TI-Nspire™ CAS

Håndholdt version 1.7

Kapitel 1 - 14

— introduktion og eksempler

TI-Nspire™ CAS
— introduktion og eksempler

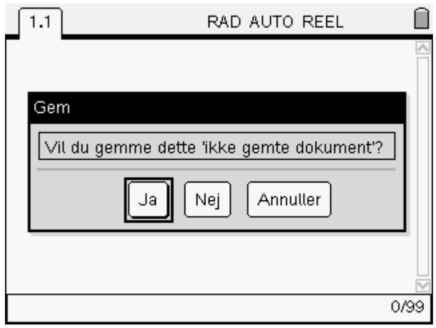
Filen kan fås på www.education.ti.com/danmark eller ved henvendelse til Texas Instruments på tlf.: 80 88 03 20 eller email: ti-cares@ti.com.

Indhold

Tænd TI-Nspire CAS

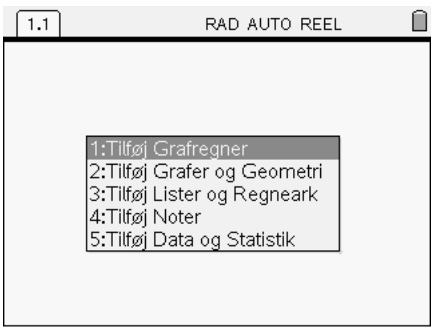
og tryk på knappen . Du får da adgang til dokumentstyringen. Du navigerer i denne dialog med NavPad — den store runde multifunktionstast.

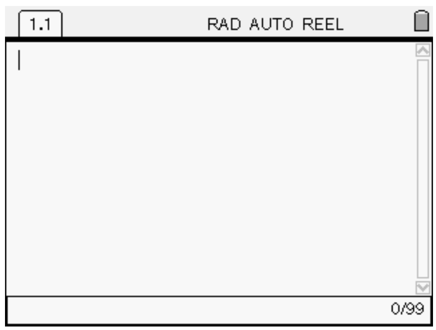
Sørg for, at 6:Nyt dokument er i fokus, og tryk på klik-knappen placeret midt i NavPad . Gem det aktuelle dokument efter behov, men er dette din første TI-Nspire CAS aktivitet, kan du trygt pile til Nej-knappen, og taste enter:



Vinduet ændrer nu udseende til en blank skærm med en værkstedsliste. Her kan du vælge, hvilken applikation du vil starte med i dit dokument. Som det fremgår, findes 5 forskellige værksteder. Vi skal se på dem alle, men start med at vælge 1: Tilføj Grafregner, og du får en blank skærm frem klar til indtastning:

Tip
Alternativt kan du komme til Graf-regner værkstedet ved at taste ctrl N, og gemme det aktuelle dokument efter behov.





1 Grafregner

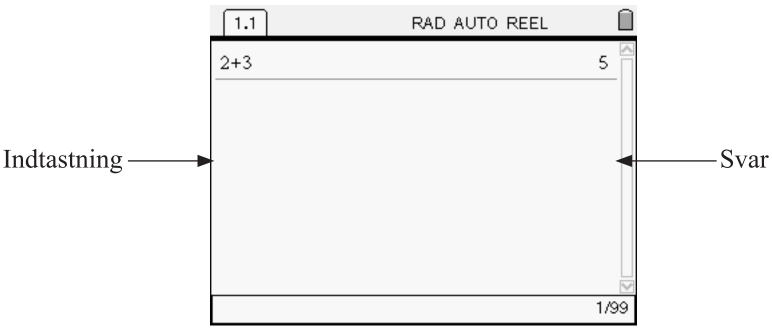
For at få TI-Nspire CAS til at lave noget fornuftigt så hurtigt som muligt, vil kun de absolut nødvendige dele af Grafregner værkstedet og tastaturet blive omtalt her. I de følgende afsnit kommer turen til de andre værksteder.

Tip
Hvis du ikke har Grafregner tilføjet, så tast ctrl N, og gem det aktuelle dokument efter behov. Vælg så 1: Tilføj Grafregner

Den første lille opgave

Indtast 2 + 3 og afslut med enter — du må ikke bruge =-knappen som på en almindelig lommeregner. Resultatet er selvfølgelig ikke særlig interessant, men tag et kig på skærmbilledet:

Obs
Bundlinjen er også ændret en smule: Yderst til højre står der nu 1/99. Det betyder, at der er 1 indtastnings/svarpar i historikområdet ud af de 99, standard-opsætningen giver plads til.



Indtastning af et taludtryk

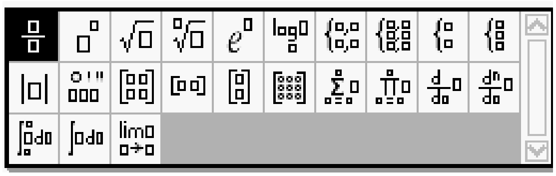
Udregn udtrykket

$$-3.17+\frac{2.53^2-\sqrt{5.25}}{2.46}$$

Indtast først - 3.17, hvor du skal du være opmærksom på det minus, der står foran 3.17. TI-Nspire CAS skelner mellem et minus som fortegn ((–)) og som regnetegn (−). Her skal du benytte fortegnsminus.

