ ein. Der Befehl der Ableitung wird in die Formeleingabe geschrieben. **Y₆=nDeriv(**. Die Funktion, die abgeleitet werden soll, ist die Funktion **Y₅**. Diese Funktion muß jetzt eingegeben werden.

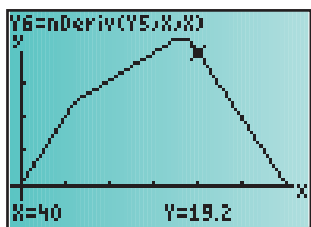
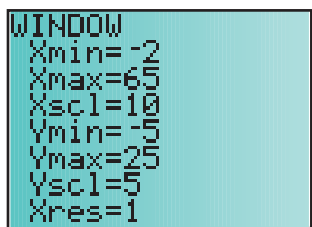
Drücken Sie dazu die Taste **VARs**; gehen Sie mit dem Cursor auf **Y-VARS** und bestätigen Sie **1:Function** mit **ENTER**. Es erscheint ein neuer Bildschirm mit einer Liste von Funktionen. Wählen Sie die gewünschte Funktion (hier **5:Y₅**) und bestätigen Sie wieder mit **ENTER**. In der Funktionseingabe steht **Y₆=nDeriv(Y₅,**. Drücken Sie die Tasten **□** **X,T,θ,n**, **□** **X,T,θ,n** und **□**.



Diese Eingabe bewirkt, daß die Funktion **Y₅** nach der Variablen **X** an allen Stellen **X** des Grafikfensters **numerisch** abgeleitet wird. Die Einträge ergeben folgendes Aussehen der Funktion:

Y₆ = nDeriv(Y₅,X,X)

Nach dem Einstellen eines neuen Fensters erhalten Sie nach **GRAPH** das Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm der U-Bahn.



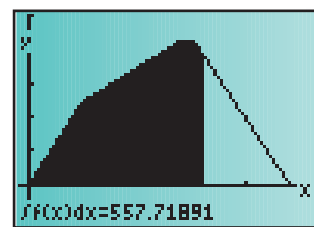
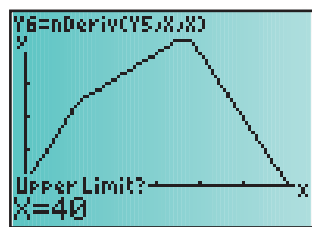
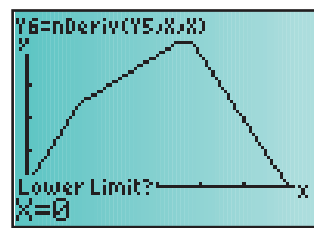
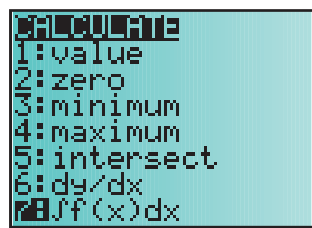
Im Intervall [35 ; 38] ist die Geschwindigkeit maximal.

Aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm kann wieder der zurückgelegte Weg (z.B. nach 40 Sekunden) berechnet werden.

$$Es\ gilt: s(40) = \int_0^{40} v(t)dt.$$

Die Berechnung von Integralen (aus dem Grafikbildschirm) erfolgt mit dem TI-83 mit dem Befehl **2nd** **CALC**; **7:f(x)dx**. „7“ eingeben. Geben Sie die Integrationsgrenzen (Lower Limit: „0“ eingeben ; Upper Limit: „40“ eingeben) ein und bestätigen Sie jede Eingabe mit **ENTER**.

Nach einigen **Minuten** erhalten Sie die zurückgelegte Wegstrecke als Fläche unter dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt. **s(40) = 557,72 m**



Beschleunigungskurve:

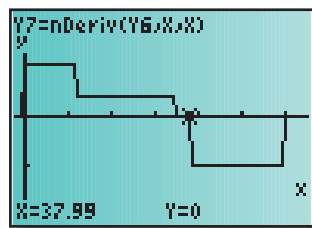
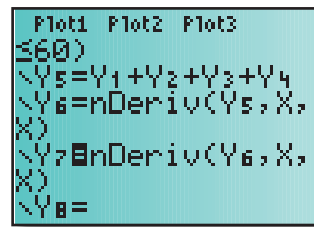
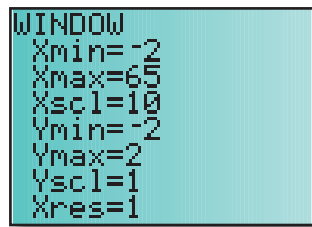
Leitet man die Geschwindigkeitsfunktion nach der Zeit ab, erhält man die Beschleunigungsfunktion. $a = \frac{dv(t)}{dt}$

Schreiben Sie dazu in **Y₇** die Ableitung der Funktion **Y₆**.

Der Eintrag in **Y₇** lautet:
Y₇ = nDeriv(Y₆,X,X) Beschleunigungsfunktion der U-Bahn.

Deaktivieren Sie alle Funktionen außer **Y₇**, stellen Sie ein geeignetes Fenster ein und drücken Sie **GRAPH**.

Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm der U-Bahn wird dargestellt.



Autor:
Mag. Friedrich Tinhoft
Hauptstraße 1
A-7052 Müllendorf
tindorf@netway.at

Renate Eder, Wampersdorf

Extremwertbeispiel: Maximale Fahrstrecke mit dem TI-83

Der stündliche Treibstoffverbrauch eines Schiffes ist durch die Beziehung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gegeben. Dabei ist y der Verbrauch in Tonnen pro Stunde, x ist die Geschwindigkeit des Schiffes in km/h und a, b, c und d sind Konstante, die vom Schiffstyp abhängen.

Bestimmen Sie die Konstanten aus folgenden Angaben:

Geschwindigkeit x	0 km/h	10 km/h	20 km/h	30 km/h
Verbrauch y	1,5 t/h	2,5 t/h	9,5 t/h	28,5 t/h

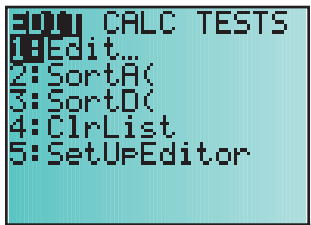
Bei welcher Geschwindigkeit kommt das Schiff mit einem Treibstoffvorrat von 400 t am weitesten? Wie groß ist diese Strecke?

Anleitung: Weg = $\frac{\text{Geschwindigkeit } (x) \cdot \text{Vorrat im Tank (400 Tonnen)}}{\text{Verbrauch pro Stunde } y}$

Die kubische Regression ist der einfachste Weg, bei vier gegebenen Punkten, eine Gleichung dritten Grades zu bestimmen.

Geben Sie zunächst die Tabellenwerte in die Listen L_1 und L_2 ein: Mit der Tastenkombination [STAT]; EDIT ; 1:Edit [ENTER] kommen Sie zur Listeneingabe.

Geben Sie hier die Tabellenwerte in L_1 und L_2 ein und bestätigen Sie jede Eingabe mit [ENTER].

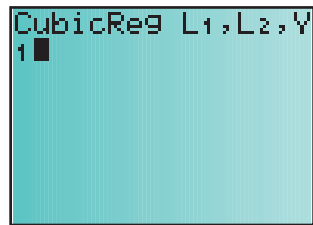
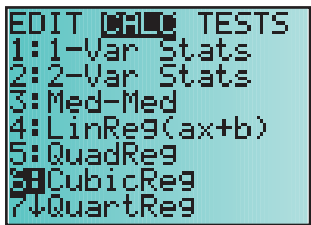


L1	L2	L3	Z
0	1.5		
10	2.5		
20	9.5		
30	28.5		
L2(1)=1.5			

Verlassen Sie danach die Listeneingabe mit [2nd][QUIT].

Drücken Sie die Tasten [STAT]; [CALC]; 6:CubicReg [ENTER].

Auf dem Bildschirm erscheint CubicReg.



Geben Sie dahinter die Namen der Listen mit den Daten und die Bezeichnung der Funktion ein, in der die Kurve gespeichert werden soll!

[2nd][L1], [2nd][L2], [VAR]; Y-VARS; 1:Function [ENTER]; 1:Y1 [ENTER].

Erklärung: CubicReg L_1 [Liste mit x -Werten], L_2 [Liste mit y -Werten], Y_1 [Regressionsgleichung wird in Y_1 gespeichert]

Die Regressionsfunktion wird berechnet und die Koeffizienten werden angezeigt.

Die Gleichung dritten Grades wird in Y_1 gespeichert. Y_1 muß vor der Berechnung deaktiviert oder gelöscht werden.

Anmerkung:

R^2 erhalten Sie nur, wenn Sie zuvor in [2nd][CATALOG]; DiagnosticOn aktiviert haben.

Die gesuchte Gleichung lautet: $y = 0,001x^3 + 1,5$. Die Gleichung ist in Y_1 gespeichert.

Für den zurückgelegten Weg gilt somit:

Weg = $\frac{\text{Geschwindigkeit } (x) \cdot \text{Vorrat im Tank (400 Tonnen)}}{\text{Verbrauch pro Stunde } y}$

\Rightarrow Zielfunktion: Weg = $\frac{x \cdot 400}{0,001 \cdot x^3 + 1,5}$

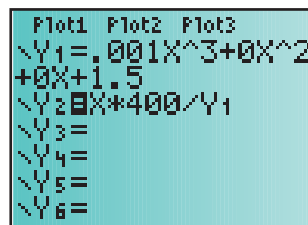
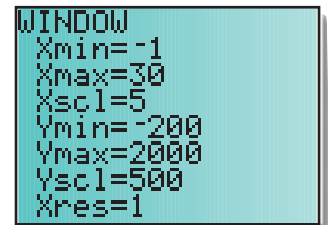
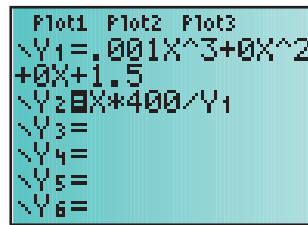
Dieser Weg soll bei gegebenem Treibstoffvorrat maximal werden. Die Geschwindigkeit x ist gesucht.

Drücken Sie [Y=] und geben Sie für Y_2 den Term der Zielfunktion ein.

$Y_2 = 400 \cdot X / Y_1$

Die Funktion Y_1 geben Sie dabei durch folgende Tastenfolge ein:

Drücken Sie [VAR]; wählen Sie mit [Y-VARS]; 1:Function [ENTER]; 1:Y1 [ENTER]

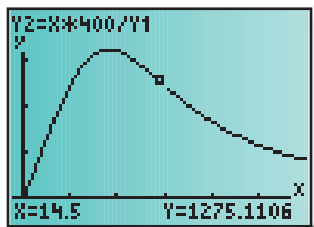


In Y_1 steht die zuvor berechnete Regressionsfunktion. Nur Y_2 ist aktiviert.

Drücken Sie [WINDOW], geben Sie geeignete Grenzen für das Grafikenfenster ein und zeichnen Sie die Funktion Y_2 indem Sie [GRAPH] drücken.

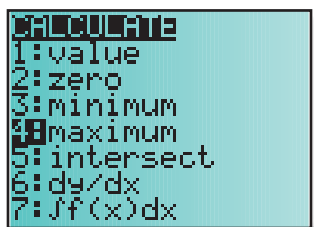
Wenn Sie zusätzlich noch die

Taste **TRACE** drücken, können Sie mit den Cursortasten **→** und **←** dem Verlauf der Kurve folgen. Geschwindigkeit (hier X) und Wegstrecke (hier Y) werden angezeigt.



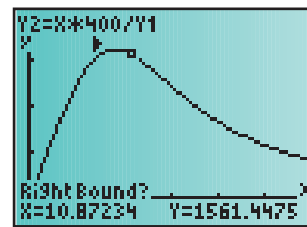
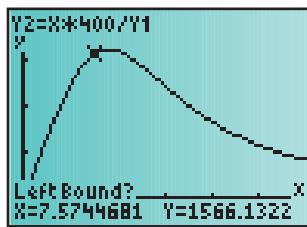
Zur Berechnung der maximalen Wegstrecke führen Sie folgende Schritte aus:

Die Tastenfolge **2nd** **[CALC]** öffnet das Fenster **CALCULATE**, aus dem Sie **4:maximum** wählen. (Einfach „4“ eingeben!)

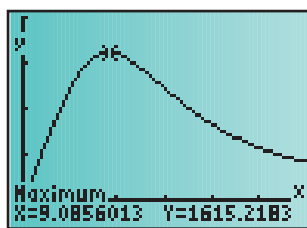


Sie kommen wieder ins Grafikfenster zurück und werden nach **Left Bound?** (= linke Grenze des Intervalls, in dem das Maximum liegt) gefragt. Diese linke Grenze können Sie mit dem Cursor bestimmen (Wert mit **ENTER** bestätigen). Sie können aber auch einfach eine Zahl als Grenze eingeben und mit **ENTER** bestätigen.

Nach der Eingabeaufforderung **Right Bound?** gehen Sie analog vor! Beachten Sie, dass zwischen den beiden gewählten Grenzen ein Maximum am Bildschirm erkennbar sein muss!



Auf dem Bildschirm erscheint die Frage **Guess?**. Bestätigen Sie mit **ENTER** und Sie erhalten das relative Maximum zwischen den gewählten Grenzen.



Lösung: Bei einer Geschwindigkeit von ca. 9 km/h kann das Schiff mit dem Treibstoffvorrat von 400 Tonnen die größte Strecke (1615,2 km) zurücklegen.

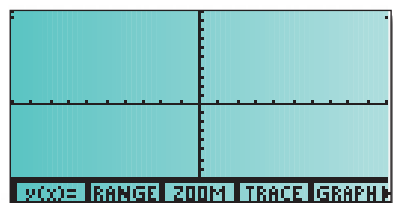
Autorin:
Renate Eder, Wiener Straße 2, A-2485 Wampersdorf
e-mail: renateder@netway.at

Dr. Rainer Heinrich, Weixdorf

Optische Täuschungen am grafikfähigen Taschenrechner

Es existieren Funktionen, deren Graphen den Nutzer eines GTR mitunter zunächst „verwundern“, häufig aber auch zu völlig falschen Schlüssen über die Eigenschaften der Funktion verleiten. Im folgenden wurde der TI-85 verwendet, die Beispiele lassen sich jedoch auf jeden anderen GTR übertragen.

- **Beispiel 1 ist sicher recht harmlos.**
Der Graph der Funktion $y=f(x)=2x+30$ soll dargestellt werden.



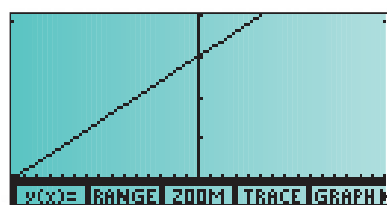
Man erschrickt zunächst vor dem leeren Display und entdeckt vielleicht etwas später die beiden einzelnen Punkte in der linken oberen Ecke. Klar, das Standardfenster lässt nur

die x-Werte im Intervall $[-10;10]$ und y-Werte im Intervall $[-10;10]$ zu.

Durch eine Änderung der RANGE-Variablen auf

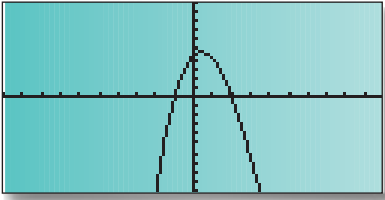
xMin=-15
xMax=15
xScl=1
yMin=-5
yMax=40
yScl=10

erhält man ein Bild, das die Eigenschaften des Graphen sehr viel deutlicher zeigt.

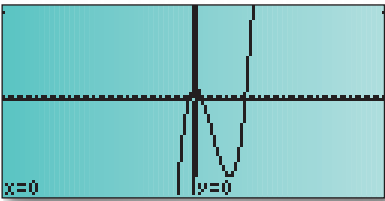


● **Schlimmer ist schon folgendes Beispiel 2:**

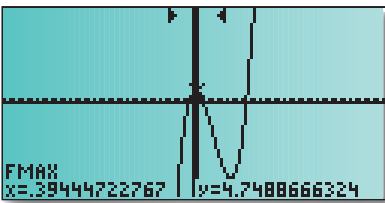
Der Graph der Funktion $y = f(x) = 0,2(x^3 - 12x^2 + 9x + 22)$ soll dargestellt und untersucht werden. Die grafische Darstellung liefert folgendes Bild:



Daraus kann schnell geschlussfolgert werden, der Graph der Funktion besitzt ein lokales Maximum und 2 Nullstellen, was zweifellos stimmt, aber beim entsprechenden Verkleinern (ZOOM-OUT) erlebt man doch eine Überraschung:

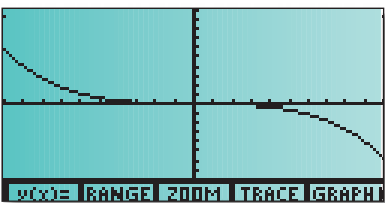


Die Funktion besitzt offensichtlich eine weitere Nullstelle und ein lokales Minimum. Weitere Nullstellen sind bei einer ganz-rationalen Funktion 3. Grades nicht möglich, weshalb wir auch keine weiteren lokalen Extrema finden werden. Die zweite Darstellung vermittelt ein besseres „globales“ Bild, dafür wird das Verhalten an interessanten Stellen aber naturgemäß „ungenauer“ dargestellt. So könnte man etwa vermuten, das lokale Extrema sei an der Stelle $x=0$. Ein rechnerisches Untersuchen bzw. Ablesen aus dem nächsten Bild klärt den Irrtum schnell auf:



● **Beispiel 3:**

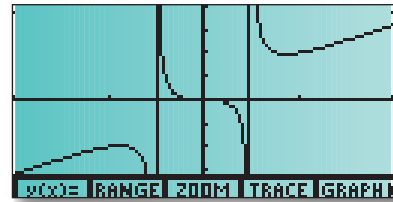
Der Graph der Funktion $Y = f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 - 625}$ ist darzustellen. Das Bild im Standardbereich lässt folgende Eigenschaften vermuten:



Die Funktion besitzt keine Unstetigkeitsstellen, der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung und ist zu diesem zentralsymmetrisch.

Der geübte Anwender der Analysis sieht natürlich sofort: Die Funktion besitzt Polstellen bei $x_p = \pm 25$. Am Zähler erkennt man, dass bei $x=0$ keine Nullstelle liegen kann und damit der Graph der Funktion auch nicht zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein kann.

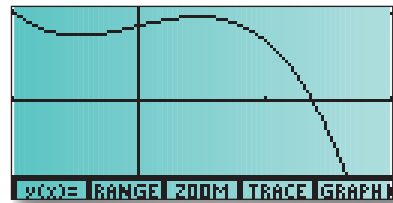
Die Darstellung mit folgenden Range-Variablen liefert folgendes Bild:



xMin=-100
xMax=100
xScl=50
yMin=-400
yMax=400
yScl=100

Damit erhält man einen besseren globalen Eindruck des Graphen, der lokale Eindruck, etwa in der Nähe des Koordinatenursprungs wird dagegen schlechter.

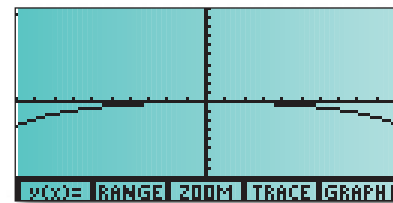
Diesen liefert besonders gut folgende RANGE-Einstellung:



xMin=-1
xMax=2
xScl=1
yMin=-0,01
yMax=0,01
yScl=0

● **Oder nehmen wir als Beispiel 4 die Funktion $y = f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 - 225}$**

Untersuchen Sie diese Funktion auf Nullstellen und Koordinaten der lokalen Extrema. Aus dem Bild des GTR würden wir völlig falsche Schlussfolgerungen ziehen.

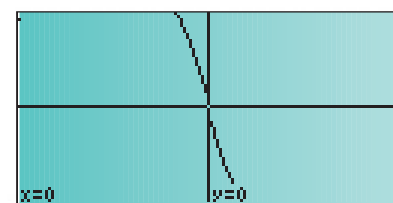


Die Funktion besitzt Nullstellen bei $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = \frac{1}{3}$

Die Koordinaten der lokalen Extrema sind:
 $P_{MAX}(0,17; 0,00037)$ $P_{MIN}(1349,83; 2,9996)$

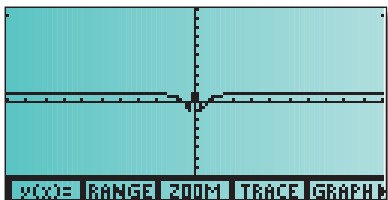
● **Beispiel 5:**

Der Graph der Funktion $Y = 2x \ln \left| \frac{x}{2} \right|$ wurde mit Hilfe starker Vergrößerung (BOX-Funktion) dargestellt.

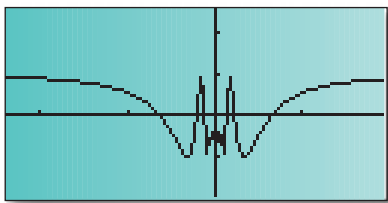


Der Verlauf des Graphen deutet auf Stetigkeit hin. Dabei besitzt die Funktion an der Stelle $x=0$ eine Lücke, wie man leicht anhand der Gleichung der Funktion sieht.

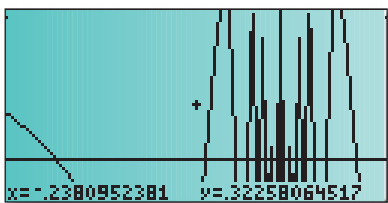
● **Beispiel 6: Der Graph der Funktion $y = f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ wurde grafisch dargestellt.**



Der Graph lässt vermuten: Die Funktion hat ein lokales Maximum bei $x=0$ und je ein lokales Minimum links und rechts davon. Vergrößert man sich den interessanten Bereich (ZOOM-BOX), so erhält man folgendes Bild:



Vergrößert man das Bild ein weiteres Mal (ZOOM-IN), erhält man folgendes Bild:



Die Aussagen, die anhand des ersten Bildes getroffen wurden, sind also in keiner Weise haltbar.

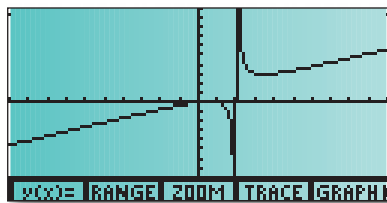
Aus den genannten Beispielen könnte man nun leichtfertig schließen, dass die Verwendung des GTR im Unterricht keinerlei Vorteile, eher Nachteile durch viele Trugschlüsse bringt. Bei genauem Hinsehen ist das aber gerade nicht der Fall. Es zeigt lediglich:

Der GTR ist kein Allheilmittel, er ersetzt nicht die Behandlung der Analysis.
Der GTR ohne CAS ist ein Hilfsmittel u.a. zum Darstellen von Funktionsgraphen.

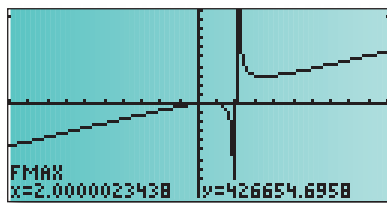
Aber:
Bei allen Beispielen ist die Untersuchung der Graphen ohne GTR viel aufwendiger, bringt weitere Fehlerquellen und ist in einigen Fällen sogar fast unmöglich.
Die Untersuchung der Graphen genannter Beispiele wird also durch GTR erst möglich.

● **Betrachten wir abschließend folgendes Beispiel 7, welches in meiner Unterrichtspraxis auftrat.**

In einer Klausur war eine Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2-x}{2x-4}$ ($x \in D_f$) gegeben. Zunächst sollten einige Eigenschaften der Funktion und des Graphen ermittelt werden, ein Blick auf den Graphen gibt eine gewisse anschauliche Vorstellung.



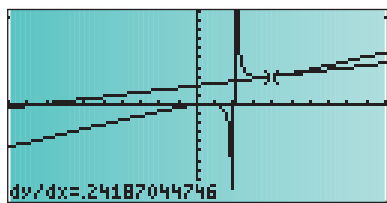
Ein Schüler versuchte die Koordinaten des lokalen Maximums anzugeben. Er gab den Befehl FMAX ein und erhielt folgende Darstellung:



Offensichtlich ohne genaue Betrachtung des Bildes gab der Schüler an: $P_{MAX}(2; 42655)$. Der Fehler trat auf, obwohl wir im Unterricht erarbeitet hatten, dass der GTR stets das globale Maximum im Bereich der eingestellten Grenzen sucht. Durch ein ansonsten sinnvolles, hier aber sehr unglückliches Runden der Koordinaten liegt die angegebene Extremstelle hier an der Polstelle der Funktion, die besagter Schüler zuvor exakt ermittelt hatte. Leider bemerkte besagter Schüler seinen Irrtum nicht.

Es folgte die Teilaufgabe
b) Die Gerade t ist Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P(4; f(4))$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t .

Eine Schülerin ermittelte als Gleichung der Tangente $y = \frac{1}{4}x + 2$. Als Kontrolle zeichnete sie die Tangente im GTR ein.



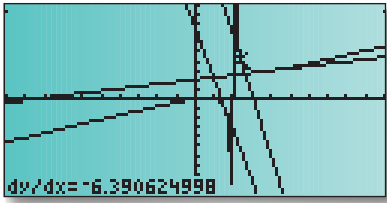
Soweit war die Nutzung des GTR sicher eine Hilfe. Doch es folgte Teilaufgabe c) Es existieren auch Tangenten an den Graph der Funktion f , die senkrecht zur Tangente t verlaufen. Berechnen Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Graphen der Funktion f .

Das Ermitteln der Abszissen führte besagte Schülerin zunächst rechnerisch aus und erhielt völlig richtig:

$$x_{B_1} = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_{B_2} = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{2} .$$

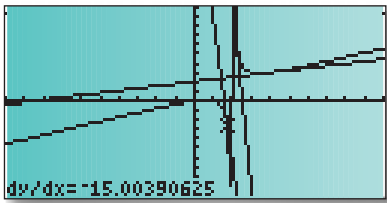
Sie erhielt als Näherungswerte: $x_{B_1} \approx 1,528$ und $x_{B_2} \approx 2,471$

An diesen Stellen zeichnete sie sich zur Kontrolle mit dem Befehl TANLN die Tangenten ein und erhielt dieses Bild.



Damit war ihr klar, dass sie sich verrechnet haben musste, denn diese Tangenten waren weder senkrecht zur Tangente t noch parallel.

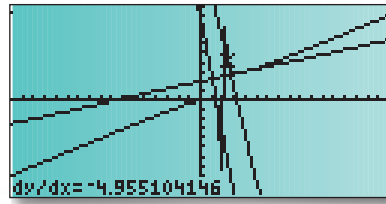
Sie versuchte im folgenden durch Probieren mit dem Befehl TANLN eine Lösung zu finden.



Als mögliche Berührungsstellen schienen ihr nun die Stellen $x=1,74$ und $x=2,3$ wahrscheinlich.

Einen solchen Lösungsweg hatte ich zuvor nie als möglich erachtet. Im Auswertungsgespräch haben wir ermittelt, dass die Standardeinstellung des Rechners eben nicht winkeltreu ist. Dafür besitzt der Rechner die Möglichkeit einer ZSQR - (SQUARE) - Einteilung der Achsen, wobei x - und y -Achse im selben Verhältnis geteilt werden.

Hätte die Schülerin ihre Lösung jetzt kontrolliert, ergebe sich folgendes Bild:



Autor:
Dr. Rainer Heinrich
Südstraße 39
D-01478 Weixdorf

Dieter Brandt, Freiburg

Bezierkurven mit dem TI-92

Wer mit einem Zeichenprogramm oder einem Textverarbeitungsprogramm arbeitet, hat sicher schon einmal die Darstellung einer Kurve oder eines Bogens benötigt. In vielen Programmen sind zu diesem Zweck Zeichenelemente vorhanden, die sich in gewissen Grenzen den eigenen Bedürfnissen anpassen lassen. Meist werden dafür Bezierkurven verwendet. Auch mit dem TI-92 können wir leicht Bezierkurven erzeugen und grafisch darstellen. Das unten wiedergegebene Programm zeigt, wie das unter Ausnutzung der symbolischen Fähigkeiten des TI-92 geschehen kann.

● Parameterdarstellungen auf dem TI-92

Wir gehen davon aus, dass Parameterdarstellungen von ebenen Kurven bekannt sind. Beispielsweise wird durch

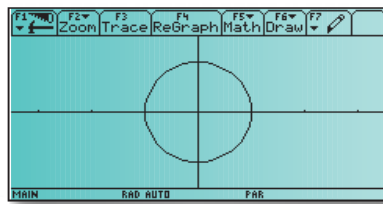
$$(1) \quad x(t) = \cos t; \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

ein Kreis in Parameterdarstellung beschrieben. Wir schreiben die Kurvengleichungen kurz vektoriell:

$$(2) \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

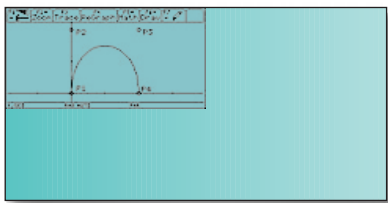
Der TI-92 kann ohne weiteres parametrisierte Kurven darstellen. Dazu müssen folgende Einstellungen vorgenommen werden:

1. bei *Mode* die Einstellung *Graph-PARAMETRIC* auswählen,
2. die Gleichungen für die gewünschte Kurve eingeben (z.B. im *Y = Editor*); dafür sind die Variablen $xt1$, $yt1$ (für die erste Kurve), $xt2$, $yt2$ (für die zweite Kurve) usw. reserviert.
3. mit *Diamond-GRAPH* die Kurve zeichnen, ggf. mit *Diamond-WINDOW* den Maßstab geeignet einstellen.



● Was sind Bezierkurven ?

Eine umfassende Einführung, die sich auch für den Unterricht verwenden lässt, ist in [1] zu finden. Wir stellen kurz das Wesentliche dar. Bezierkurven sind parametrisierte Kurven, die gewisse Steuerbedingungen erfüllen, so dass die Kurven bestimmte gewünschte Formen annehmen. Dadurch lassen sich Bezierkurven verwenden wie "Kurvenlineale". Um das zu erreichen, verwendet man eine Anzahl von Kontrollpunkten und geeignete Bedingungen zum Einstellen der Kurvenform. Als Beispiel verwenden wir die vier Kontrollpunkte $P_1(0|0)$, $P_2(0|1)$, $P_3(1|1)$, $P_4(1|0)$ (siehe Bild 2).



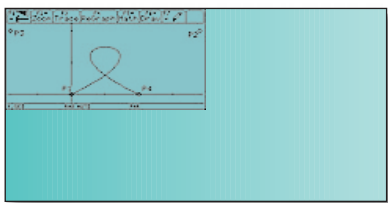
Wir suchen dazu eine Kurve $\vec{x}(t)$ mit den „Bezier-Bedingungen“

$$(3) \vec{x}(0) = \vec{p}_1, \vec{x}(1) = \vec{p}_4,$$

$$\vec{x}'(0) = k \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \vec{x}'(1) = k \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_4)$$

Die Kurve soll also durch die Punkte P_1 und P_4 gehen, in P_1 soll die Tangente in Richtung P_1-P_2 und in P_4 in Richtung P_3-P_4 verlaufen. Dabei ist der Wert für den Parameter k noch passend zu wählen, bei den dargestellten Bildern ist $k = 3$. Durch Veränderung der Punkte P_1 bis P_4 lässt sich bei Erfülltsein von (3) näherungsweise jede Kurvenform einstellen. Ggf. verwendet man mehrere Bezierkurven und hängt sie passend aneinander.

Die Kurve in Bild 3 entsteht z.B. mit den Kontrollpunkten $P_1(0|0), P_2(2|1), P_3(-1|1), P_4(1|0)$.



● Bestimmung von Bezierkurven

Die Bedingungen (3) lassen sich umschreiben in zweimal vier Gleichungen für die Komponenten. Mit Hilfe des Ansatzes

$$(4a) x(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$$

$$(4b) y(t) = e t^3 + f t^2 + g t + h$$

ergibt sich daraus ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Unbekannten a bis h bestimmen kann. In der Praxis wird ein anderer Weg beschritten, der Algorithmus von de Casteljau, der sich leicht programmieren lässt (siehe z.B. [2]) :

1. Gegeben seien die n Punkte $P_1(x_1|y_1), \dots, P_n(x_n|y_n)$ und ein Parameter $t \in [0;1]$
2. Setze für $i = 1, \dots, n$ $\vec{p}_i^{(0)} := \vec{p}_i$ (zu den Punkten P_1, \dots, P_n gehörende Ortsvektoren als Startvektoren),
3. Berechne für $k = 1, \dots, n-1$ $\vec{p}_i^{(k)} := (1-t) \cdot \vec{p}_i^{(k-1)} + t \cdot \vec{p}_{i+1}^{(k-1)}$, $i = 1, \dots, n-k$
4. Ergebnis $\vec{x}(t) = \vec{p}_1^{(n-1)}$

Der Algorithmus ist für beliebiges $n > 1$ verwendbar, für unser Beispiel ist $n = 4$.

● Das Programm bezier()

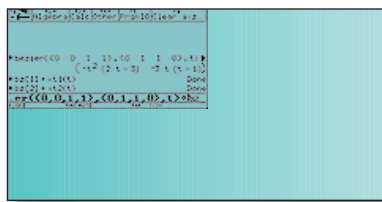
Das folgende TI-92 - Programm ist als Funktion konzipiert. Dabei werden die Punkte übergeben als Liste von x-Werten bzw. y-Werten. Als Ergebnis wird die Liste $\{b_x(t), b_y(t)\}$ für die Komponenten der gesuchten Bezierfunktion zurückgegeben.

```
bezier(a,b,t)
Func
  " berechnet die Bezierkurve zu den Punkten (a[]|b[])
  " a : Liste von x-Werten
  " b : Liste von y-Werten
  " t : Variable
Local k,j,n dim(a)»n
For k,1,n
..For j,1,n-k
...t*a[j+1]+(1-t)*a[j]»a[j]
...t*b[j+1]+(1-t)*b[j]»b[j]
..EndFor
EndFor
{a[1],b[1]}
EndFunc
```

Beispiel:

Um die Bezierkurve zu den Punkten in Bild 2 zu erhalten, wird eingegeben: `bezier({0,0,1,1},{0,1,1,0},t)` -> bz

Das Ergebnis ist in der Variablen bz gespeichert und kann dann an die für das Zeichnen vorgesehenen Funktionen `xt1` bzw. `xt2` übergeben werden (siehe Bild 4). Mit *Diamond - GRAPH* kann dann - bei geeigneter Einstellung des Zeichenbereichs - die Bezierkurve gezeichnet werden.



Bemerkung:
Bei Verwendung des Algorithmus von de Casteljau ergibt sich für den Parameter k in (3) der Wert $k = 3$. Rechnet man mit dem Gleichungssystem, das sich aus (3) und (4) ergibt, so kann man über k noch verfügen.

Literatur :

[1] Brandt, Dieter : Was sind eigentlich Bezier-Kurven, in : Math. in der Schule, Pädagogischer Zeitschriftenverlag, Berlin, 36(1998), Heft 4, Seite 239-250 (liegt auch als HTML-Dokument vor)

[2] Sauer, Thomas: Ein algorithmischer Zugang zu Polynomen und Splines, Mathematische Semesterberichte 2 (1996), Seite 169-189.