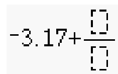
Dernæst skal du være opmærksom på, at der indgår en brøkstreg i udtrykket. Dette afstedkommer ofte brug af parenteser, men på TI-Nspire CAS kan du undgå dette ved at bruge skabeloner:

Tast ctrl. Dette vil kalde denne skabelonmenu frem

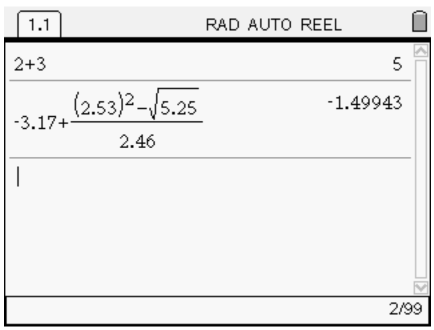


Benyt NavPad til at navigere til brøkskabelonen, og vælg denne med klik-knappen. Herefter skulle du gerne have dette på din skærm:

> **Tip**
> Brøkskabelonen findes også på en selvstændig tast.



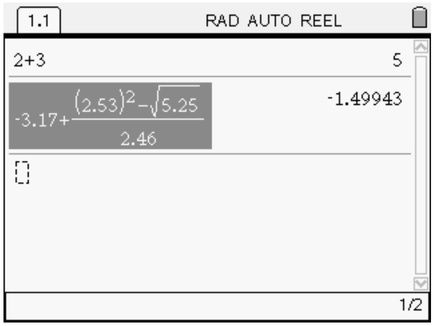
Indtast tælleren — kvadrat og kvadratrodstegnet finder du på tasten. Når tælleren er indtastet, flytter du til nævneren med NavPad (▼), og indtaster denne. Nedenfor ser du skærmbilledet med udtrykket korrekt indtastet:

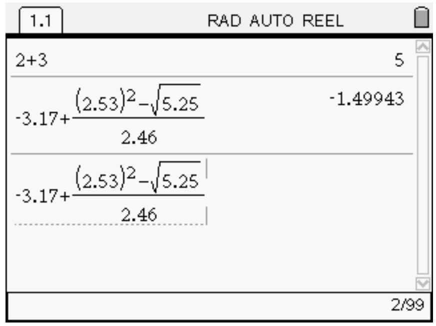


Skulle du lave en fejl undervejs, før du taster enter, kan du

- vha. NavPad tasterne ◀ og ▶ pile hen til den eller de fejl, du måtte have lavet
- slette et enkelt tegn ved at placere markøren efter det tegn, der skal slettes og taste clear
- indsætte et eller flere tegn på markørens position ved blot at skrive på det pågældende sted

Opdager du en fejl, efter at du har tastet enter, kan du hente udtrykket ved at pile op til det (tast to gange ▲), hvorved det markeres i sort. Når du har det, du vil hente, markeret, taster du enter, hvorefter udtrykkes hentes ned til indtastningslinjen, så du kan rette fejlen og få udtrykket genberegnet — se nedenstående to skærmbilleder:



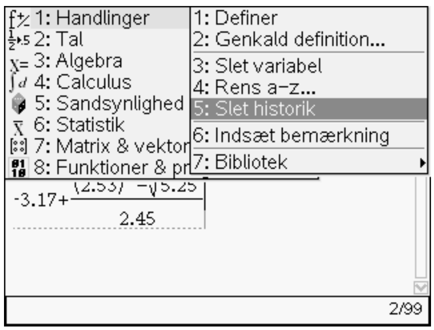


Ryd op

Selvom det endnu er til at overse, kan du lige så godt lære at rydde op efter dig i historikområdet. Pil op til den linje (tast ▲) du vil slette

Tip
I stedet for at rydde op kan du indsætte et nyt værksted med ctrl I eller oprette et nyt dokument med ctrl N.

- Slet linjen med clear.
- Hele historikområdet sletter du ved først at taste menu, og i den menu, der kommer frem, vælger du 1:Handlinger, og i undermenuen vælger du 5: Slet historik.



Hvis du fortryder, at du har slettet hele historikken eller en anden handling, så findes der en fortrydknap ↶ , der er placeret over esc-knappen.

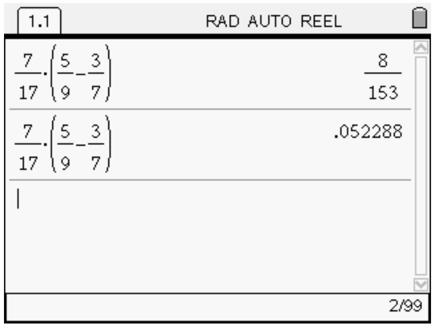
Brøkregning — regning med eksakte tal

TI-Nspire CAS regner naturligvis eksakt med brøker af hele tal, hvor slutresultatet altid forkor-tes i bund.

Beregn udtrykket $\frac{7}{17}\cdot\left(\frac{5}{9}-\frac{3}{7}\right)$

Indtast med flittig brug af brøkskabelonen ctrl ÷:

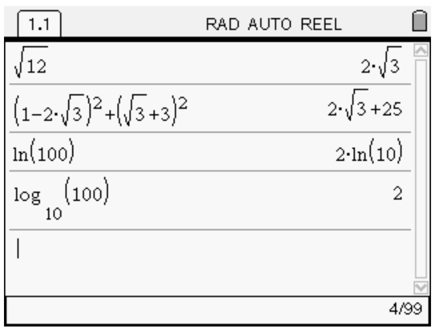
Obs
Eksakt beregning er kun er mulig, hvis der udelukkende indgår eksakte tal i udtrykket.
Findes der blot et enkelt decimaltal i udtrykket, bliver resultat et decimaltal.



I første linje er indtastningen afsluttet med enter, og resultatet vises som uforkortelig brøk.

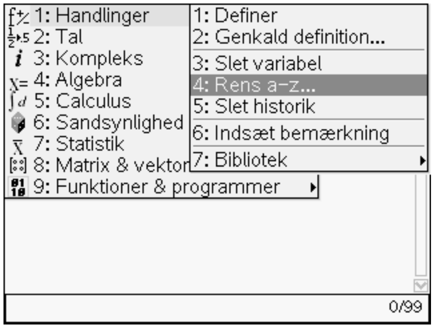
I anden linje er indtastningen afslutet med ctrl enter — dette giver en tilnærmet værdi.