Autor:
Dieter Brandt, Eckerstr. 1, D-79104 Freiburg
brandt@sun2.mathematik.uni-freiburg.de

Andreas Giske, Groß Breese

Interessante Probleme aus dem Bereich der Analysis aufbereitet für den MaU der Sek. II

Eine etwas andere Rekonstruktion einer Funktionsgleichung

Aufgabe:

Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung des in der Abbildung 1 dargestellten Graphen G_g der Polynomfunktion g . Der Graph von g besitzt an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ Sattelpunkte und g ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend. Der Graph der Funktion g sei punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

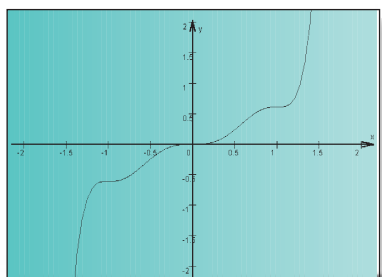


Abbildung 1

Grundlegende methodische Vorbemerkungen:

Der Einsatz dieser Aufgabe kann zur Wiederholung am Anfang der Klassenstufe 12 im Leistungskurs erfolgen, da eine Vielzahl von Inhalten der Klassenstufe 11 benutzt und somit gefestigt werden, und weil diese Inhalte eine Grundlage für die weitere Arbeit im Lehrgang Analysis darstellen.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ist es angebracht, wenn je ein oder jeweils zwei Schüler über einen TI-92 verfügen oder in Gruppen zu je 2 Schülern einen Computer mit Derive benutzen können. Die verschiedenen Unterrichtsversuche haben gezeigt, daß es günstig ist, die Schüler selbständig durch das Darstellen verschiedener Graphen von Polynomfunktionen probieren zu lassen. Daraus erwächst die eindeutige Erkenntnis, so diese Aufgabe nicht lösen zu können. Stehen diese technischen Voraussetzungen nicht zur Verfügung, sollte man wenigstens einen TI-92 oder einen Computer mit Display benutzen, um die Motivation über die Darstellung von ausgewählten Funktionsgraphen zu realisieren.

Der Versuch einer herkömmlichen Rekonstruktion erzeugt beim Schüler sofort ein Problem, denn er kann nicht unmittelbar den Grad der gesuchten Polynomfunktion angeben. Dieser muß erst durch unterschiedliche Betrachtungen bestimmt werden.

Lösungsgedanken und -varianten:

(1) Bestimmung des Graphen der 1. Ableitungsfunktion g' der Funktion g .

Zum Skizzieren des Graphen der 1. Ableitungsfunktion wird der Zusammenhang der Monotonie der Ausgangsfunktion und den Funktionswerte der 1. Ableitungsfunktion genutzt. Hier kommt noch einmal der Unterschied zwischen Extrempunkt, Wendepunkt und Sattelpunkt sehr schön zum Ausdruck.

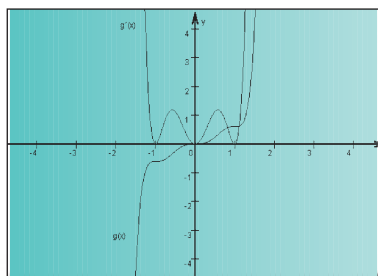


Abbildung 1

Da es sich bei der Ausgangsfunktion g um eine Funktion handelt, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft, muß die 1. Ableitungsfunktion g' eine Funktion sein, deren Graph axialsymmetrisch zur y -Achse ist. In jedem Funktionsterm von g treten nur positive gerade Zahlen als Exponenten von x auf, welche nach dem Ableiten alle ungerade werden.

Methodische Hinweise:

Der TI-92 kann hier zur Kontrolle und Erkenntnisgewinnung durch den Schüler eingesetzt werden. Er kann somit seine Vermutungen an Beispielfunktionen und deren Graphen überprüfen.

(2) Festlegung und Begründung des min. Grades der 1. Ableitungsfunktion.

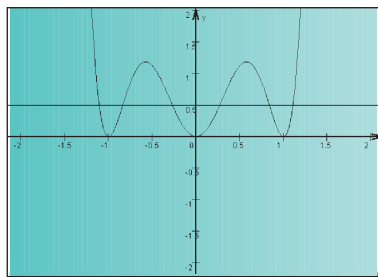


Abbildung 3

Würde man den Graph der 1. Ableitungsfunktion um einen geringen Teil in Richtung der positiven y -Achse verschieben, so bekommt man maximal 6 Nullstellen (Abb.3). Daraus folgt, daß die 1. Ableitungsfunktion einen minimalen Grad von 6 und unsere Ausgangsfunktion als minimalen Grad 7 besitzen muß.

1. Ableitungsfunktion: $\Rightarrow g'(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

2. Ausgangsfunktion: $\Rightarrow g(x) = a_7x^7 + a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x + c$

Methodische Hinweise:

Der TI 92 kann auch hier zur Kontrolle und Erkenntnisgewinnung durch den Schüler eingesetzt werden.

(3) Wie sehen die Koeffizienten der Funktionsgleichung der 1. Ableitungsfunktion g' aus?

Der Graph der 1. Ableitungsfunktion besitzt 3 Nullstellen (Berührungsstellen mit der x-Achse): $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Durch die Kenntnis über Linearfaktorzerlegung von Polynomfunktionen kann man folgenden Term angeben: $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$. Nach Multiplikation der Linearfaktoren ergibt sich der Term $x^3 - x$. Dies erzeugt einen Widerspruch zu den bisherigen Untersuchungen. Die folgenden beiden Betrachtungen zeigen Möglichkeiten zur Termfindung mit dem exakten Grad auf.

Betrachtung 1:

Untersuchung von Beispieltermen mit einem maximalen Grad von 6:

1. Variante

$$v_1(x) = x^3 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)$$

$$= x^6 + x^5 - x^4 - x^3$$

$$\neq g'(x)$$

Bei v_1 handelt es sich nicht um eine symmetrische Funktion. Hier müssen weitere Kombinationen diskutiert werden.

2. Variante

$$v_2(x) = x \cdot (x + 1)^4 \cdot (x - 1)$$

$$= x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x$$

$$\neq g'(x)$$

Bei v_2 handelt es sich ebenfalls nicht um eine symmetrische Funktion. Auch hier müssen weitere Kombinationsmöglichkeiten diskutiert werden.

3. Variante

$$v_3(x) = x^4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$= x^6 - x^4$$

$$v_3'(x) = 6x^5 - 4x^3$$

$$0 = 6x^5 - 4x^3$$

$$0 = x^3 \cdot (6x^2 - 4) \Rightarrow v_3(x) \neq g'(x)$$

v_3 ist eine Funktion, deren Graph axialsymmetrisch zur y-Achse verläuft.

Die Untersuchung auf Extrema zeigt aber nur 3 Extremstellen, womit also auch v_3 ausscheidet.

4. Variante

$$v_4(x) = x^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$$

$$= x^6 - 2x^4 + x^2$$

$$v_4'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 2x$$

$$0 = x \cdot (6x^4 - 8x^3 + 2x)$$

$$\Rightarrow 5 \text{ Lösungen}$$

Der Graph der Funktion v_4 verläuft axialsymmetrisch zur y-Achse.

Die Untersuchung auf Extrema ergibt 5 Extremstellen. Hier müssen weitere Untersuchungen durchgeführt werden, so daß gezeigt werden kann $v_4(x) = g'(x)$.

Somit ergibt sich aus diesen Betrachtungen für die 1. Ableitungsfunktion unser gesuchten Ausgangsfunktion $g(x)$ die Funktionsgleichung $g'(x) = x^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$.

Methodische Hinweise:

Bei diesen Aufgaben bieten sich natürlich auch Diskussionen zur Problematik der Termäußerungen und deren Resultate an. Der TI-92 stellt hierbei ein gutes Hilfsmittel und Kontrollgerät dar.

Möglichkeit des Einsatzes des TI 92:

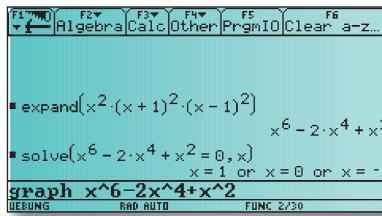


Abbildung 7

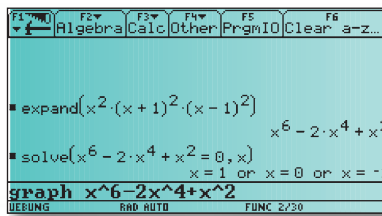


Abbildung 8

Betrachtung 2:

Aus der Erkenntnis, daß die 1. Ableitungsfunktion minimal den 6. Grad aufweisen muß, könnte man sofort auf die folgende Funktionsgleichung $g'(x) = x^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$ schließen. Die Begründung dieser Möglichkeit ergibt sich aus der Kenntnis über Doppelnullstellen. In den Abbildungen 4, 5 und 6 sind typische Vertreter von Graphen, deren Funktionen Doppelnullstellen aufweisen, dargestellt.

Methodische Hinweise:

Durch den Einsatz des TI-92 oder eines Computer-Algebra-Systems kann der Schüler selbständig auf induktivem Weg, d.h. aus Einzelheiten und konkreten Anwendungen, auf die Verallgemeinerung bzgl. der Darstellung von Doppelnullstellen schließen.

$$f(x) = (x - 2)^2 \quad g(x) = (x + 2)^2 \cdot x \quad k(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$$

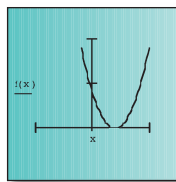


Abbildung 4

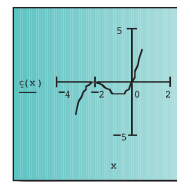


Abbildung 5

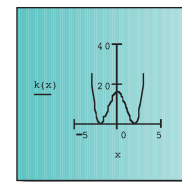


Abbildung 6

(4) Darstellung des Graphen der Funktion g

Nachdem eine 1. Ableitungsfunktion g' gefunden wurde, kann man jetzt auch ohne Kenntnisse der Integralrechnung sofort eine Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ angeben. Wenn man sich den Graph dieser Funktion ansieht, stellt man fest, daß die beiden äußeren Sattelpunkte sehr dicht an der x-Achse liegen. Um dies zu verändern, multipliziert man mit einem konstanten Faktor $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und bekommt eine

Darstellung alle Funktionen g mit $g(x) = a \cdot \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + x^2 \right)$

die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Setzt man z.B. für $a = 8$ ein, so erhält man den Graph der Funktion g , wie in der Abbildung 1 dargestellt.

Autor:
Andreas Giske, Dorfstraße 23a, D-19322 Groß Breese

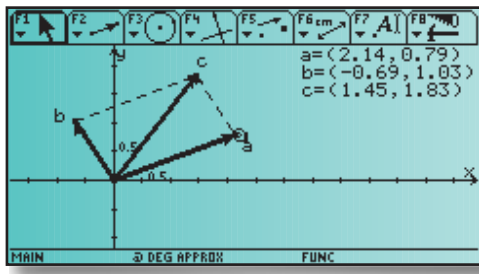
Markus Hohenwarter, Salzburg

Komplexe Zahlen zum „Anfassen“

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte. Eine dynamische Grafik im Geometriefenster des TI-92 noch viel mehr... Deshalb möchte ich hier eine Möglichkeit der geometrischen Veranschaulichung komplexer Rechenoperationen zeigen, die im Schüler eine Idee jener mysteriösen Konstrukte entstehen lassen kann. Außerdem werde ich eine daraus resultierende Anwendung für die Vektorgeometrie der Schule, die Punktdrehung in der Ebene, anschnitten.

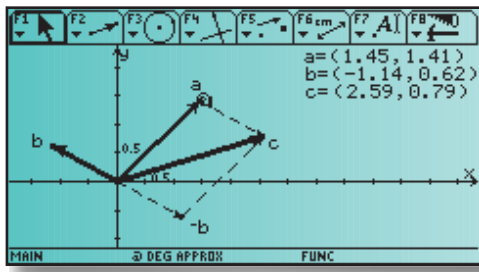
Addition und Subtraktion

Eine komplexe Zahl lässt sich anschaulich in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen. Dadurch können Addition und Subtraktion im Komplexen analog zu den entsprechenden Vektoroperationen im \mathbb{R}^2 betrachtet werden. Wichtig ist hierbei, auf den genauen Unterschied zwischen Vektor ($\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und komplexer Zahl hinzuweisen. Bei den Konstruktionen lassen sich die komplexen Zahlen a und b beliebig in der Ebene heranziehen. Dadurch verändern sich sowohl die strichlierten Linien als auch das Ergebnis c . Im rechten oberen Teil werden gleichzeitig immer die aktuellen Koordinaten, die der Binomdarstellung einer komplexen Zahl entsprechen, von a , b und c angezeigt.



Konstruktionsschritte

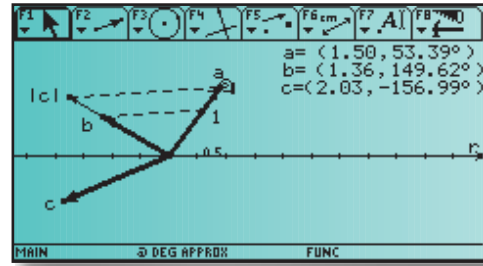
Man blendet die Koordinatenachsen mittels F8, Format, Coordinate Axes, Rectangular ein. Vom Nullpunkt aus sind nun zwei Vektoren a und b , unsere komplexen Zahlen, zu erstellen, die mittels Translation (F5) parallel verschoben werden. Zum entstandenen Schnittpunkt erstellen wir nun den Ergebnisvektor $c = a + b$. Da die Subtraktion $c = a - b$ der Addition $c = a + (-b)$ entspricht, brauchen wir vor der Translation lediglich b mittels Symmetry (F5) am Ursprung zu spiegeln. Will man Real- und Imaginärteil der Zahlen a , b und c anzeigen, benützt man dazu einfach Equation & Coordinates (F6).
Tip: Oft liegen zwei oder mehr Punkte übereinander. Um daraus einen einzigen zu machen, verwenden sie F4: Redefine Point, Transfer to another point.



Multiplikation

Für die Multiplikation bietet sich im Komplexen die Verwendung der Polardarstellung an. Sie verdeutlicht, dass es sich

hierbei um eine Drehstreckung (bzw. Drehstauchung) handelt: $(|a|; \varphi_a) \cdot (|b|; \varphi_b) = (|a| \cdot |b|; \varphi_a + \varphi_b)$
Zunächst wird der Betrag von c , also die Länge des entsprechenden Vektors, durch Anwendung des Strahlensatzes ($|c| = |a| \cdot |b| \Rightarrow |c| : |a| = |b| : |1|$) konstruiert. Anschließend braucht c durch Drehung um den Winkel $\varphi(a)$ von b aus nur noch in die richtige Lage gebracht zu werden.



Konstruktionsschritte

Wir verwenden diesmal das Polarkoordinatensystem mittels F8, Format, Coordinate Axes, Polar. Nun kreiert man einen Strahl (F2:Ray) vom Ursprung aus, auf dem der Vektor b zu liegen kommt. Um den Ursprung konstruieren wir jetzt einen Kreis (F3) mit Radius 1, dessen Schnittpunkt (F2) mit a auf 1 getauft wird. Als nächstes verbinden wir b mit 1 (F2:Segment) und konstruieren dazu eine Parallele (F4) durch a , die den Strahl bei der gesuchten Länge $|c|$ schneidet. Abschließend erstellen wir einen Vektor zu diesem Schnittpunkt und drehen ihn um den Winkel $\varphi(a)$ (F5).

Anmerkungen: Möchte man die negativen Winkel vermeiden, muss man die Winkel mittels Angle (F6) anstelle von Equation & Coordinates bestimmen. Statt des Strahlensatzes kann man Calculate (F6) verwenden, um die Länge $|c|$ zu berechnen.

Die Division kann unter Verwendung des Strahlensatz ($|c| = |a|/|b| \Rightarrow |c| : 1 = |a| : |b|$) analog konstruiert werden.

Wurzelziehen

Das Potenzieren ist mit der Multiplikation bereits klar:

$$a^2 = a \cdot a = (|a| \cdot |a|; \varphi_a + \varphi_a) = (|a|^2; 2\varphi_a)$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} = (|a| \cdot \dots \cdot |a|; \underbrace{\varphi_a + \dots + \varphi_a}_{n \text{ mal}}) = (|a|^n; n \cdot \varphi_a)$$

Im Reellen gilt: Wenn $x^n = a$ ist, dann nennen wir x eine n -te Wurzel von a ($\sqrt[n]{a}$). Dabei gibt es für x entweder eine Lösung (n ungerade) oder zwei Lösungen (n gerade), wenn $a \geq 0$ ist. Im Komplexen wollen wir unter der Wurzel das Gleiche verstehen, da die reellen Zahlen nur ein Spezialfall der komplexen Zahlen sind. Wenn $w^n = z$ ist, dann nennen wir w eine n -te Wurzel von z ($\sqrt[n]{z}$). Wie viele Wurzeln gibt es aber nun im Komplexen, und wie sehen diese aus?

Schauen wir mal genauer hin: Seien $w = (|w|; \varphi_w)$ und $z = (|z|; \varphi_z)$, dann soll $w^n = z$, also $(|w|; \varphi_w)^n = (|w|^n; n \cdot \varphi_w) = (|z|; \varphi_z)$ gelten. Diese beiden Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl Betrag wie Winkel gleich sind. Das heißt also $|w|^n = |z|$ und $n \cdot \varphi_w = \varphi_z$. Daraus folgt sofort, dass $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ und $\varphi_w = \frac{\varphi_z}{n}$ sind.

Allerdings ist das noch nicht ganz korrekt! Die komplexe Zahl $z = (|z|; \varphi_z)$ ist nämlich dieselbe wie $(|z|; \varphi_z + 360^\circ)$, $(|z|; \varphi_z + 720^\circ)$ bzw. $(|z|; \varphi_z + 1080^\circ)$ usw.

Bei Multiplikation und Division wird mit φ_z nur addiert bzw. subtrahiert; dabei ist es egal, ob man einige ganze Umdrehungen dazu gibt oder nicht.

Jetzt haben wir jedoch den Winkel φ_z durch n dividiert. Dabei ist es nicht egal, ob wir φ_z oder $\varphi_z + 360^\circ$ verwenden. Wie viele verschiedene Lösungen für φ_w ergeben sich dadurch?

$$\varphi_w \in \left\{ \frac{\varphi_z}{n}, \frac{\varphi_z+360}{n}, \frac{\varphi_z+2\cdot 360}{n}, \dots, \frac{\varphi_z+(n-1)\cdot 360}{n}, \frac{\varphi_z+(n+1)\cdot 360}{n} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\varphi_z}{n}, \frac{\varphi_z+360}{n}, \frac{\varphi_z+2\cdot 360}{n}, \dots, \frac{\varphi_z+(n-1)\cdot 360}{n}, \frac{\varphi_z}{n} + 360, \frac{\varphi_z+360}{n} + 360 \right\}$$

Wir sehen, dass sich ab $\frac{\varphi_z+n\cdot 360}{n} = \frac{\varphi_z}{n} + 360 \equiv \frac{\varphi_z}{n}$ die Winkel wieder nur um ganze Drehungen unterscheiden. Offenbar erhalten wir n verschiedenen Lösungen für φ_w .

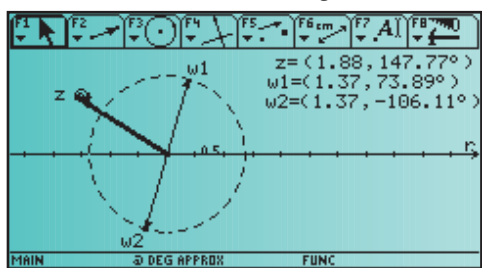
$$\varphi_w \in \left\{ \frac{\varphi_z}{n}, \frac{\varphi_z+360}{n}, \frac{\varphi_z+2\cdot 360}{n}, \dots, \frac{\varphi_z+(n-1)\cdot 360}{n}, \frac{\varphi_z+(n+1)\cdot 360}{n} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\varphi_z+k\cdot 360}{n} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Damit haben wir unsere Fragen beantwortet: Im Komplexen gibt es für die n -te Wurzel immer n verschiedene Lösungen, und zwar:

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}; \frac{\varphi_z+k\cdot 360}{n} \right) \text{ mit } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Viel interessanter als diese (einem Schüler) nichtssagende Formel ist die geometrische Interpretation der komplexen Wurzel. Neben der ästhetischen Schönheit des entstehenden regelmäßigen n -Eckes können die Schüler ein tieferes Verständnis dafür entwickeln, warum es im Reellen einmal zwei und dann wieder nur eine Lösung gibt. Genauso können sie erkennen, wieso die Quadratwurzel einer negativen Zahl im Reellen keine Lösung hat. Neben der Quadratwurzel ist besonders die Kubikwurzel interessant, da hier eine negative reelle Zahl auch ein reelles Ergebnis liefert.



Zur Konstruktion

Nach dem Erstellen des Vektors z im Polarkoordinatensystem lässt man sich seine Koordinaten anzeigen. Mit Calculate (F6) ermitteln wir daraus Länge und Winkel der Wurzeln. Die Länge kann mit Measurement Transfer (F4) auf die reelle Achse abgeschlagen werden. Von dort aus dreht (F5) man die Wurzeln um die entsprechenden Winkel in ihre richtige Lage. Länge und Winkel versteckt man schließlich mit Hide / Show (F7). Zur Verdeutlichung, dass die Wurzeln auf einem Kreis liegen, kann man diesen strichliert (F7) einzeichnen.

Drehungen in der Ebene

Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene entspricht jener eines Vektors bzw. Punktes der Ebene. Die Multiplikation im Komplexen lässt sich dazu nutzen, um einen Punkt im \mathbb{R}^2 um den Ursprung zu drehen.

Die Drehung eines Vektors z um den Winkel α entspricht der Multiplikation $z \cdot (1; \alpha)$. Um mit kartesischen Koordinaten des \mathbb{R}^2 rechnen zu können, müssen wir jedoch die Binomdarstellung verwenden.

Seien nun $z = a + i b$ und $(1; \alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$. Dann er-

halten wir im Home - Fenster für $(a+ib)(\cos(\alpha)+i \sin(\alpha))$ als Ergebnis $a \cos(\alpha) - b \sin(\alpha) + (a \sin(\alpha) + b \cos(\alpha))i$.

Dieses Ergebnis übersetzen wir jetzt in den \mathbb{R}^2 , indem der Realteil als x - Koordinate und der Imaginärteil als y - Koordinate interpretiert werden.

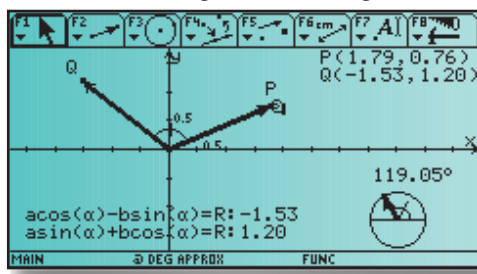
Der Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ wird durch Drehung um α um den

Ursprung also zu $P = \begin{pmatrix} a \cos a - b \sin a \\ a \sin a + b \cos a \end{pmatrix}$.

Oder in Matrixschreibweise: $P = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \cdot P$.

Diese Drehungsmatrix, die für die Beschreibung von Bewegungen sehr wichtig ist (wie zum Beispiel bei Computerspielen), zeigt, dass die trigonometrischen Funktionen doch nicht ganz umsonst sind.

Wir wollen unser Ergebnis nun wieder visualisieren und "überprüfen". Zunächst soll einfach ein Punkt (Vektor) um den Ursprung gedreht werden. Der nächste Schritt wäre dann die Drehung um einen allgemeinen Punkt der Ebene.



Zur Konstruktion

Mit einem kleinen Vektor rechts unten lässt sich der Drehwinkel einstellen. Um diesen Winkel wird der Ortsvektor von P um den Ursprung gedreht. Rechts oben sind die daraus resultierenden Koordinaten von Q angeführt. Zur Probe habe ich die Koordinaten von Q auch rechnerisch (Calculate) nach unserer Drehformel ermittelt. Man sieht, dass die Koordinaten identisch sind. Die Winkel wurden mit Angle (F6) abgenommen und mit Mark Angle (F7) hervorgehoben.

Zusammenfassung

Ich glaube, dass durch ein derartiges anschauliches Vorgehen die Schüler besser lernen, mit den ungewohnten komplexen Zahlen umzugehen. Die Furcht vor der Polarform dürfte wohl so auch vielen zu nehmen sein.

Besonders wichtig erscheint es mir aber, dass die Schüler einen Sinn darin sehen, was sie gerade lernen. Wenn komplexe Zahlen für irgend etwas gut sein sollen, dann muss ich ihnen das als Lehrer auch zeigen. Es ist sehr wichtig, Verknüpfungen zu anderen Themengebieten, wie hier der Geometrie, herzustellen, da sie motivieren und tieferes Verständnis fördern. Durch die Möglichkeit zu experimentieren haben die Schüler die Möglichkeit, etwas selbst zu entdecken - und nur dann macht Mathematik auch Spaß.

Komplexe Zahlen - es kommt drauf an, was man draus macht.

Anmerkung des Autors

Dieser Artikel ist eine gekürzte Version der Arbeit "Die Visualisierung der Rechenoperationen im Komplexen mit Cabri", welche ich im Zuge der VL EDV für Lehramt (SS 1997) von Herrn Prof. Karl Josef Fuchs an der Universität Salzburg verfasste. Ich habe also die Arbeit auf den TI-92 portiert. Die genannte Arbeit ist auf meiner privaten Homepage (<http://www.edvz.sbg.ac.at/~honig>) unter "Meine Arbeiten" zu finden.

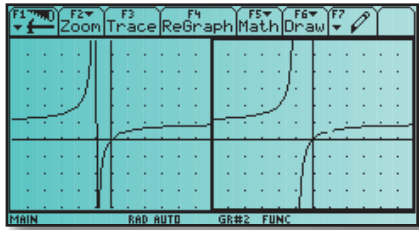
Autor: Markus Hohenwarter, Hüttenbergstraße 4/29, A-5020 Salzburg, Markus.Hohenwarter@mh.sbg.ac.at

Wolfgang Pröpper, Nürnberg

Das Plotten von Funktionen - ein Kinderspiel? (Teil 1)

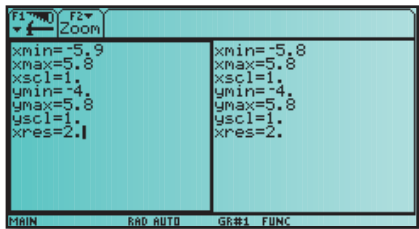
Über Schönheit läßt sich bekanntlich trefflich streiten. Dies ist in der Mathematik nicht anders als in der bildenden Kunst oder in der Literatur.

Beim Vergleich der beiden Plots im Split-Screen Modus jeweils der Funktion $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ dürfte in Mathematikerkreisen wohl Einigkeit herrschen.¹⁾



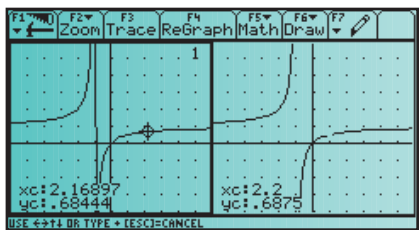
Während der Graph im linken Fenster bei -1 eine um ein Pixel versetzte, fast vertikale Linie aufweist erkennt man im rechten Fenster die unendliche Sprungstelle bei -1 und, ganz deutlich, die Definitionslücke an der Stelle x = 1.

Die Ursache finden wir, wenn wir zu beiden Fenstern den Window Editor ansehen:



Der minimale Unterschied bei xmin löst die unterschiedlichen Plots aus.

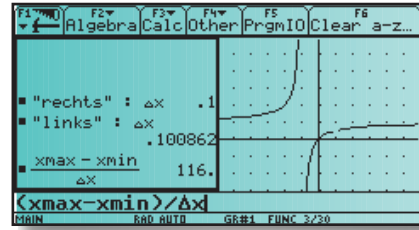
Sehr schön ist dies auch zu sehen, wenn man in beiden Fenstern den Graph im Trace Mode [F3] verfolgt: Während im linken Fenster "krumme" x-Werte auftreten, sind die Argumente im rechten Fenster "glatte" Zahlen, mit einer Schrittweite von 0,2.



Beim Tracen erkennt man, daß die Argumente -1 und 1 im linken Fenster nicht angenommen werden. Im rechten Fenster werden die x-Werte -1 und 1 gefunden, aber (wie könnte das auch der TI-92 ??) es werden keine Funktionswerte ausgeworfen. Damit können keine benachbarten Punkte verbunden werden. Der Pol und die Definitionslücke kommen im rechten Fenster zum Vorschein.

Eine weitere Information liefert die Systemvariable Δx. Sie wird im Home Screen, einmal vom rechten Fenster und dann vom linken Fenster aus aufgerufen.²⁾ Sie ist für beide Fenster

unterschiedlich. Wenn man jedoch den Quotienten $\frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ berechnen läßt, erhält man in beiden Fällen den Wert 116.³⁾ Diese Zahl gibt an, wieviele Pixel im jeweiligen Fenster in x-Richtung verfügbar sind.



Richtet man nun den x-Bereich so ein, daß seine Länge einen Teiler der zur Verfügung stehenden Pixel ausmacht, kann man mit geeigneter Wahl von xmin und unter Beachtung der Auflösung xres in den meisten Fällen erreichen, daß kritische Stellen eines Graphen entsprechend gezeichnet werden.

Natürlich arbeitet das oben geschilderte Verfahren auch im Full Screen Modus. Der Quotient $\frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ liefert dort genau 238. Da 238 die Teiler 2, 7 und 17 besitzt, liefern Plotbereiche der Länge 7, 14 oder 17, aber auch von 3,5 oder 8,5, eine geeignete Basis für im obigen Sinn "schöne" Graphen. Bei einer Plotbereichslänge von 23,8 (oder auch 11,9) tritt zudem der Nutzen auf, daß Δx den schönen Wert 0,1 (bzw. 0,05) besitzt.

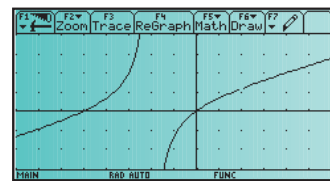
Für den Fall, daß Sie das eben Gelesene erproben wollen, untersuchen Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{3x^2 - 12} \quad \text{oder} \quad f_2(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 - x - 1}$$

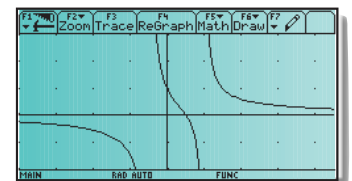
Und, wenn Sie es gar nicht lassen können:

$$f_3(x) = \frac{x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 359x + 330}{4x^4 - 20x^3 - 88x^2 + 320x + 384}$$

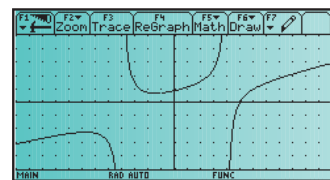
mit Polen bei ± 4, Lücken bei -1 und 6.)



f₁(x) mit x ∈ [-8 .. 6]; y ∈ [-3 .. 4]



f₂(x): x ∈ [-4 .. 4,5]; y ∈ [-2 .. 3]



f₃(x): x ∈ [-12 .. 11.8]; y ∈ [-5 .. 5]

Allerdings wird $\frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ Ihnen mit den oben besprochenen Mitteln keine Freude bereiten. Wie hier vorzugehen ist, soll in der Abteilung Tips und Tricks im nächsten Heft der TI-Nachrichten besprochen werden.

Autor:
Wolfgang Pröpper, Josef-Simon-Str. 59, D-90473 Nürnberg
w.proepper@wpro.franken.de

¹⁾ Die nebeneinander liegenden Plots werden erzeugt, indem man den Funktionsterm im y-Editor erfasst, dann mit [MODE][F2] einen vertikalen Split Screen erzeugen, für beide Applikationen Graph wählt und schließlich die Number of Graphs auf den Wert 2 setzt. Nun muß man nur noch in beiden Fenstern mit [GRAPH] das Graphikfenster öffnen. Das Umschalten zwischen den Fenstern erfolgt mit [2nd][APPS].

²⁾ Δ wird mit der 4-Tasten-Kombination [2nd][G] (für griechisch) und [T] (D) (für „großes“ Δ) erreicht.

³⁾ Weil xres den Wert 2 hat, ist die Schrittweite beim Trace im linken Fenster 0,201... und rechts genau 0,2.

Norbert Esper, Viersen

Der TI-92 in einem Mathematik-Grundkurs der Stufe 11.2

Schülerreaktionen

Die 19 Schülerinnen und 9 Schüler eines Mathematik-Grundkurses bekamen zu Beginn der Stufe 11.2 den TI-92 ausgehändigt und behielten ihn das ganze Halbjahr über. Unterrichtsthema war die Einführung in die Differentialrechnung. Etwa Mitte des Halbjahres beschrieb eine Schülerin ihre Erfahrungen mit dem Rechner so:

Mathe-Gk bei Herrn Janßen mit dem TI-92, Michael-Ende-Gymnasium Tönisvorst, Stufe 11, von Katrin Kowalczyk

Als Herr Janßen meinem Mathe-Grundkurs in der ersten Stunde mitteilte, dass wir als Pilotprojekt den TI-92 im Unterricht benutzen würden, waren wir ziemlich negativ eingestellt. Kommentare wie: "Ich bin doch kein Versuchskaninchen" und "...aber Computer sind doch so kompliziert" erfüllten den Raum.

Entsprechend chaotisch waren dann auch die nächsten Mathestunden. Wir wußten nicht recht, was wir von diesem Computer halten sollten. Es war aber auch verwirrend: Man brauchte nur eine falsche Taste zu drücken, schon wußte man nicht weiter, weil der Computer "Error" anzeigte...

Wir befürchteten auch, andere Mathe-Grundkurse würden ganz andere Themen behandeln wie wir. Insgesamt waren wir alle etwas verunsichert; einige von uns waren sogar frustriert, wenn Herr Janßen ihnen erklärte, dass der Fehler, der sie eine halbe Stunde beschäftigt hatte, ein vergessenes Komma war.

Doch dann, nach dieser etwas chaotischen Eingewöhnungsphase, erkannten wir, langsam aber sicher, die Vorteile des TI-92:

Nachdem wir schon (einigermaßen) erfolgreich eine Verbindung zwischen zwei Straßenstücken berechnet hatten, bekamen wir von Herrn Janßen, einem Referendar, ein Blatt ausgeteilt, auf dem Flugzeugtragflächen im Querschnitt gezeichnet waren. Gruppenweise sollten wir sie berechnen. "Wie sollen wir das denn berechnen?" fragten wir, aber Herr Janßen antwortete: "Überlegt euch was!"

Nun, wir überlegten uns etwas und bekamen Spaß an der Sache. Hatte man eine Idee, so musste man sie nicht mühevoll ausrechnen und den Graph selbst zeichnen, nein man gab sie (als Term) in den Computer ein und lies ihn den Graph zeichnen. Denn weis man einmal den Rechenweg, ist die Bedienung des TI-92 kein Problem mehr. Viele erkannten die praktischen Bezüge viel besser, als wenn sie "normalen" Mathematikunterricht gehabt hätten.

Schließlich wollte (fast) keiner aus dem Kurs mehr ohne den TI-92 arbeiten, denn es ermöglicht uns, mit realistischen Zahlen zu arbeiten und vor allem alles auszuprobieren, was "per Hand" viel zu lange dauern würde.

Dem entsprechend ist die erste Mathe-Klausur ziemlich gut ausgefallen, und viele haben ihre Mathe-Note verbessert!

Nur unsere Angst, wir könnten das "normale" Rechnen verlernen ist noch da: Wir wissen zwar, wie und warum man etwas berechnet, aber beim Rechenweg wird es dann schon schwer... Also hoffen wir, dass uns bis zum Abitur niemand den Computer wegnimmt...