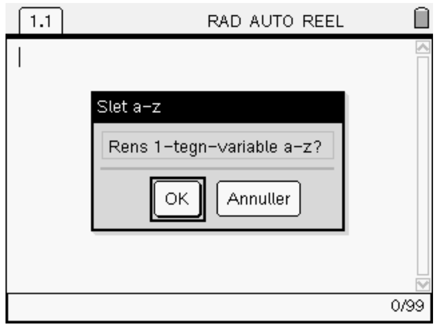
Det er ikke kun rationale tal, der behandles eksakt. Det samme gælder for irrationale tal, der så vidt det er muligt pr. automatik omskrives til et standardformat. Nedenfor ser du nogle eksempler på dette:



Regning med bogstaver

Før du starter, skal du rense alle et-bogstavsvariabler på din TI-Nspire CAS: Tast (menu), vælg 1:Handlinger ▸ 5: Rens a-z.... I dialogboksen, der kommer frem, vælger du OK.





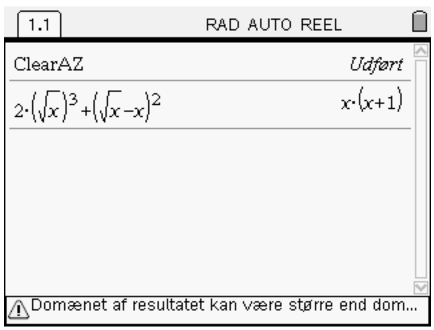
Tip
Potenser skrives vha. knappen (^).

Reducer udtrykket $2\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x}-x\right)^2$

Hold godt øje med markøren mens du taster. Undervejs skal du bruge NavPad tasten ▸ til at slippe ud af kvadratrødder, potenser og parenteser. Læg mærke til, at du kun behøver at sætte venstreparenteser — højreparenteser sættes automatisk.

Det eneste, du skal foretage dig for at få udtrykket reduceret, som vist, er at trykke på (enter), TI-Nspire CAS vil pr. automatik søge at reducere udtrykket mest muligt:

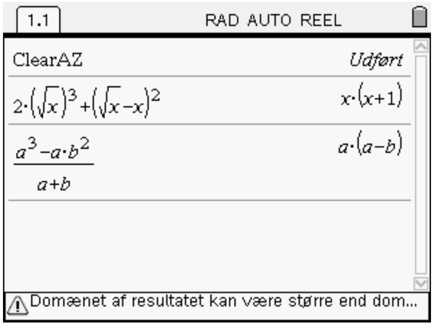
Tip
Advarslen i bundlinjen betyder, at resultatet kan være defineret i et større talområde end det oprindelige udtryk. I det oprindelige udtryk skal forudsættes, at $x \geq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet

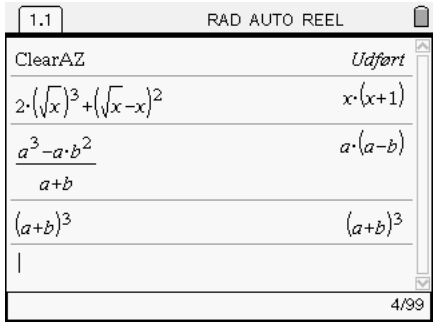


Reducer udtrykket $\dfrac{a^3 - a \cdot b^2}{a+b}$

Du behøver blot at taste udtrykket ind — reduktionen sker igen automatisk:

Tip
Advarslen i bundlinjen betyder her, at i det oprindelige udtryk skal forudsættes, at $a+b \neq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet.





Når TI-Nspire CAS altid reducerer et udtryk mest muligt, hvad gør du så, hvis du vil have udregnet fx $(a+b)^3$?

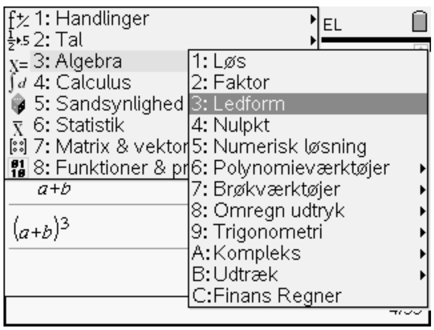
Indtast $(a+b)^3$ og tast (enter). Der sker intet med udtrykket (se andet skærmbillede ovenfor), men det er der råd for:

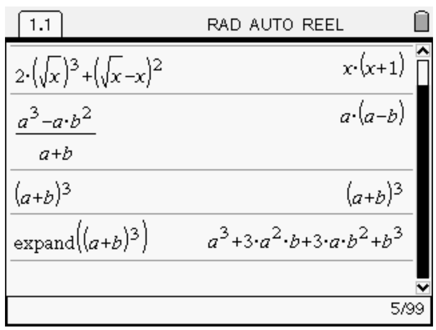
Obs
Selvom du vælger Ledform i menuen er det expand(der indsættes.

Tast (menu), vælg 3:Algebra ▸ 3: Ledform.

Tast (enter), og "expand(" indsættes i indtastningslinjen. Pil op og hent $(a+b)^3$, og tast (enter). Udtrykket omskrives herefter til ledform, dvs. parentesen udregnes og udtrykket skrives som en flerleddet størrelse:

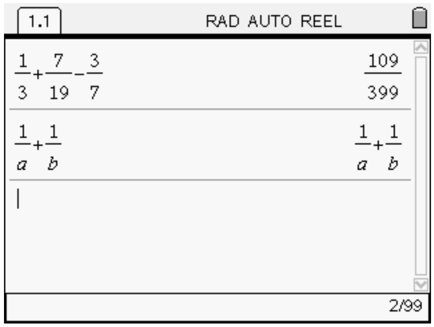
Tip
Du kan også skrive expand(direkte fra tastaturet, men det er ofte hurtigere at benytte menuerne.





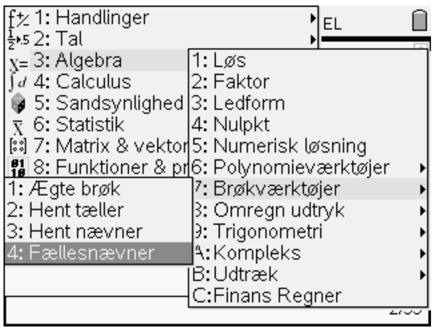
Om at sætte på fælles brøkstreg

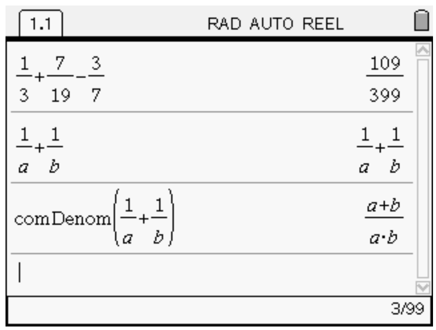
Som du tidligere har set, sættes talbrøker pr. automatik på fælles brøkstreg. Det samme gælder ikke summer og differenser af symbolske brøker:



Obs
ComDenom er en forkortelse af Common Denominator, som betyder “fælles nævner”.

Hertil skal du bruge kommandoen ComDenom: Tast (menu), vælg 3:Algebra ▸ 7: Brøkværktøjer ▸ 4: Fællesnævner





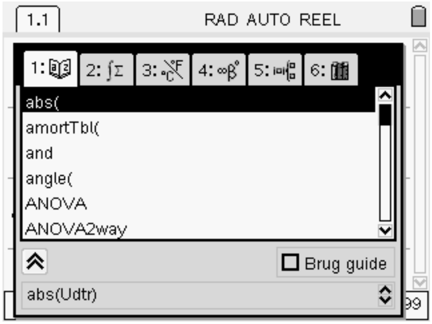
Obs
Drejer det sig blot om at konvertere et resultat, kan menupunktet **2: Tal ▸ 2: Tilnærmelse til brøk** benyttes i stedet for **exact**.

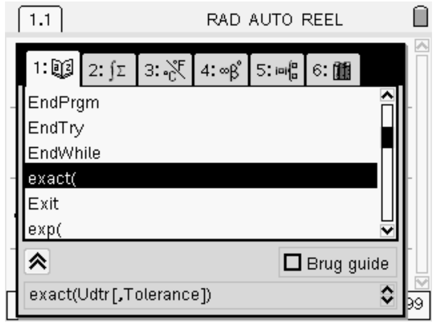
Katalog

Der findes en kommando med navnet **exact**, der omsætter et decimaltal til brøk. exact findes ikke i nogen af de menuer, der kommer frem via (menu), så den må du finde andetsteds — eller selv skrive det.
Mest effektivt er det imidlertid at benytte den alfabetisk ordnede fortegnelse over alle instruktioner, som Katalog-tasten giver adgang til:

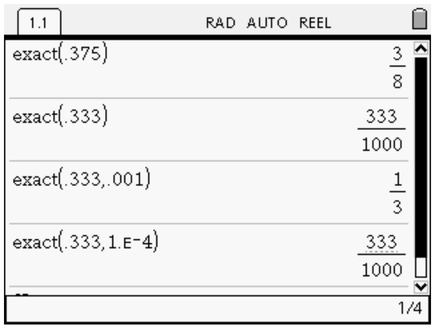
Obs
Det er ikke sikkert, at dit skærmbillede ser ud som her, men det betyder intet. Markeringen vil altid være der, hvor du sidst var.

Tip
Syntaksen for **exact** står i feltet for neden.
exact skal som argument dels have et udtryk, og dels en valgfri tolerance, der skal adskilles med et komma.
Læg mærke til i feltet for neden. Den betyder, at der er flere syntaks-muligheder. Du kommer derned ved gentagne tryk på tab

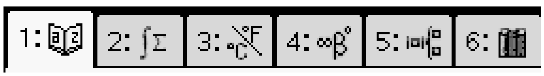




Med ▲ og ▼ kan du pile op og ned i listen. Taster du E, så vil indikatoren stå i starten af de kommandoer, der starter med E. Flyt markeringen til **exact(**, og tast enter. **exact(** kopieres da til indtastningslinjen. Nedenfor ser du et par eksempler på brugen af exact:



Læg mærke til fanerne øverst i Katalog skærmen:



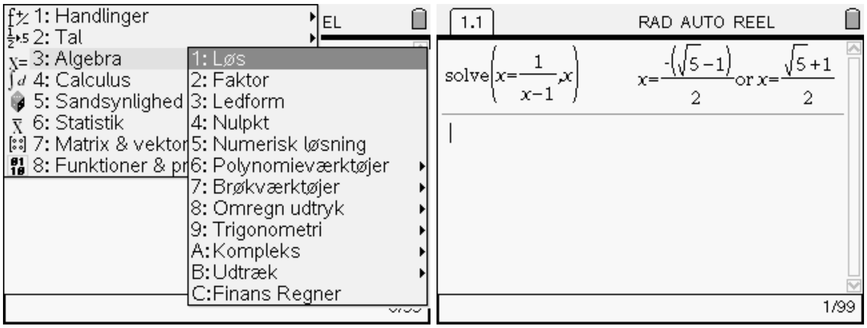
Du skifter til visning af kommandoer efter kategori ved at vælge fane 2 (tast 2), fane 3 viser en liste med enheder efter kategori, fane 4 er en tabel med symboler, fane 5 viser en skabelonerne og endelig viser fane 6 offentlige biblioteksobjekter.