Am Ende des Halbjahres ergab eine Umfrage unter den Schülern folgendes Bild:

1.Frage: Bewerte die Mathematik nach Deinen Interessen:

Geschlecht	Sehr interessiert		interessiert		mäßig interessiert		weniger interessiert		nicht interessiert		grauenvoll	
	früher	jetzt	früher	jetzt	früher	jetzt	früher	jetzt	früher	jetzt	früher	jetzt
weiblich			3	6	2	4	4	3	3	2	5	2
männlich			2	4	3	3	3	1	1	1		
zusammen			5	10	5	7	7	4	4	3	5	2

Der Eindruck, dass sich die Einstellung der Schüler dem Mathematikunterricht gegenüber verändert hat, wird auch durch das Ergebnis einer weiteren Frage bestätigt:

Wie stehst Du zu der neuen Form des Mathematikunterrichtes?

	weiblich	männlich	zusammen
Finde ich jetzt wesentlich besser	4	1	5
Ist besser geworden	4	5	9
Meine Einstellung hat sich nicht geändert	9		9
Finde ich schlechter als vorher		1	1
Ist meiner Meinung nach viel schlechter			

Interessant ist auch, dass bei einer weiteren Frage mehr Schüler als zu Beginn des Halbjahres angaben, dass sie oft Zusammenhänge zwischen Gegebenem und Gesuchtem sehen, die zur Lösung der Aufgabe helfen können.

Ihre Einstellung zum TI-92 beurteilten 6 Schüler mit sehr interessant, 16 mit ganz gut, 3 mit mir egal und eine Schülerin mit muss nicht sein.

Autor:
Dr. Norbert Esper, Netter Kirchweg 15, D-41751 Viersen, megesper@aol.com

Karl-Heinz Keunecke

Energie eines springenden Balles

Einleitung

Mit dem Ultraschall-Abstandsmesser **CBR (Calculator Based Ranger)** kann die Höhe eines springenden Balles registriert und aufgezeichnet werden. Ein besonderer Vorteil des CBR besteht darin, daß die gespeicherten Meßdaten anschließend mit der Computeralgebra des TI-92 oder des TI-89 weiter verarbeitet werden können. Die Lehrkraft hat also die Möglichkeit, nicht nur die Daten darzustellen und mit der Klasse zu analysieren, sondern auch weiterführende Auswertungen vorzunehmen.

So kann dieser Versuch, wie in [1] gezeigt wird, genutzt werden, um z.B. die Momentangeschwindigkeit herzuleiten, die Fallbeschleunigung zu bestimmen, den Dämpfungskoeffizienten zu berechnen oder die Energiebilanz des Balles zu betrachten.

Als Beispiel soll in diesem Bericht die kinetische und die potentielle Energie, sowie deren Summe berechnet und dargestellt werden.

Durchführung der Messungen

Für dieses Experiment wurde ein großer Gymnastikball mit einem Durchmesser von 34 cm gewählt. Es lassen sich damit reproduzierbare Experimente durchführen, seine Elastizität ist recht hoch und er reflektiert sehr gut das Ultraschall-Signal.

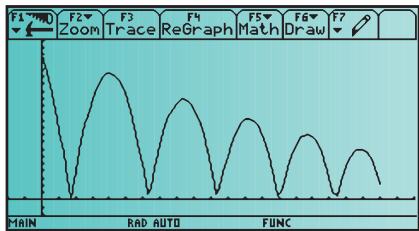


Abb. 1: s-t-Diagramm des springenden Balles.

Zur Durchführung der Messung wird das CBR in ca. 2,20 m Höhe über dem Boden angebracht. In dem Meß- und Auswerteprogramm ranger() ist im Hauptmenü bei 1:Setup/Sample für Beginn On: 10 Sec. Delay eingestellt worden. Löst man auf dem TI-92 den Start aus, so hat man noch 10 s Zeit, den Ball in einem Abstand von 50 cm unter das CBR zu halten. Akustische Signale zeigen den Beginn der Messung an. Dann wird der Ball losgelassen und seine Bewegung aufgezeichnet.

Mit einer Meßzeit von 4 s erhält man für den Abstand des Balles vom Boden die Darstellung in Abbildung 1.

Dort sind 5 Reflexionen des Balles am Boden zu erkennen. Will man die Vorgänge etwas detaillierter betrachten, so ist es angebracht, eine kürzere Meßzeit von 1,5 s zu wählen. Für nur eine Reflexion ergibt sich dann die Darstellung in Abbildung 2.

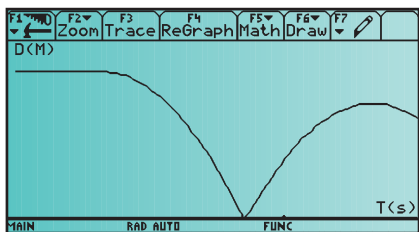


Abb. 2: s-t-Diagramm, eine Reflexion am Boden.

Man erkennt, daß die Bahnkurve aus Parabelsegmenten besteht. Aus den Ortsbestimmungen (t_i, s_i) werden durch das CBR automatisch die

Geschwindigkeiten $v_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ und die

Beschleunigungen $a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ berechnet,

die in den Abbildungen 3 und 4 zu sehen sind.

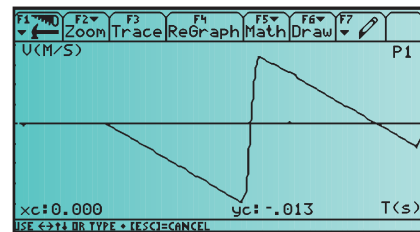


Abb. 3: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Die Geschwindigkeit v des nach unten fallenden Balles wird negativ, sowie der Ball losgelassen wird. Sie nimmt linear bis zum Boden ab. Dort ändert sich v durch die Reflexion am Boden schnell von einem negativen zu einem positiven Höchstwert. Der Ball bewegt sich dann mit abnehmender Geschwindigkeit nach oben. Wenn er den höchsten Punkt erreicht, ist $v=0 \frac{m}{s}$. Danach fällt er und seine Geschwindigkeit wird wieder negativ.

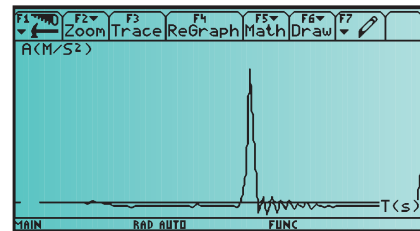


Abb. 4: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

Die Beschleunigung des Balles ist nach Abbildung 4 negativ, solange der Ball sich in der Luft befindet. Der Wert ist die Fallbeschleunigung. Bei Aufprall auf den Boden wirkt eine sehr große Beschleunigung nach oben. Der höchste Wert beträgt das 20-fache der Erdbeschleunigung.

Auswertung der Meßdaten

Wie aus Abb. 1 zu ersehen ist, nimmt die Sprunghöhe des Balles mit der Zeit ab. Es ist nun die Frage, welche Vorgänge für diese Energieabnahme verantwortlich sind.

Um hierüber Auskunft zu erhalten, soll aus den Weg- und Geschwindigkeitsmessungen die kinetische und die potentielle Energie berechnet werden.

DATA	c8	c9	c10	c11	c12
1	-.013	-1.222	12.012	1.2E-4	12.012
2	-.016	.917	12.006	1.8E-4	12.006
3	-.019	-1.224	12.004	2.6E-4	12.005
4	-.029	.307	11.997	6.0E-4	11.997
5	-.026	0.000	11.990	4.7E-4	11.991
6	-.026	0.000	11.984	4.7E-4	11.984
7	-.029	.307	11.978	6.0E-4	11.978

c10=1.4*8.15*c7

Abb. 5: Tabelle zur Berechnung der Energien

Dazu muß das Programm ranger() verlassen werden. Die Meßdaten sind im TI-92 in den Listen l1(Zeit), l2 (Weg), l3 (Geschwindigkeit) und l4 (Beschleunigung) gespeichert. In einer Tabelle (Abb. 5) werden mit den Zuweisungen c1=l1, c7=l2 und c8=l3 die Listen l1, l2 und l3 in die Spalten c1, c7 und c8 eingelesen. In Spalte c10 wird die potentielle Energie $E_{pot} = mgh$ (1) berechnet durch $c10=1,4 \cdot 8,14 \cdot c7$. Die Masse des Balles beträgt $m = 1,4 \text{ kg}$ und die Fallbeschleunigung reduziert sich wegen des Auftriebes des Balles in Luft auf $g' = 8,14 \frac{m}{s^2}$ (s. [1] S. 30-33). Die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$ (2) wird mit $c11=0,7 \cdot v^2$ berechnet.

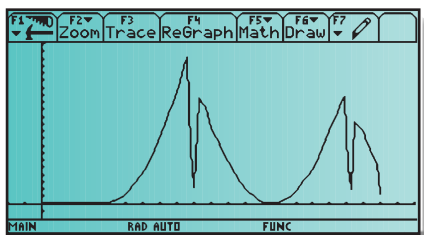


Abb. 6: Darstellung der kinetische Energie

Während die potentielle Energie wegen Gleichung (1) wie die Ballhöhe in Abb.2 verläuft, hat die kinetische Energie wegen des Quadrates der Geschwindigkeit in Gleichung (2) einen wesentlich anderen Verlauf als die Geschwindigkeit in Abb.3. Um das zu zeigen, wird sie in Abb. 6 dargestellt. Der lineare Abfall der Geschwindigkeit in Abb. 3 wird bewirkt zunächst eine quadratisch ansteigende Bewegungsenergie, die beim Aufprall am Boden in sehr kurzer Zeit verschwindet (Wegen der endlichen Abtastrate wird dieser Zeitpunkt nicht genau getroffen). Sie wird kurzzeitig in Verformungsenergie des Balles umgewandelt. Nach Entspannung des Balles entsteht wieder kinetische Energie, die während der Aufwärtsbewegung des Balles mit einer quadratischen Funktion abnimmt. Im höchsten Punkt der Bahnkurve ist sie vollständig in potentielle Energie umgewandelt worden. Im Anschluß beginnt wieder eine Fallbewegung zum Boden hin.

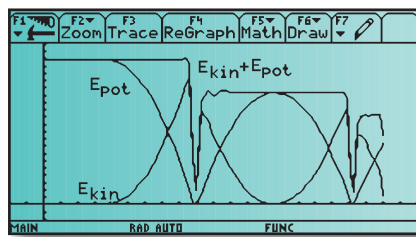


Abb. 7: Darstellung der kinetischen, der potentiellen und der Summe beider Energien

In Abb. 7 sind nun die potentielle, die kinetische und die Summe aus kinetischer und potentieller Energie dargestellt worden. Man erkennt deutlich, daß die Summe der beiden Energien konstant ist, solange sich der Ball in der Luft befindet. Damit findet in diesen Phasen kein Energieverlust statt, Luftreibung spielt bei dieser Bewegung also keine Rolle. Nach der ersten Reflexion hat die Gesamtenergie ein deutlich niedrigeres Niveau. Die Energieverluste treten somit während der Reflexion am Boden auf. Beim Aufprall auf den Boden wird der Ball nicht nur elastisch verformt, sondern es treten offensichtlich auch Wärme- und Reibungsverluste auf. Ein Teil der Bewegungsenergie wird bei der Reflexion des Balles auf den Boden auch in Schwingungsenergie umgewandelt. Dies erkennt man aus Abb. 4. Nach der Reflexion des Balles am Boden sind abklingende Schwingungen der Beschleunigung zu erkennen. Diese deuten daraufhin, daß der Ball durch den Aufprall zu Eigenschwingungen angeregt wird.

Literatur:

[1] Karl-Heinz Keunecke, Computerunterstützter Physikunterricht: Experimente zur Mechanik und ihre Auswertung mit dem CAS des TI-92, Texas Instruments, 1998

Autor:

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Gorch Fock Str. 2, D-24159 Kiel
kh@keukiel.netzservice.de

Manfred Grote, Lüchow

Freihandversuche mit High-Tech-Auswertung (Teil 1)

Untersuchung von Tönen, Klängen und Geräuschen mit dem CBL

Untersuchungsziele

- Aufnahme von Zeitdiagrammen
- Bestimmung der Frequenz von Tönen bzw. Klängen
- Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft

Grundlagen der Schallausbreitung in Luft

Während der Ton von Stimmgabeln im Allgemeinen aus einer einzigen sinus-förmigen Schwingung besteht, erzeugen Musikinstrumente Überlagerungen mehrerer sinusförmiger Schwingungen. Anders als in der Musik prägt man in der Physik dafür den Begriff Klang. Klänge verschiedener Instrumente unterscheiden sich dabei durch Frequenz und Amplitude der Oberschwingungen. Die Amplitude als maximale Auslenkung der schallerzeugenden Schwingung ist ein Maß für die Lautstärke eines Tons, ihre Frequenz f ergibt sich aus dem Kehrwert der Periodendauer T .

$$f = \frac{1}{T} \quad , \quad T: \text{Periodendauer}$$

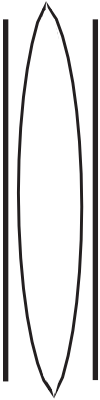
Von Geräuschen spricht man, wenn keine Periodizität in der Abfolge der Schwingungen vorliegt.

Schallausbreitung ist an Materie gebunden. Werden Gasmoleküle zu Schwingungen angeregt, führt das zu lokalen Dichteschwankungen, die sich in die Umgebung fortsetzen. Wegen der fehlenden festen Kopplung der einzelnen Moleküle untereinander kommen in Gasen nur Längswellen vor. Die Schallgeschwindigkeit ist in Luft innerhalb der Hörbereichs von der Frequenz unabhängig und nur von der absoluten Lufttemperatur T abhängig. Es gilt:

$$c = \lambda \cdot f = 331,6 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{T}{273 K}} \quad , \quad T: \text{absolute Temperatur}$$

$$\lambda: \text{Wellenlänge}$$

Bei allen Blasinstrumenten geschieht die Schallerzeugung dadurch, dass Luftsäulen zum Schwingen angeregt werden. Man unterscheidet dabei einseitig geschlossene (sogenannte gedackte) Rohre von offenen Rohren. Im Resonanzfall bildet sich im offenen Rohr jeweils an den Enden ein Druckknoten, da hier der Ausgleich mit der Außenluft stattfindet. Die Abbil-



ung zeigt die Ausbildung der Druckknoten etwas außerhalb des Rohrs, da ein Verdichtungspropf der Schwingung erst außerhalb des Rohrs "explodiert" und damit das eigentliche Ende des Resonators markiert. Eine Korrektur der eigentlichen Rohrlänge l um jeweils $\frac{2}{3}r$ an den Enden des beidseitig offenen Rohrs (r : Rohrradius) berücksichtigt diesen Effekt. Die Grundschiwingung stimmt gerade mit einer halben Wellenlänge überein und die Frequenz f_0 des tiefsten möglichen Tons ergibt sich aus dem Quotienten der Schallgeschwindigkeit c und dem Doppelten der korrigierten Resonatorrohrlänge. Für die Resonanzschwingungen f_k im offenen Rohr gilt demnach:

$$f_k = \frac{k \cdot c}{2 \cdot (l + \frac{4}{3}r)}, k \in \mathbb{N}.$$

Beim einseitig geschlossenen Rohr bilden sich im Resonanzfall am geschlossenen Ende ein Druckbauch und ein Druckknoten am offenen Ende. Dies ist nur möglich, wenn die korrigierte Länge des Resonators $l = \frac{2}{3}r$ einem ungeradzahligem Vielfachen einer Viertelwellenlänge entspricht.

$$f_k = \frac{c}{\lambda} = \frac{2k \cdot l}{4} \cdot \frac{c}{l + \frac{2}{3}r}, k \in \mathbb{N}.$$

Die Resonanzfrequenzen der Luftsäulen hängen wie die Schallgeschwindigkeit c von der Lufttemperatur ab.

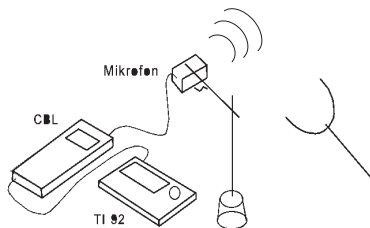


Experimentiermaterial

- Stimmgabel mit Anschlaghammer aus Gummi
- z.B. Altflöte, Keyboard, ...
- Staubsaugerrohr oder Ähnliches
- Maßband
- CBL-Mikrofon (Firma Vernier)
- CBL mit Verbindungskabel
- TI-92 mit dem Messprogramm VOLTA (Version 6/98)

Versuchsaufbau

Man hält das Mikrofon direkt vor die Schallquelle oder fixiert es in einem Stativ.

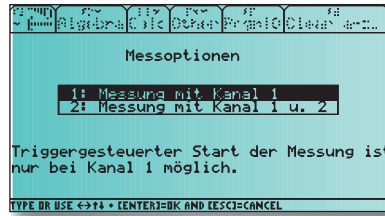
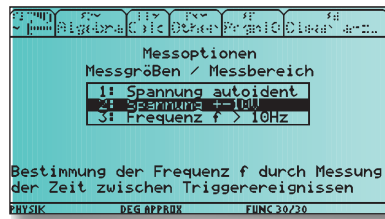


Startvorbereitungen

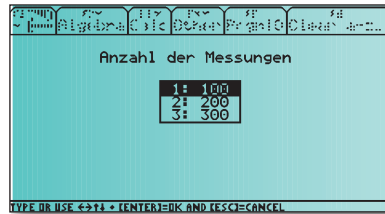
- Man verbindet das Mikrofonkabel mit Kanal 1 des CBL.
- Nachdem das CBL an den TI-92 angeschlossen ist, startet man das Programm VOLTA. Die folgende Abbildung zeigt das Hauptmenu des Programms. Rechts neben der Menüauswahl sind für den Benutzer die jeweiligen Einstellungen stets im Blick. Dazu gehört die Triggerauslösung des Messstarts. Die Angabe 0,2 V+ bedeutet, dass die Messung ausgelöst wird, wenn die Spannung den Wert 0,2 V überschreitet.



- Unter dem Menüpunkt 2: Messoptionen wählt man die Einstellung auf den Spannungsbereich $\pm 10V$, weil in diesem Spannungsbereich die Messung mit dem Vernier-Mikrofon triggeregesteuert ausgelöst werden kann.