Orienter dig i kataloget, så du ved, hvor du finder det du søger. Du skifter mellem fanerne ved at taste tallet på fanen, og i øvrigt kommer du rundt til de forskelle felter i katalogvinduet med gentagne tryk på tab.

Ligninger og genbrug

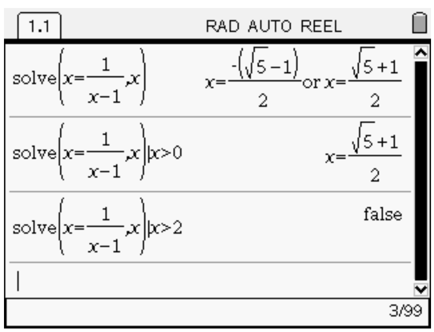
Løs ligningen $x = \dfrac{1}{x-1}$

Tast menu 3 for at åbne Algebra-menuen. Menupunktet 1:Løs er allerede fremhævet, så du behøver blot at taste enter, og **solve(** bliver skrevet på skærmen. Herefter indtaster du ligningen og fortæller, at ligningen skal løses med hensyn til x ved at skrive **,x** efter ligningen. Tast enter,og ligningen løses:



Hvis du kun er interesseret i fx den positive løsning, kan du begrænse løsningsintervallet til de positive reelle tal vha. betingelses-operatoren |.

I skærmbilledet ovenfor henter du den indtastede ligning og indsætter betingelsesoperatoren | efterfulgt af x > 0. Tast enter, og ligningen løses endnu engang (se midterste linje):



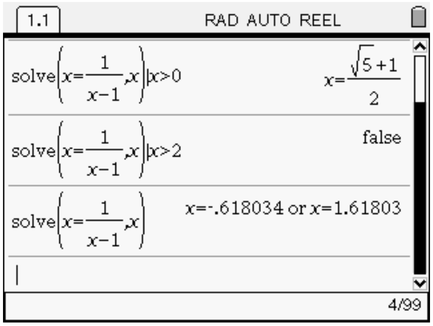
Tip
Numerisk løsning af ligninger kan også udføres ved at skrive **nSolve** i stedet for **solve**. **nSolve** findes i Algebra-menuen som nummer 5.

Tip
Skulle du rende ind i en ligning **solve** ikke kan klare, kan du bruge **nSolve** med et passende gæt (se side 74).

Obs
Går maskinen død i en **solve** eller lignende, så kan du standse med et tryk på (on)-knappen

Laver du løsningsintervallet således, at der ingen løsninger er, svarer maskinen med **false** (nederste linje i skærmbilledet ovenfor).

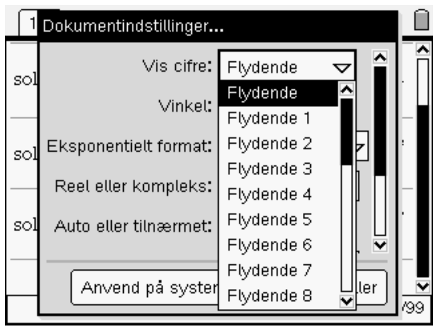
Er du ikke interesseret i de eksakte løsninger, men blot nogle tilnærmede, klares sagen med tastetrykket (ctrl)(enter):



Antal decimaler

Hvis du vil have resultatet med flere eller færre decimaler end ovenfor, så skal du ændre indstillingerne i dokumentstyringen (home), hvor du vælger 8: Systeminfo. Vælg dernæst 1: Dokumentindstillinger:

Obs
Det er her du skifter mellem indstilling i grader (DEG) og radianer (RAD). Denne indstilling vises øverst på skærmen, og gælder **kun** for Grafregner værkstedet.
I 3: Indstillinger i Grafer og Geometri laver du indstillingen for Grafer og Geometri værkstedet.



I listen **Vis cifre:** vælger du det antal decimaler du finder passende, og afslutter med (enter). Du navigerer mellem de forskellige indstillinger med (tab)-tasten.

2 Grafer og Geometri

I Grafer og Geometri værkstedet kan du ud over at tegne og undersøge mange forskellige former for grafer også lave geometriske konstruktioner — og endda blande de to ting.

I starten benyttes følgende eksempel:

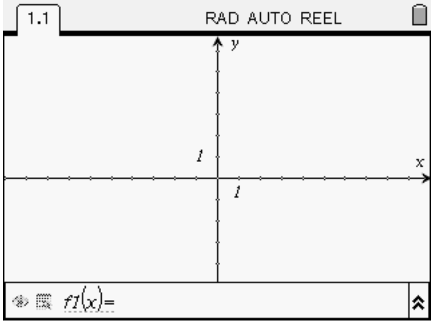
Tegn grafen for den lineære funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ og grafen for andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 2$.

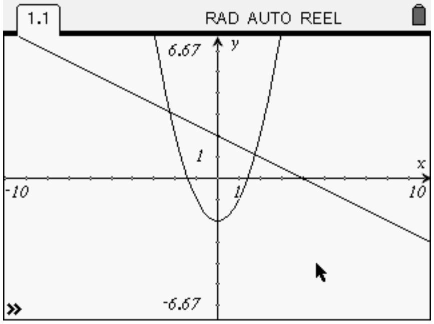
Bestem skæringspunkterne mellem linjen og parablen.

Tegn graferne

Obs
Du opretter nemmest et nyt dokument ved at taste ctrl N, gemme det aktuelle dokument efter behov, og derefter vælge det værksted, du vil starte i.

Opret et nyt dokument — denne gang med et Grafer og Geometri værksted tilføjet. Herefter skulle din skærm gerne se sådan ud (venstre skærmbillede):



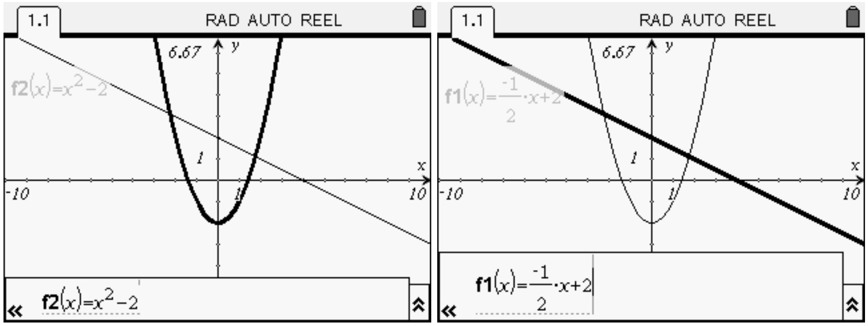


Indtastning af funktionerne sker i indtastningslinjen nederst på skærmen. Hvis du ikke allerede er nede i indtastningslinjen, så åbn indtastningslinjen ved at trykke på tab.

Indtastningen af *f1(x)* afsluttes med enter, og grafen tegnes straks, og indtastningslinjen lukker. På skærmbilledet til højre ser du, hvordan det skal se ud, når begge forskrifter er indtastede.

Så længe du er i indtastningsfeltet (tryk på (tab) for at åne) kan du med ▲ og ▼ bladre i de indtastede forskrifter, og den aktive graf vil blinke (Prøv!)

Tip
Du fjerner indtastningsfeltet ved at taste (ctrl)(G), og du får det frem igen på samme måde.

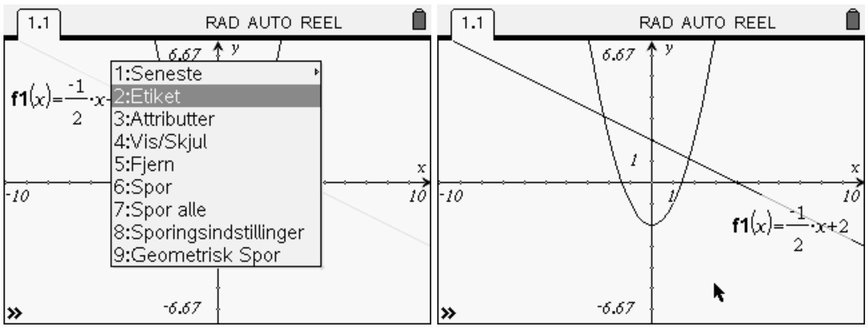


Du forlader indtastningsfeltet ved at trykke på (esc). Herefter får du i graffeltet en aktiv markør, der kan kan optræde i flere forskellige former fx

— og vise meddelelser og visuelle effekter alt efter, hvad markøren aktuelt peger på.

Hvis du vil have vist forskriften som en etiket ved grafen, så peger du på grafen og trykker ▤. I kontekstmenuen vælger du 2: Etiket:

Tip
Du kan skjule eller fjerne en etiket ved at pege på etiketten, trykke på ▤ og vælge Vis/Skjul eller Fjern i menuen

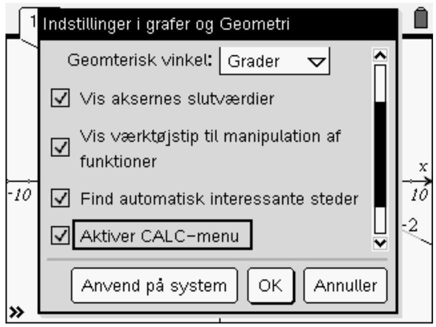


Flyt markøren hen til en af funktionsetiketterne, så pilen ændres til en åben hånd. Hold (klik) nede et øjeblik — det er ikke nok blot at klikke — indtil hånden skifter udseende og bliver til en gribende hånd, så kan du med NavPad trække etiketten derhen, hvor du vil have den. Du låser etiketten til den nye position ved at trykke på (klik).

CALC Menu

Her skal du lave en lille indstilling af TI-Nspire CAS for at få vist nogle menuer. Det er en indstilling du kun skal lave én gang. Tast (menu), og vælg 8:Systeminfo ▸ 1:Indstillinger i Grafer og Geometri

Obs
Det er her indstiller vinkel i forbindelse med graftegning og geometri.

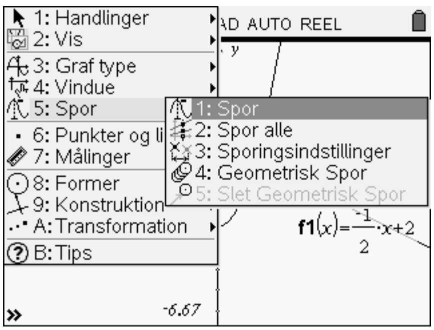


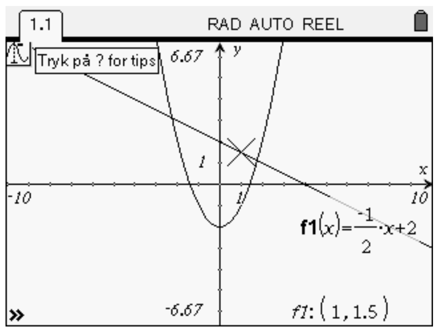
Brug (tab) til at hoppe mellem indstillingerne indtil du kommer til Aktiver CALC-menu, og hak denne af.