Man legt z.B. mit Kanal 1



100 Messungen fest und

- wählt die kürzest mögliche Abtastzeit von 0,0002s.



Das abschließende Menubild zeigt im Überblick alle Messparameter.



- Bleibt nur noch den Messstart im Programm auszulösen und mit dem Experiment zu beginnen.

Autor:
Manfred Grote, Fritz-Reuter-Gymnasium, Riemannstr. 3,
D-29451 Dannenberg, Manfred.Grote@t-online.de

Wilfried Herget, Halle

Löst der Taschencomputer bald alle Probleme? Computer-Algebra-Systeme und Mathematik-Unterricht

● **Wozu soll ich das noch unterrichten?**

Es gehört nicht viel Phantasie dazu, sich vorzustellen, daß alle unsere Gymnasiasten über erschwingliche, aber leistungsfähige Taschencomputer wie den TI-92 oder den neuen TI-89 verfügen. Vereinfachen komplizierter Terme, Differenzieren, Integrieren, Kurvenzeichnen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen und vieles mehr werden damit zu Aufgaben, die grundsätzlich nicht schwerer sind als etwa „Berechne $(0,98765)^{4,321}$ “ oder „Berechne $\cos^2(-0,123)$ “.

Wozu also soll ich alle diese Fertigkeiten noch unterrichten? In jedem Fall aber die Frage: *Wie* – in welchem Umfang, auf welche Weise – soll ich das noch unterrichten?

● **Ein Blick zurück – wie war das mit dem Taschenrechner?**

1978 schrieb Bernard WINKELMANN „Numerisches Rechnen wird für den normalen Menschen nach dem Taschenrechner nie mehr das sein, was es vorher war.“ Und wir können heute formulieren „Symbolisches Rechnen wird für den normalen Menschen nach dem Taschencomputer nie mehr das sein, was es vorher war.“

Betrachten wir einmal eine Aufgabenkette wie die folgende: $5 + 7$; $8 \cdot 6$; $23 + 48$; $17 \cdot 15$; $668 : 23$; $27,48 \cdot 133,72$; $2876,52 : 346,9$.

Welche dieser Aufgaben soll heute ein Schulabgänger im Kopf lösen können, und bei welchen wird eine schriftliche Lösung erwartet? Bei welchen dieser Aufgaben wird man den Griff zum Taschenrechner als selbstverständlich akzeptieren? Dieser Maßstab hat sich im Laufe der Zeit verändert, und er wird sich in der Zukunft weiter in derselben Richtung verändern.

● **Wieviel Termumformung braucht der Mensch?**

Die großformatige Anzeige eines Taschenrechnerherstellers beginnt damit: „Gute Schulrechner machen aus Schülern gute Rechner“. Diese Werbebotschaft suggeriert „Ich brauche nur das richtige Gerät, und schon ist alles einfacher“. Das stimmt natürlich nicht. Auch der moderne Taschencomputer wie etwa der TI-92 macht aus uns keine Sonja Kowalewskaja, keinen Carl Friedrich Gauß.

Ohne Zweifel bedeuten die neuen Möglichkeiten durch die Computer-Algebra-Systeme (CAS) einen Gewinn, erleichtern zahlreiche Rechnungen, machen manche Berechnung überhaupt erst „menschlich möglich“; aber wieviel muß man (und frau) wissen und beherrschen, um diese Systeme erfolgreich handhaben zu können?

● **Terme umformen – eine komplexes Problem**

Einer der zentralen Gegenstände des Mathematikunterrichts in diesem Zusammenhang ist das Umformen von Termen.

Gerade in dem Bereich Termumformung kommt es darauf an zu wissen, wo man hin will: Aus einer Summe ein Pro-

dukt zu machen, verlangt andere Tätigkeiten als aus einem Produkt eine Summe zu machen oder als einen Hauptnenner zu bilden. Jedes Mal gilt es, die vorliegende Situation zu beurteilen, das Ziel im Auge zu haben und dann diese Entscheidung zu treffen – erst dann kann das ausgewählte Rezept abgearbeitet werden. Das Umformen von Termen ist eben keine typisch „deterministische“ Aufgabenstellung!

Gerade deswegen sind – auch in Zukunft – solide Grundvorstellungen über den Aufbau von Termen und gewisse Grundfertigkeiten im Umgang mit ihnen unverzichtbar. Nur dann kann ich den Taschencomputer und das Computer-Algebra-System geschickt nutzen. Aus diesem Grunde wird der Bereich Termumformung in der Schule durch den CAS-fähigen Taschenrechner nicht einfach überflüssig.

● **Der notwendige Überblick**

Betrachten wir einmal einen recht einfachen Term wie etwa

$$\frac{x^2 + x}{x + 6}$$

Jetzt stellen Sie sich vor, Sie müßten diesen Term etwa in einen Taschencomputer wie den TI-92 eintippen. Das Schöne an dem pretty print der neuen Taschencomputer ist, daß in der Anzeige abzulesen ist, wie er das „verstanden“ hat. Aber dazu muß auch ich als Nutzer in der Lage sein, seine Anzeige „lesen“ zu können, um zu entscheiden, ob dies tatsächlich dem entspricht, was ich gemeint hatte.

Wenn man jetzt diesen Term gleich Null setzt

$$\frac{x^2 + x}{x + 6} = 0$$

dann kann man natürlich mit dem Taschencomputer diese Gleichung „per Knopfdruck“ lösen. Und siehe da: Für eine der Nullstellen ergibt sich $x = 0$. Sie, wir sehen das „mit einem Blick“. Wenn wir glauben, daß dieses „Sehen können“ auch zukünftig von unverzichtbarem Wert ist, dann werden wir dies auch weiterhin üben müssen.

● **Grundideen und Fundamente**

Einfach die Tatsache, daß der CAS-fähige Taschencomputer da ist, wird dazu führen, daß in den grundlegenden Übungsphasen die Komplexität von Termumformungen und Gleichungsaufgaben reduziert werden. Man wird sich nur auf die einfacheren Übungen beschränken, wird nur die Grundidee vermitteln. Wichtig ist das gesunde Fundament, und dieses gesunde Fundament war schon immer erforderlich. Erfordert dies nicht eine entsprechende Verschiebung der Schwerpunkte im Unterricht, weniger Einüben von Rechentechniken, sondern stärkeres Betonen eher schöpferischer, beschreibender, begründender und beurteilender Fähigkeiten?

Dieses Problem ist älter als alle Computer-Algebra-Systeme. Doch diese machen es unübersehbar, unausweichlich.

● **Mathematik-Aufgaben – einmal anders?!**

In einem System, wo bei allen Beteiligten sich alles immer wieder um Noten und Bewertung dreht, kommt gerade den Aufgaben eine entscheidende Bedeutung zu. In der regelmäßigen Rubrik „Die etwas andere Aufgabe“ (HERGET 1995 ff.) in der Zeitschrift „mathematik lehren“ wird daher ein pragmatischer, an der Schulrealität orientierter Ansatz weiter verfolgt:

Wie können „andere“ Aufgaben für Klassenarbeiten aussehen, die die genannten, angestrebten bzw. anzustrebenden höheren Fähigkeiten ansprechen?

● **Divergente Aufgaben statt konvergenter Aufgaben**

- (1) Löse die quadratische Gleichung $x^2 + x - 12 = 0$.
- (2) Suche (z. B. 10) möglichst verschiedenartig aussehende quadratische Gleichungen, die alle die Lösungsmenge $\{-4, 3\}$ haben.

Konvergente Aufgaben (WINTER) wie (1) haben nur *eine* eindeutige Lösungsmenge, und es soll in der Regel nur *ein* bekanntes Lösungsverfahren angewendet werden. Ziel der Aufgabe ist es, dieses Lösungsverfahren einzuüben bzw. dieses abzutesten. Solche Aufgaben beherrschen eindeutig unsere Schulbücher und die Klassenarbeiten – für die Lehrer sind sie leicht zu korrigieren, und für die Schüler sind sie (wenigstens leidlich) trainierbar.

Für divergente Aufgaben wie (2) sind mehrere, durchaus unterschiedliche Lösungen und Lösungswege denkbar. Offen bleibt aber, wie „möglichst verschiedenartig aussehende“ Gleichungen zu finden sind. Dazu gilt es, algebraisches Wissen zu aktivieren und dieses dann schöpferisch einzusetzen – genau das ist das erklärte Ziel dieser Aufgabe.

● **Eine Gleichung wird eingekleidet**

Bei den üblichen Textaufgaben geht es darum, zunächst den Text aus der Umgangssprache in die Formel-Sprache der Mathematik, also etwa in eine Gleichung zu übersetzen. Eine umgekehrte Problemstellung, nämlich eine vorgegebene Gleichung einzukleiden, ist eher selten und mag zunächst vielleicht wenig „mathematisch“ erscheinen.

Hinter der Gleichung $x + 4 = 18$ könnte sich die folgende Aufgabe verbergen:
 „Klara muß noch 4 Jahre warten, bis sie volljährig ist. Wie alt ist sie?“
 Versuche, zwei weitere (möglichst lustige) Textverkleidungen für die Gleichung $x + 4 = 18$ zu finden.

Unsere Erfahrungen (Herget/Wagenführ) im Unterricht zeigen, daß sich damit das grundlegende Verständnis für den wichtigen Übersetzungsprozeß zwischen den beiden „Sprachen“ erkennbar verbessern läßt – nicht zuletzt auch deshalb, weil für „mathe-schwache“ Schülerinnen und Schüler solche Fragestellungen einfacher sind und sich daher auch eher Erfolgserlebnisse einstellen.

● **„Öffnen“ von konvergenten Aufgaben**

Auch die Formulierung einer Aufgabe beeinflusst den An-

forderungscharakter ganz erheblich. Als Beispiel hierfür eine Aufgabe für Klasse 10 oder für einen Kurs in der Sekundarstufe II:

Wie groß ist der Winkel, den eine Raumdiagonale eines Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?

Diese Aufgabe ist ganz bewußt so knapp und ohne erläuternde Zeichnung formuliert. Dies ist zunächst einmal ungewohnt, und es ist zweifellos anspruchsvoll, aufwendig und anstrengend – aber es verlangt und fördert gerade diejenigen Fähigkeiten, die nicht ohne weiteres dem Computer übertragen werden können!

● **Der mathematische Aufsatz**

Aufgaben, in denen umgangssprachlich argumentiert, begründet und beschrieben werden muß, sind ausgesprochen selten. Tatsächlich besteht Mathematik sehr wohl auch aus sprachlicher Kommunikation, selbst und gerade in der Wissenschaft. Warum also nicht als eine Aufgabe in der entsprechenden Klassenarbeit stellen:

Wie löst man eine quadratische Gleichung?
 Beschreibe ausführlich an einem von dir geeignet gewählten Beispiel, wie du bei der Methode der quadratischen Ergänzung vorgehst.

● **„Wo steckt der Fehler?“**

Falsche Argumentationen zu entlarven, Fehler aufzudecken und Sachverhalte richtigzustellen, Standpunkte mit Mathematik zu begründen – all das bedeutet auch, sich mit Mitteln der Sprache kritisch auseinanderzusetzen. Die folgende Aufgabe geht auf eine Idee von H.-C. REICHEL zurück:

Klaus rechnet:

$$-4 = \sqrt[3]{-64}$$

$$= (-64)^{1/3} = (-64)^{2/6}$$

$$= \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{64^2}$$

$$= \sqrt[3]{64} = 4.$$
 Klara: „Aber $-4 = 4$, das kann doch nicht sein!“
 Klaus: „Klar(a), ...“
Was meinst du dazu?

● **Qualitative Aufgaben statt quantitativer Aufgaben**

Eine weitere Möglichkeit, das „Rechnen nach Rezept“ zugunsten inhaltlicher, qualitativer Argumentationen zurückzudrängen, bietet sich, wenn Funktionen nicht durch Formeln oder Terme vorgegeben, sondern nur qualitativ eine Skizze des Graphen beschrieben werden.

Die Zeichnung zeigt den Graphen von $x \mapsto f(x)$.

Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen von $x \mapsto f'(x)$.

Um das Verständnis des Begriffs „Ableitung“ bzw. das Grundwissen um das Verhalten bestimmter Funktionstypen anzusprechen, sind solche qualitativen Aufgaben sicher besser geeignet als Aufgaben der Art „Differenzieren Sie...“ oder „Zeichnen Sie den Funktionsgraph zu $f(x) = \dots$ “!

● „Konvergent“ = leicht, „divergent“ = schwer?

Die genannten Beispiele zeigen, daß eine divergente Aufgabe nicht notwendig schwerer sein muß. In jedem Falle werden aber unterschiedliche Schwerpunkte bezüglich der angesprochenen Fertigkeiten und Fähigkeiten gesetzt.

„Konvergente Aufgaben prüfen Routinetechniken, divergente Aufgaben stellen höhere Anforderungen“ – selbst diese Beschreibung wäre zu schlicht. Natürlich kann man die Schülerinnen und Schüler auch auf divergente Aufgaben vorbereiten, sie gezielt „trainieren“. Welche Ansprüche eine Aufgabe stellt, hängt schließlich auch von dem vorangegangenen Unterricht und den Übungen ab.

● Kleine Schritte...

Bei der genaueren Betrachtung dieser Beispiele wird wieder einmal deutlich, wie sehr der Anforderungscharakter einer Aufgabe von dem vorangegangenen Unterricht abhängt. Natürlich ist es unverzichtbar, die Schülerinnen und Schüler auf solche veränderten Aufgabenstellungen angemessen vorzubereiten, und selbstverständlich können die bewährten Kurvendiskussionen nicht einfach per Erlaß ersetzt werden. Aber unstrittig ist, daß es im Mathematikunterricht noch mehr als bisher darum gehen muß, die Bedeutung, Tragweite, Anwendbarkeit usw. der mathematischen Begriffe und Methoden zu vermitteln.

● Bildungsziele – damals, heute, demnächst

Insbesondere auf den einschlägigen Fachtagungen (HISCHER 1992 ff.) wurde immer wieder von dramatischen Veränderungen gesprochen. Nun, sicher gibt es viel zu tun, auch für die Lehrerfort- und -weiterbildung; aber ich glaube nicht, daß die Änderungen so dramatisch sein werden.

Seit vielen Jahren werden die folgenden allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts weitgehend übereinstimmend genannt (siehe etwa HERGET 1994):

- Probleme lösen lernen,
- Heuristische Strategien kennenlernen,
- Beweisen lernen,
- Begriffe bilden lernen,
- Mathematisieren lernen,
- Algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten kennenlernen.

Ich kann nicht erkennen, daß sich hieran, an den allgemeinen Zielen *im Großen*, etwas wesentlich ändern wird und ändern muß. Die Frage ist eher die: Was hat das für Konsequenzen für unseren Unterricht *im Kleinen*?

Es kann im Mathematikunterricht jedenfalls nicht mehr darum gehen, sich vorwiegend auf Kalkülfertigkeiten zu konzentrieren; es gilt vielmehr, Aspekte zu betonen und im Unterricht zum Thema zu machen wie z. B. den *Prozeß* des Modellbildens, den *Prozeß* des Problemlösens, den *Vergleich* von Algorithmen, den *Prozeß* der Begriffsbildung. Es ist und bleibt eine wichtige Aufgabe, dies an der Schule zu realisieren – mit und ohne moderne, leistungsfähige Taschencomputer.

Literatur

- [1] Herget, Wilfried:
Ziele und Inhalte des Informatikunterrichts – zum Vergleich.
In: Hischer 1994, S. 28-40.
- [2] Herget, Wilfried:
Mathe-Aufgaben – einmal anders?!
In: mathematik lehren (1995) 68, S. 64-66.
- [3] Herget, Wilfried; Wagenführ, Karin:
Gleichungen und Ungleichungen. 7. und 8. Schuljahr.
Schroedel Praktikum. Schroedel, Hannover 1991.
Neubearbeitet unter dem Titel: OKiDOKi – Die Lernhilfe.
Gleichungen. Schroedel, Hannover 1996.
- [4] Hischer, Horst (Hrsg.):
Mathematikunterricht im Umbruch?
Erörterungen zur möglichen "Trivialisierung" von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software.
Franzbecker, Hildesheim 1992.
- [5] Hischer, Horst (Hrsg.):
Wieviel Termumformung braucht der Mensch?
Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden.
Franzbecker, Hildesheim 1993.
- [6] Hischer, Horst (Hrsg.):
Mathematikunterricht und Computer – neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen?
Franzbecker, Hildesheim 1994.
- [7] Hischer, Horst / Weiß, Michael (Hrsg.):
Rechenfertigkeit und Begriffsbildung – Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen.
Franzbecker, Hildesheim 1996.
- [8] Reichel, Hans-Christian:
Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht.
In: Postel, H. / Kirsch, A. / Blum, W. (Hrsg.):
Mathematik lehren und lernen.
Schroedel, Hannover, S. 156-169.
- [9] Winkelmann, Bernard:
Taschenrechner und Fachdidaktik:
Einige strategische Perspektiven.
In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) 10 (1978) 3, S. 153-159.
- [10] Winter, Heinrich:
Divergentes Denken und quadratische Gleichungen.
In: mathematik lehren (1988) 28, S. 54-55.

Autor:
Prof. Dr. Wilfried Herget
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
FB Mathematik & Informatik
Didaktik der Mathematik
D-06099 Halle
herget@mathematik.uni-halle.de

Taschenrechner zum Ausleihen

„Graphikrechner bieten im mathematischen Unterricht angeblich große Vorteile. Ich bin ein wenig skeptisch und möchte mich vor einer Anschaffung erst davon überzeugen.“

Wir helfen Ihnen mit unserem Leihprogramm! Kostenlos und unverbindlich stellen wir Ihnen für einen Workshop, ein Projekt oder einen eigenen kleinen Schulversuch unsere Taschenrechner inklusive Zubehör für ca. 2 Wochen zur Verfügung. In Ihrer Klasse können Sie sich von der sinnvollen Verwendbarkeit und den didaktisch-methodischen Vorzügen dieser modernen Werkzeuge überzeugen.