Grafsporing

Tast (menu), og vælg 5:Spor ▸ 1:Spor

Tip
Tryk på (?) for at vise menuen.



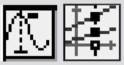


Obs
Med sporing aktiveret kan du taste en x-værdi på tastaturet, og når du trykker (enter), så hopper du til det punkt, der har denne x-værdi (og får samtidig y-værdien vist). Se side 24.

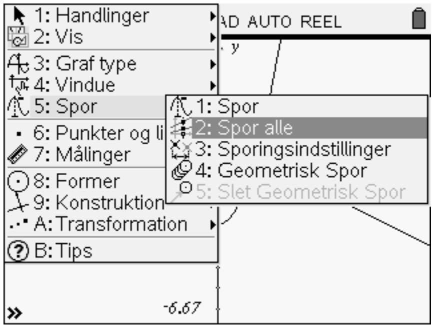
Du kan flytte sigtekornet frem og tilbage på linjen vha. tasterne ◂ og ▸ og samtidig følge sigtekornets aktuelle koordinater på skærmen.
Med et tryk på ▴ kan du binde sigtekornet til parablen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på parablen vha. tasterne ◂ og ▸.

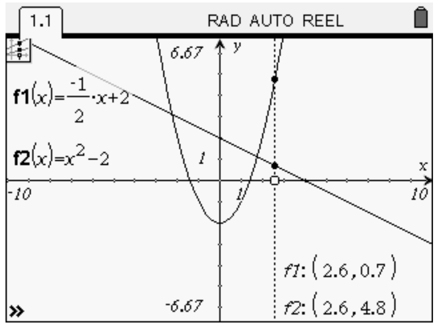
Du kan spore begge grafer samtidig ved at vælge Spor alle i menuen. Her bindes sigtekornet til *x*-aksen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på *x*-aksen vha. tasterne ◀ og ▶, og samtidig følge grafpunkternes aktuelle koordinater på skærmen.

Tip
Sporingsikonerne



i øverste venstre hjørne af skærmen viser, hvilken type sporing der er aktiveret.



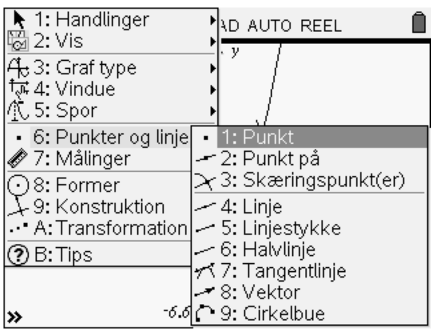


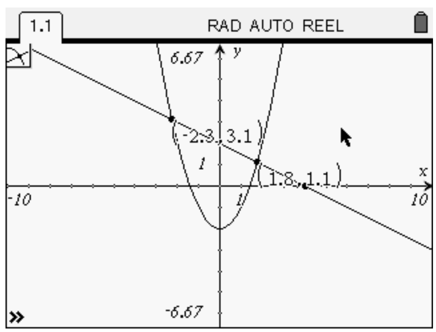
Med sporing kan du aflæse nogle tilnærmede koordinater for skæringspunkterne. Forlad sporing ved at trykke på esc.

Skæring mellem grafer

Tast menu, og vælg 6:Punkter og linjer ▶ 3:Skæringspunkter.

Flyt markøren hen til en af graferne. Når markøren ændrer udseende til en pegende hånd , klikker du på . Den udpegede graf blinker nu. Udpeg den anden graf tilsvarende, og straks vises skæringspunkterne:

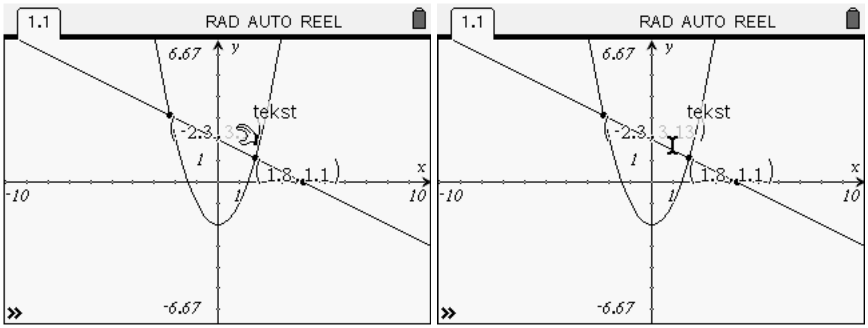




Obs
Standard indstilling er Flydende 2
Dette kan du ændre i dialogen som er vist øverst side 19.

Skæringspunkterne kan vises — afhængig af maskinens indstilling — med ganske mange decimaler.

Vil du ændre antallet af decimaler, så placerer du markøren over tallet, du vil ændre, og trykker for at få flere decimaler med, for at få færre. Nedenfor ændres antallet af decimaler på y-koordinaten 3.1 (fra 3.1 til 3.12):



Når du er færdig, taster du enter. Lav tilsvarende ændringer for de øvrige koordinater, og flyt dem om nødvendigt, så det hele står pænt.

Skæringspunkterne symbolsk

Før du kan lave symbolske beregninger, skal du have føjet et Grafregner værksted til dit dokument:

Tip
ctrl I bringer dig direkte til værkstedslisten.

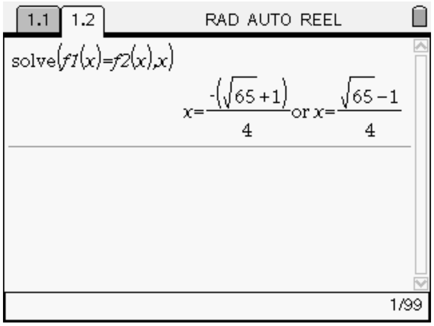
Tast , og vælg 1: Tilføj Grafregner.