„Welche Modelle kann ich ausleihen?“

Graphikrechner: TI-82, TI-83, TI-85, TI-86
 Symbolische Rechner: TI-92, TI-92 II, TI-92 PLUS, TI-89
 Meßwerterfassungssystem: CBL, CBR
 Verbindung zum PC: TI-Graph Link
 Zur Overheadprojektion: ViewScreen passend z. Rechner

„An wen muß ich mich wenden?“

Bitte beschreiben Sie uns kurz ihre Vorhaben. Nennen Sie die benötigte Anzahl des gewünschten Modells, den Wunschtermin und den Ort Ihres Projektes. Rechtzeitig vor Beginn Ihrer Veranstaltung erhalten Sie von uns eine Bestätigung.

„Komme ich mit den Rechnern auch klar?“

Allen Rechnern ist ein Paket inklusive Handbuch, Lehrerhandreichung und weiterem Unterstützungsmaterial beigelegt. Außerdem steht unser Customer Support Center für Auskünfte jederzeit zur Verfügung.

„Wie schicke ich die Rechner wieder zurück? Ist das nicht furchtbar teuer?“

Alle Transportkosten übernimmt Texas Instruments. Sie rufen lediglich die im Paket angegebene Telefonnummer an und sind alle Sorgen los. Als Feedback erbitten wir von Ihnen nach Abschluß Ihres Projektes einen Erfahrungsbericht, lieber noch einen Artikel für die *TI-Nachrichten*.

„Wer haftet bei Beschädigung oder Verlust?“

Glücklicherweise tritt dieser Fall nur sehr selten ein. Sie haften nur bei mutwilliger Beschädigung oder Verlust. Üblicher Verschleiß geht zu Lasten von TI. Daher raten wir: Geben Sie die Rechner nur gegen Unterschrift an Schüler oder Kollegen weiter.

Falls Sie interessiert sind, schreiben Sie uns:

Texas Instruments – E&P – , Leihprogramm, Haggertystr. 1, D-85356 Freising, Fax: 08161-804907, ti-schule-de@ti.com, <http://www.ti.com/calc/deutschland/leihprogramm.htm>

Softwaresammlung auf CD

Im September 1998 erscheint die dritte Auflage der Programm-Sammlung von Böttcher Datentechnik. Diese Ausgabe umfaßt über 800 Programme für die Graphikrechner von TI, inklusive der original TI-Graph Link Software für den TI-92 PLUS und dem neu erscheinenden TI-89.

Bitte wenden Sie sich an:

Böttcher Datentechnik
 Hudekamp 18a
 D-23558 Lübeck
 Tel: 0451-899153
 BoeDatec@aol.com

TI-92 Software Wettbewerb

Sicherlich kennen Sie die CD von Böttcher Datentechnik. Diese Programmsammlung von derzeit mehr als 700 Sharewareprogrammen zu den Graphikrechnern von TI wird laufend ergänzt.

Damit für die 4. Auflage noch mehr sinnvolle und nützliche Programme für jedermann zusammenkommen, die dem Lehrer im Unterricht und dem Studenten helfen, hat Böttcher Datentechnik einen Softwarewettbewerb ausgeschrieben und mit lohnenswerten Preisen ausgestattet.

Gesucht werden selbstgeschriebene Programme aus den Bereichen

- Maschinenbau und Elektrotechnik
- Bau- und Vermessungswesen
- Chemie und Wirtschaft
- Physik
- Mathematik

Die Software wird von Fachleuten des jeweiligen Themengebietes geprüft und beurteilt. Die besten Programme werden prämiert:

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1. Preis: 1000,- DM | 5. Preis: 600,- DM |
| 2. Preis: 900,- DM | 6.-10. Preis: je 200,- DM |
| 3. Preis: 800,- DM | 11.-25. Preis: je 100,- DM |
| 4. Preis: 700,- DM | 26.-50. Preis: je 50,- DM |

Bitte senden Sie Ihr Programm bis zum 15.02.1999 an: Böttcher Datentechnik, Hudekamp 18a, 23558 Lübeck, BoeDatec@aol.com

Mit der Einsendung der Software gestatten Sie unwiderruflich die Veröffentlichung der Programme auf einer Shareware CD-ROM. Das Copyright verbleibt beim jeweiligen Autor. Die Software kann nur dann am Wettbewerb teilnehmen, wenn die vollständige Anschrift des Autors, sowie eine kurze deutschsprachige Beschreibung des Programms mitgeliefert wird. Die Gewinner werden persönlich benachrichtigt.

Ideenbörse – Autoren gesucht

Die *TI-Nachrichten* sind ein Forum für alle interessierten und engagierten Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften. Wenn Sie überzeugt sind, daß graphische Taschenrechner einen hohen Wert für Ihren eigenen Unterricht haben, dann brauchen wir Sie. Ihre Ideen und Ihre Erfahrung erleichtert es Ihren Kollegen, graphische Taschenrechner sinnvoll und gewinnbringend im Unterricht einzusetzen.

Nicht zuletzt durch das Projekt Schulen ans Netz haben immer mehr Lehrer die Möglichkeit das Internet als Quelle unterrichtsrelevanter Informationen zu nutzen. Auch besitzt dieses elektronische Medium einige Vorteile, wie das Herunterladen eines Programms statt nervtötendem Abtippen eines Listings. Daher möchten wir ergänzend zusätzliche Materialien, Artikel und Programme im Internet für Sie bereitstellen. Auch hier sind wir auf Ihre Unterstützung angewiesen.

Wenn Sie mithelfen wollen, den sinnvollen Einsatz von Graphikrechnern im Unterricht zu fördern, dann senden Sie ihre Beiträge auf Diskette oder per e-mail möglichst als Word-Dokument (Text) und Bilder im Dateiformat *.tif an: Texas Instruments – E&P – , Haggertystr. 1, D-85356 Freising, ti-schule-de@ti.com

Konferenzen und Ausstellungen

Auch in diesem Jahr nimmt Texas Instruments wieder an zahlreichen Konferenzen und Ausstellungen teil. Wenn Sie uns persönlich kennenlernen wollen, so besuchen Sie uns.

Zeit	Veranstaltung	Ort
8.9.	Schule und Computer	Bad Segeberg
15.9.	MNU Nordrhein	Köln
16.9.	MNU Hessen	Gießen
22.9.	MNU Westfalen	Dortmund
25.9.	MNU Baden-Württemberg	Heidelberg
26.9.	MNU Thüringen	Erfurt
30.9.	MNU Niedersachsen I	Hannover
28.9.-2.10.	Internationales Symposium Didaktik der Mathematik	Klagenfurt
6.-7.10.	MNU Schleswig-Holstein	Kiel
14.10.	MNU Saarland	Saarbrücken
20.10.	MNU Südbayern	München
24.10.	MNU Brandenburg	Neuruppin
29.10.	MNU Rheinland-Pfalz	Speyer
5.11.	MNU Niedersachsen II	Meppen
7.11.	MNU Sachsen-Anhalt	Halle
13.-14.11.	Neue Technologien im Mathematikunterricht	Linz
14.11.	MNU Mecklenburg-Vorpommern	Rostock
14.11.	MNU Sachsen	Dresden
16.-17.11.	MNU Bremerhaven	Bremerhaven
17.11.	MNU Franken	Fürth
1.-5.3.99	Interschul / Didacta	Stuttgart
28.3.-1.4.99	MNU Hauptversammlung	Saarbrücken
25.-28.5.99	T ³ Pflingsttagung „Computeralgebra im Mathematikunterricht“	Münster

Zusatzdateien Cabri Géomètre II

Math-College, hat eine Sammlung von Zusatzdateien für die Sekundarstufe I zum dynamischen Geometriesystem Cabri Géomètre II für Windows herausgebracht. Auf der Diskette finden Sie 14 Dateien zu den Themengebieten

- Grundkonstruktionen
- Transformationen am Sinusgraphen
- Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion am Einheitskreis
- Die Graphen der Exponential- und Logarithmusfunktion
- Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion

Bitte wenden Sie sich an:
 Math-College
 Goseriende 10/12
 D-30159 Hannover,
 Tel: 0511-1318430
 math-college@t-online.de

Referent für Workshop gesucht? - TI hilft!

Suchen Sie einen erfahrenen Lehrer, der graphische Taschenrechner bereits erfolgreich in seinem Unterricht einsetzt? Möchten Sie an einem Workshop teilnehmen, wo Sie sich gemeinsam mit Ihren Kollegen über den sinnvollen Einsatz dieser modernen Unterrichtswerkzeuge austauschen?

Gerne helfen wir Ihnen, den für Sie bestmöglichen Referenten zu finden.

Bitte teilen Sie uns mit, zu welchem Taschenrechner Sie gerne an einem Workshop teilnehmen möchten und wann und wo die Veranstaltung nach Möglichkeit stattfinden soll. Wir bemühen uns dann, Ihnen einen Referenten in Ihrer Nähe zu vermitteln. Soweit nötig stellen wir für alle Teilnehmer leihweise auch die benötigten Graphikrechner kostenlos zur Verfügung.

Wenn Sie an einem solchen Workshop teilnehmen wollen, schreiben Sie an:

Texas Instruments – E&P –, Haggertystr. 1, D-85356 Freising,
 ti-schule-de@ti.com

T³ - Teachers Teaching with Technology Germanic

Teachers Teaching with Technology ist ein europäisches Projekt zur Lehreraus- und -weiterbildung. Neue Medien verändern den Unterricht, besonders in der Mathematik und in den angrenzenden Fächern. Lehrerinnen und Lehrer müssen heute für den Einsatz neuer Medien gezielt aus- und weitergebildet werden, damit auf längere Sicht neue Technologien im Unterricht sinnvoll genutzt werden können.

Unter neuen Technologien verstehen wir in erster Linie:

- Computeralgebra-Systeme wie z.B. Derive
- Geometrieprogramme wie z.B. Cabri Géomètre
- Taschenrechner (z.B. TI-92), die beide Arten von Programmen - Computeralgebra und Geometriesoftware integrierend implementiert haben.

Zu diesen Technologien bieten wir Seminarveranstaltungen in Deutschland, Österreich und der deutschsprachigen Schweiz an. Bei den Fortbildungen wird auch auf die Möglichkeit der elektronischen Datenkommunikation (Internet) verwiesen, da dies ein schnell verfügbares und universelles Forum zur Bereitstellung von Materialien und zum Austausch mit Lehrenden darstellt.

T³ richtet sich an:

- Lehrerinnen und Lehrer
- Studentinnen und Studenten
- Referendarinnen und Referendare
- Fachleiterinnen und Fachleiter
- Moderatorinnen und Moderatoren

in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächergruppe.

Ziel ist es:

- Kolleginnen und Kollegen die Möglichkeiten und Chancen des Unterrichtens mit neuen Technologien zu vermitteln,
- denen, die neue Technologien im Unterricht anwenden, den Austausch mit Kolleginnen und Kollegen anzubieten, um so sinnvolle didaktische Konzepte entwickeln und erweitern zu können.

Das Programm von T³ läuft seit dem Sommer 1997. Seither wurden im gesamten deutschsprachigen Raum Europas über 120 Fortbildungen mit ca. 2400 Lehrerinnen und Lehrern durchgeführt. Für die Durchführung dieses Programms stehen über 130 erfahrene Referentinnen und Referenten zur Verfügung, die erprobte und didaktisch ausgereifte Ansätze zum Einsatz moderner Technologien im Unterricht entwickelt haben. Die Einzelveranstaltungen - i.d.R. zweitägige Fortbildungen - finden in Kooperation mit den Fortbildungsinstitutionen der Länder (Landesinstitute, Bezirksregierungen, Pädagogische Akademien, ...) oder als schulinterne Fortbildungen (Schilf) statt.

Neben den laufenden Aktivitäten findet jährlich in der Woche nach Pfingsten eine T³ - Jahrestagung in Münster/Westfalen statt. Informationen zu dieser Veranstaltung sowie das vollständige Programm von T³ - Deutschland finden sich im Internet unter



T³ EUROPE

<http://www.uni-muenster.de/Lehrerausbildung/TTT.HTM>

Das Projekt wird in Zukunft in zwei Richtungen ausgeweitet. Zum einen ist die Integration von Slowenien unter den Schirm von T³ - Germanic geplant. Hier kann sich der Aufbau eines entsprechenden Fortbildungsprogramms auf die Erfahrungen der Projektpartner stützen. Zum anderen werden Schulen, die sich für moderne Technologien interessieren, regional zusammengefaßt und z.B. mit Klassensätzen TI-92 leihweise ausgerüstet, wobei die Fachkolleginnen und -kollegen gleichzeitig eine intensive Schulung durchlaufen können.

Die Koordination des gesamten T³ - Germanic Projektes obliegt der Zentralen Koordination Lehrerausbildung (ZKL) an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Ansprechpartner für das Projekt T³ - Germanic und für die Organisation der Veranstaltungen in Deutschland sind Bärbel Barzel und Dr. Detlef Berntzen, Kontaktperson für Österreich ist Klaus Aspetsberger an der Pädagogischen Akademie des Bundes in Oberösterreich. In der Schweiz obliegt die Koordination der Schweizerischen Fachstelle für Informationstechnologien im Bildungswesen (SFIB) in Person von René Hugelshofer.

Adressen:

Bärbel Barzel/Dr. Detlef Berntzen
ZKL Zentrale Koordination Lehrerausbildung
Prinzpalmarkt 38
D-48143 Münster
Tel.: 0251/510380
Fax: 0251/5103824
e-mail: barzel@uni-muenster.de berntz@uni-muenster.de

Klaus Aspetsberger
Pädagogische Akademie des Bundes in Oberösterreich
Kaplanhofstr. 40
A-4020 Linz
Tel.: 07327704010
Fax: 0732771170
e-mail: aspetsbergerk@Pa-linz.ac.at

René Hugelshofer
SFIB Schweizerische Fachstelle für Informationstechnologien im Bildungswesen
Erlachstr. 21
CH-3000 Bern 9
Tel.: 0313012091
Fax: 0313010104
e-mail: rene.hugelshofer@ksh.edu

Lehrerunterstützungsprogramm 20 plus 1 bzw. 30 plus 1

Ihren Wünschen entsprechend haben wir das Lehrerunterstützungsprogramm einfacher gestaltet. Somit wird es noch leichter einen Rechner kostenfrei zu erhalten.

Was kann ich bekommen?

20 plus 1: Für je 20 gekaufte Graphikrechner TI-82, TI-83, TI-85, TI-86, TI-89 oder TI-92 erhalten Sie zusätzlich einen entsprechenden Graphikrechner.

30 plus 1: Für je 30 gekaufte Schulrechner Solar Little Professor, TI-106, TI-30s, TI-30Xa, TI-30Xa Solar, TI-36Xs oder TI-40s erhalten Sie zusätzlich einen entsprechenden Schulrechner.

Wie nehme ich am Programm teil?

Senden Sie bitte die Rechnungskopie aus 1998 zusammen mit den Strichcodeabschnitten der Verpackung an: Texas Instruments – E&P –, Lehrerunterstützungsprogramm, Haggertystr. 1, D-85356 Freising

Wir werden Ihnen Ihre Freigeräte schnellstmöglich zusenden. Aus abwicklungstechnischen Gründen rechnen Sie bitte mit mindestens 3 Wochen.

Haben Sie noch Fragen?

Dafür sind wir da:
Tel: 06196-975015
Fax: 08161-804907
e-mail: ti-cares@ti.com
<http://www.ti.com/calc/deutschland/unterstuetzung.htm>

Gültig ab 1.1.1998.
Dieses Angebot ist nur in Deutschland gültig.
Texas Instruments behält sich das Recht vor das Lehrerunterstützungsprogramm zu jeder Zeit und ohne Ankündigung zu ändern.

Folien, Poster, Handreichungen und Kopiervorlagen

Um Ihnen den Einsatz unserer Taschenrechner im Unterricht zu erleichtern, senden wir Ihnen gerne die folgenden Materialien. Bitte wenden Sie sich an unser Customer Support Center (06196/975015, ti-cares@ti.com).

Folien zur Overheadprojektion und Poster mit den Abbildungen der Taschenrechner erleichtern das Erklären der richtigen Benutzung eines Taschenrechners. Sie erhalten diese für

- TI-82
- TI-83
- TI-85
- TI-86
- TI-89 (vorraussichtlich ab November)
- TI-92

Erfahrene Lehrer haben speziell für TI **Handreichungen, z. T. mit Kopiervorlagen und Folien**, entwickelt, die Ihren Schülern helfen, den sinnvollen Umgang mit dem Taschenrechner spielerisch zu erlernen. Es liegen vor

Solar Little Professor (U. Kopp)

Materialien zum langjährig bewährten Rechentrainer mit methodisch didaktischen Überlegungen und 8 Spielebögen.

TI-30Xa / TI-30Xa Solar (H. Schmidt)

Folien und Kopiervorlagen mit zahlreichen Aufgaben und Lösungen aus Sek. I

TI-40 Solar (H. Schmidt)

Kopiervorlagen mit zahlreichen Aufgaben und Lösungen aus Sek. I

Prof. Dr. A. Bakus (H. Schmidt)

Kopiervorlagen für den Einsatz des Taschenrechners TI-30Xa/TI-30Xa Solar

Der Taschenrechner als Hilfsmittel (B. Metzger)

Verlag: Cornelsen Scriptor
Kopiervorlagen und Materialien für das 7. und 8. Schuljahr

Zulassung von Graphikrechnern in Deutschland

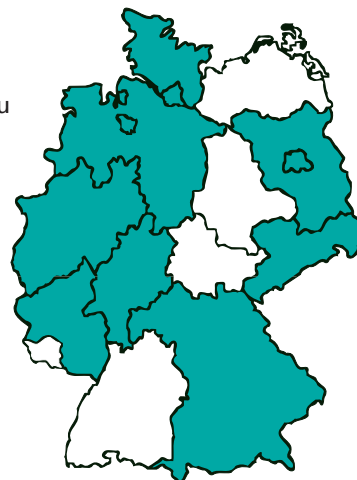
Die Mehrzahl der Bundesländer läßt den Einsatz von Graphikrechnern im Unterricht zu oder schreibt diesen sogar verbindlich vor.

Eine **allgemeine Zulassung** besteht in **Brandenburg, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz und Schleswig-Holstein**. Soweit der Gleichheitsgrundsatz beachtet ist, ist eine eventuell notwendige Genehmigung durch die entsprechende Stelle im Regelfall reine Formsache.

In **Bayern** sind Graphikrechner seit diesem Schuljahr an Realschulen ab Klasse 8 zugelassen.

In **Sachsen** ist an den Gymnasien die Verwendung von **Graphikrechnern verbindlich** vorgeschrieben.

Die Details der Zulassung von Graphikrechnern entnehmen Sie bitte den einschlägigen Vorschriften.



Literatur zu den Graphikrechnern

GRAFIKRECHNER ALLGEMEIN

Titel	Autoren	Verlag	Quelle	Inhalt
D Grafikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht Didaktisch-methodische Empfehlungen	Weber, K. Zillmer, W.	Paetec Verlag	MC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Graphikrechner in SII ◆ Kurvendiskussion ◆ Analytische Geometrie und lineare Algebra ◆ Stochastik ◆ Klausurbeispiele ◆ 72 Seiten
D Grafikfähige Taschenrechner SI – Schülerheft	hrsg. LISA, Halle	Paetec Verlag	MC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ entwickelt im Schulversuch Sachsen-Anhalt ◆ zahlreiche Aufgaben mit Lösungshinweisen
D Grafikfähige Taschenrechner SI – Lehrerheft	hrsg. LISA, Halle	Paetec Verlag	MC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ entwickelt im Schulversuch Sachsen-Anhalt ◆ methodische Empfehlungen ◆ Arbeitsblätter und Kontrollaufgaben ◆ vollständige Lösung aller Aufgaben
D Grafikfähige Taschenrechner SII – Unterrichtsmaterialien	hrsg. LISA, Halle	Paetec Verlag	MC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ entwickelt im Schulversuch Sachsen-Anhalt ◆ Aufgaben ◆ didaktisch-methodische Empfehlungen
E More than Graphs Activities for TI Graphics Calculators	Specht, J.	Key Curriculum Press	Buchhandel	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 40 Beispiele ◆ Diskette liegt bei

TI-82

D Der Taschenrechner TI-82 für den Mathematikunterricht	Gouy, M. Landurau, A.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Einführung in das Arbeiten mit dem TI-82
D TI-82 – Übungen und Module	Gouy, M. Landurau, A.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Aufgaben und Übungen
E Advanced Algebra through Data Exploration	Murdock, J. Kamischke, E.	Key Curriculum Press	Buchhandel	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Speziell für TI-82 ◆ Schülerausgabe
E Advanced Algebra through Data Exploration	Murdock, J. Kamischke, E.	Key Curriculum Press	Buchhandel	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Lehrerausgabe mit Lösungen

TI-83

D Graphikrechner ABC für TI-83 - SI	Messner, A.	Paetec Verlag	MC CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ schulstufenbezogene Anleitung ◆ detaillierte Darstellung ◆ reich bebildert
D Graphikrechner ABC für TI-83 - SII	Messner, A.	Paetec Verlag	MC CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ schulstufenbezogene Anleitung ◆ detaillierte Darstellung ◆ reich bebildert
D Mathematikunterricht mit Graphikrechner Klasse 8	Ebenhöh, M. Weiskirch, W.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Rechnen mit dem TI-83 ◆ Gleichungen und Ungleichungen ◆ Lineare Funktionen ◆ kleine Programme
D Mathematikunterricht mit Graphikrechner Klasse 9	Steger, M.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i> ◆ (Un-)Gleichungssysteme ◆ Reelle Zahlen

Titel Autoren Verlag Quelle Inhalt

				<ul style="list-style-type: none"> ◆ Quadratische (Un-) Gleichungen und Systeme
D Mathematikunterricht mit Graphikrechner Klasse 10	Kirmse, D.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i> ◆ zentrische Streckung ◆ Berechnungen am Kreis ◆ Potenzten und Potenzfunktionen ◆ Exponential- und Logarithmusfunktionen ◆ Trigonometrische Funktionen
D Arbeitsheft für die Oberstufe - Band 1	Wiesner, S.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i> ◆ Funktionen ◆ Statistik ◆ Programmierung ◆ numerisches Rechnen
D Arbeitsheft für die Oberstufe - Band 2	Wiesner, S.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i> ◆ Kurvendiskussion ◆ Parameterkurven ◆ rekursiv definierte Folgen ◆ Approximation durch Polygone ◆ komplexe Zahlen
D Arbeitsheft Folgen mit dem TI-83	Schlosser, S.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i>
D Arbeitsheft Einführung in die Analysis mit dem TI-83	Ladureau, A. Gouy, M. Schlosser, S.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i>
D Einführung in den TI-83	Albers, R. Pöthke, M. Jäger, J.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i>
D Funktionen und Gleichungen mit dem TI-83	Beyer, H.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ <i>vorauss. Herbst 98</i>
D Kurvendiskussion im Reellen mit dem TI-83	Beyer, H.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ umfassende Behandlung der Kurvendiskussion mit dem TI-83 ◆ Interpolation ◆ num. Approximation
D Mathematik mit dem TI-83	Schneider Thannhauser Girlinger Tinhof	Trauner	Buchhandel	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Einführung ◆ Finanzmathematik ◆ Statistik ◆ Matrizenrechnung
E Statistics handbook for the TI-83	Morgan, L.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Datenanalyse, Simulation, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen, Regression ◆ mehr als 60 Aufgaben ◆ Für Schüler und Studenten
E Time, Value, Money: Applications on the TI-83	Hofmann, C. Hofmann, R.	TI	CSC	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Beschreibt die finanzmathematischen Funktionen des TI-83 ◆ Viele Beispiele
E Tapping into mathematics with a TI-83 Graphics calculator	Galpin, B. Graham, A.	Addison Wesley	Buchhandel	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Beschreibt die Funktionenvielfalt ◆ Mit vielen Beispielen

TI-85/TI-86

Titel	Autoren	Verlag	Quelle	Inhalt
D Mathematik sehen Grafikrechner im Unterricht	Bettinaglio, M. Sabe Hartmann, W. Schneebeli, H.	CSC Buchhandel		◆ 11 praktische Anwendungen aus Mathematik und Physik
D Skalarprodukte - Schwingungen - Signale	Schneebeli, H.R. Sabe Vollmer, H.R.	Buchhandel		◆ Skalarprodukt und kleinste Quadrate ◆ Kreise u. Bewegungen ◆ Periodische Datenformation ◆ Fourierrezelegung und Abtasttheorem
E Differential Equations with the TI-86	Barton, R.	TI	CSC	◆ graphische und numerische Lösung ◆ Differentialgleichung höherer Ordnung ◆ Bewegungsanalysen ◆ Biologische Modelle
E Programming Math Applications on the TI-86	Slomer, D.	TI	CSC	◆ umfassende Einführung in die Programmierung mit dem TI-86 ◆ zahlreiche Beispiele
E Using the TI-86 in Collegiate Mathematics	Dodd Cruthirds	TI	CSC	◆ Differential- und Integralrechnung, Matrizen und Vektoren, Differentialgleichungen, Statistik

TI-89/TI-92

D Einführung in den TI-89 - Teil 1	Kutzler, B.	bk	bk CSC	◆ Tabellen ◆ anhand ausgewählter Beispiele wird die Handhabung schrittweise erklärt ◆ Algebra ◆ Graphik
D Einführung in den TI-89 - Teil 2	Kutzler, B.	bk	bk CSC	◆ Texte ◆ anhand ausgewählter Beispiele wird die Handhabung schrittweise erklärt ◆ Graphik ◆ Dateien ◆ Programmieren
D Optimierungsaufgaben grafisch, numerisch und analytisch mit dem TI-92 lösen	Böhm, J.	bk	bk CSC	◆ Optimierungsaufgaben ohne Differentialrechnung ◆ Visualisierung durch dynamische Geometrie ◆ Erzeugung von Animationen
D Einführung in den TI-92	Dreiseidler, A. Grabinger, B. Kutzler, B. Noll, G. Pröpper, W. Scheu, G. Scheuermann, H. Weitendorf, J.	TI	CSC	◆ Einführung in das Arbeiten u. Unterrichten ◆ 18 Beispiele v. Klasse 7 bis 13 geben einen Überblick über die didaktischen u. methodischen Möglichkeiten ◆ Begleitliteratur zu einem Einstiegsworkshop
D Analysisunterricht mit dem TI-92	Grabinger, B. Noll, G. Schmidt, G.	TI	CSC	◆ <i>voraus. Herbst 98</i>
D Der TI-92 im Mathematikunterricht	Aspertsberger, K. Schlöglhofer, F.	TI	bk CSC MC BD	◆ Terme ◆ Stochastik ◆ Geometrie ◆ Wachstumsprozesse ◆ Analysis

TI-92

D Einführung in das Arbeiten mit dem TI-92	Pröpper, W.	TI	bk CSC MC BD	◆ Analysis in Grund- und Leistungskurs ◆ Gleichungssysteme ◆ analytische Geometrie
D Gebrochenrationale Funktionen mit dem TI-92	Pröpper, W.	TI	bk CSC MC BD	◆ eingehende Diskussion gebrochen-rationaler Funktionen ◆ graphische Visualisierungen ◆ Aufgaben und Lösungen
D Mathematik erleben mit dem TI-92	Schmidt, G.	TI	bk CSC MC BD	◆ 5 realitätsnahe Aufgaben ◆ umfassende Darstellung der Funktionen ◆ Algebra, Analysis, Geometrie
D Numerische Verfahren	Schmidt, G.	TI	bk CSC MC BD	◆ Näherungsverfahren ◆ spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen ◆ Gleichungen und Gleichungssysteme ◆ Aufgaben und Erweiterungen
D Lineare Algebra mit dem TI-92	Lehmann, E.	TI	bk CSC MC BD	◆ Matrizen und lineare Gleichungssysteme ◆ Analytische Geometrie ◆ Abbildungsgeometrie ◆ Mathematik mit Bausteinen
D Programmpaket Vektorrechnung	Himmelbauer, T.	TI	bk MC BD CSC	◆ Programme und Funktionen ◆ graphische Darstellung ◆ 2- und 3-dimensional
D Symbolrechner TI-92	Kutzler, B.	Addison Wesley	bk BD CSC MC	◆ Einführung in das Arbeiten mit dem TI-92 ◆ Programmierung ◆ Algebra, Analysis, Geometrie ◆ Programmierung
D Tolle TI-92 Programme - Bd. 1	Kutzler, B.	bk	bk BD CSC MC	◆ Interaktive Lektionen ◆ nützliche Online-Hilfe ◆ Differentialgleichungen ◆ Systeme nichtlinearer Gleichungen ◆ implizite Graphen, Turtle Graphik
D Lineare Gleichungen lösen mit dem TI-92	Kutzler, B.	bk	bk BD CSC MC	◆ numerische, graphische und symbolische Lösung ◆ experimentelles Lernen - Visualisierung - Gerüstmethode
D Lineare Gleichungssysteme lösen mit dem TI-92	Kutzler, B.	bk	bk BD CSC MC	◆ numerische, graphische und symbolische Lösung ◆ experimentelles Lernen - Visualisierung - Gerüstmethode
D Mathematik mit dem TI-92	Reichel, H. C. Müller, R.	hpt	bk BD CSC MC	◆ Zusatz zur Schulbuchreihe, aber auch eigenständig zu verwenden ◆ Nachschlagewerk zur Behandlung des gesamten Oberstufenstoffes
D Mathematik 1 für HTL und Fachschule	Schärf, J.	Oldenbourg	bk BDMC MC	◆ approbiertes Schulheftbuch aus Österreich

Titel	Autoren	Verlag	Quelle	Inhalt
D DIRA – ein Unterrichtsprojekt für den TI-92	Pröpfer, W. Tschacher, K.	Bergmoser & Höller	bk MC	◆ Material zur Erleichterung der Unterrichtsvorbereitung ◆ Kurvendiskussion ◆ mit Diskette
E Mastering the TI-92 Explorations from Algebra through Calculus	Rich, N. Rose, J. Gilligan, L.	Gilmar Publishing	bk	◆ alle wichtigen Merkmale
E Learning Programming with the TI-92	Blasberg, S. Lodi, E. Ellis, W.	TI	CSC	◆ einfache Programme ◆ Verzweigungen ◆ Unterprogramme, Funktionen ◆ Programmierung mit CBL
E Discovering Math on the TI-92	Brueningsen, C.+E. Bower, B. Gough, S. Turley, E.	TI	CSC	◆ viele praktische Beispiele ◆ Lösungen ◆ didaktische Hinweise ◆ Arbeitsblätter
E Investigating Advanced Algebra with the TI-92	Kelly, B.	Brendan Kelly	CSC	◆ ausführliche Anleitungen ◆ Förderung der Selbsttätigkeit der Schüler ◆ Diskette mit Programmen ◆ ausführliche Lösungen
E Investigating Calculus with the TI-92	Kelly, B.	Brendan Kelly	CSC	◆ detaillierte Anleitungen ◆ Gruppen- und Einzelarbeit ◆ ausführliche Lösungen
E Investigating Probability and Statistics with the TI-92	Kelly, B.	Brendan Kelly	CSC	◆ reale Daten ◆ graphische und rechnerische Auswertung ◆ detaillierte Anleitungen ◆ Diskette ◆ ausführliche Lösungen
E 92 Geometric Explorations with the TI-92	Keyton, M.	Brendan Kelly	CSC	◆ 92 illustrierte Aktivitäten ◆ für Anfänger und Fortgeschrittene ◆ didaktische Hinweise ◆ ausführliche Lösungen
E Introduction to the TI-92: 37 Experiments in Precalculus and Calculus	Lund, C. Andersen, E.	Math Ware	CSC	◆ 37 Lektionen ◆ lineare und quadratische Gleichungssysteme ◆ Parameterkurven ◆ Grenzwerte, Ableitungen ◆ Integrale
E Geometric Investigations for the Classroom on the TI-92	Embse, V. Engebretsen, C. Engebretsen, A.	TI	CSC	◆ Geometrie und Algebra ◆ Interaktion zwischen Schüler und Rechner

CBL/CBR

D Messen und Auswerten	Keunecke, K.-H.	TI	CSC bk	◆ Fahrradfahren ◆ Fallversuche ◆ Federpendel
E Real-World Math with the CBL System	Brueningsen, C. Bower, B. Antinone, L. Brueningsen, E.	TI	bk BD CSC MC	◆ 25 Versuche aus Erfahrungswelt der Schüler ◆ reale Fragestellungen führen zu mathematischen Konzepten ◆ Programme auf Diskette ◆ didaktische Hinweise
E Exploring Physics and Math with the CBL System	Brueningsen, C. Krawiec, W.	TI	bk BD CSC MC	◆ 48 Aktivitäten ◆ detaillierte Anleitungen ◆ 10 verschiedene Sensoren

Titel	Autoren	Verlag	Quelle	Inhalt
E Biology with CBL	Holman, S. Masterman, D.	Vernier	bk BD CSC MC	◆ Programme auf Diskette ◆ didaktische Hinweise
E Chemistry with CBL	Holmquist, D. Randall, J. Volz, D.	Vernier	bk BD CSC MC	◆ 30 Versuche ◆ viele verschiedene Sensoren ◆ pH, Temperatur, Gasdruck, EKG, Puls, Farbwerte, Leitfähigkeit ◆ Meßprogramm CHEMBIO und Arbeitsblätter auf Diskette
E Physical Science with CBL	Volz, D. Sapatka, S.	Vernier Software	bk CSC	◆ 35 Schülerexperimente ◆ pH, Temperatur, Gasdruck, EKG, Puls, Farbwerte, Leitfähigkeit, Spannung ◆ Meßprogramm CHEMBIO und Arbeitsblätter auf Diskette
E Physical Science with CBL	Volz, D. Sapatka, S.	Vernier Software	bk CSC	◆ 35 Schülerexperimente ◆ Temperatur, Druck, Kraft, Magnetfeld, Spannung, Lichtstärke, pH-Wert ◆ Meßprogramm PHYSC und Arbeitsblätter auf Diskette

Cabri Géométrè II

D Arbeitsbuch Cabri Géométrè	Henn, H. W. Jock, W.	Dümmler	Buchhandel bk	◆ Ausgearbeitete Unterrichtskonzepte für SI
D Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer	Schumann, H.	Reinhard Becker	Buchhandel	◆ 14 Kapiteln ◆ schulgeometrisches Konstruieren
D Zuordnungen nach Programm Lehrband	Schumann, F.	Math-College	MC	◆ Lehrerhandreichung mit Zusatzdiskette ◆ Grundbegriffe der Koordinatengeometrie ◆ symbolisches, numerisches und graphisches Darstellen v. Tabellen ◆ Zuordnungen nach Programm ◆ Umgang mit Variablen und Termen ◆ Modellbildung ◆ Expertenwissen und Anwendungsmathematik
D Zuordnungen nach Programm - Schülerband	Schumann, F.	Math-College	MC	◆ Arbeitsblätter und Zusatzdateien als Schulkopierlizenzen
E Exploring the basics of Geometry with Cabri	Wilgus	TI	CSC	◆ Einführung in die euklidische Geometrie
E Discovering Geometry with a Computer using Cabri Geometry	Schumann, H. Green, D.	Chartwell-Bratt	Buchhandel	◆ 15 ausführliche Kapitel ◆ euklidische Geometrie

bk = bk teachware, Softwarepark, A-4232 Hagenberg, +43-(0)7236-3329, info@bk-teachware.com

BD = Böttcher Datentechnik, Hudekamp 18a, D-23558 Lübeck, +49-(0)451-899153, BoeDatec@aol.com

MC = Math-College, Goseriende 10-12, D-30159 Hannover, +49-(0)511-1318430, Math-College@t-online.de

CSC = Customer Support Center, D: 06196-975015, A: 01-502910007, CH-Zürich: 01-2730688, CH-Genf: 022-7100010, ti-cares@ti.com