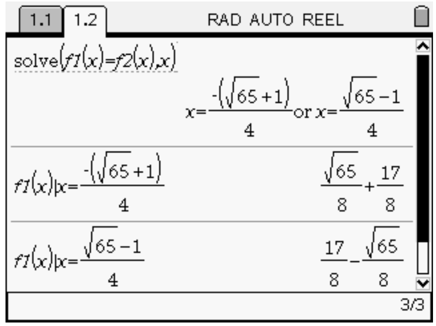
Læg mærke til, at der nu er to faner øverst på din skærm. Fane 1.1 er dit Grafer og Geometri værksted. Fane 1.2 er det Grafregner værksted, du lige har tilføjet.

Tip
Du skifter mellem værkstederne med og , der aktiveres som hhv. ctrl ◀ og ctrl ▶.

Idet de to funktioner er indtastet som hhv. *f1(x)* og *f2(x)* i Grafer og Geometri værkstedet, kan du bestemme skæringspunkterne symbolsk ved at indtaste *solve(f1(x)=f2(x),x)*. Dette giver dig de to skæringspunkters *x*-koordinater (venste skærmbillede på næste side).
De tilhørende *y*-koordinater kan du finde ved at indsætte *x*-koordinaterne i en af forskrifterne én ad gangen (højre skærmbillede på næste side).

Tip:
Placer markøren efter den løsning, du vil hente.
Tryk ⇧ ◀ flere gange for at markere løsningen, og tast enter.





Skriv *f1(x)*| i indtastningslinjen. Hent en af løsningerne i historikområdet. Et tryk på enter vil nu beregne y-værdien. Gentages historien med den anden løsning får du også det andet skæringspunkts y-koordinat (højre skærmbillede).

Ny opgave og flere grafværktøjer

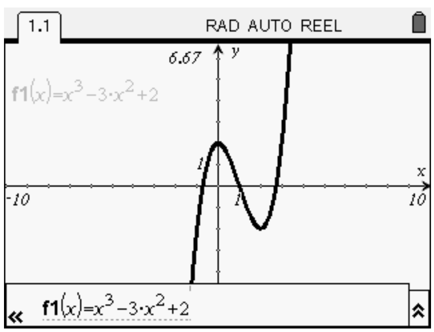
Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Bestem funktionsværdierne $p(3)$ og $p(7)$.

2) Bestem funktionens nulpunkter og lokale ekstremer.

Husk
Du opretter nemmest et nyt dokument ved at taste ctrl N, gemme det aktuelle dokument efter behov og derefter vælge det værksted, du vil starte i.

Opret et nyt dokument med et Grafer og Geometri værksted. Indskriv funktionen som *f1(x)* i indtastningsfeltet:

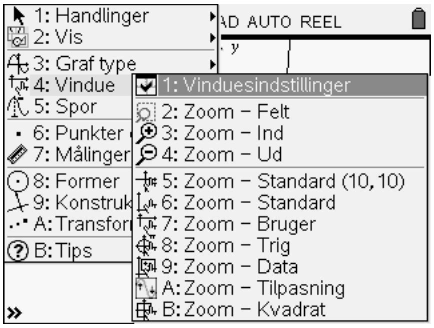


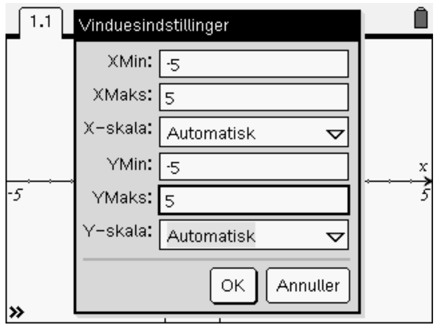
Manuel indstilling af grafvinduet

Du kan få en pænere graf ved at indskrænke vinduet. Her skal du benytte et vindue, hvor *x* løber fra -5 til 5, og *y* løber fra -5 til 5.

Tast (menu), og vælg her 4:Vindue ▸ 1:Dialogboks til akseindstillinger, og indstil vinduet som vist til højre

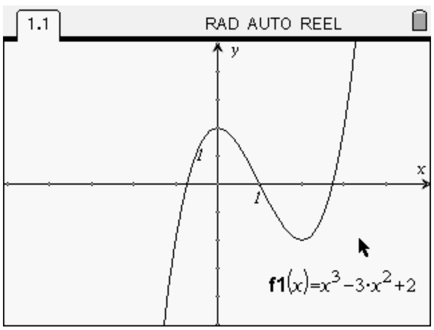
Obs
Du hopper fra felt til felt i dialogen vinduesindstillinger med (tab)-tasten.

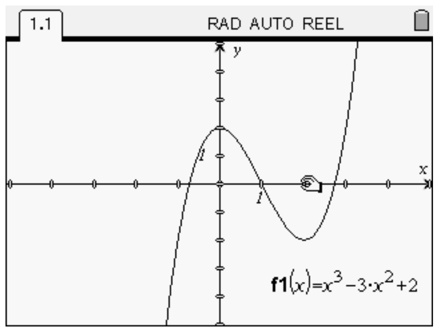




grafen ser herefter således ud:

Tip
Du kan styre skalaen ved at udfylde *x*-skala og *y*-skala i dialogen vinduesindstillinger. Sættes disse til 1, fås 1 som skala i stedet for 0.5
Du kan også ændre ved at dobbeltklikke på 0.5 og ændre til 1.





Der er en tredje mulighed for ændring af akseindstillinger:

Placer markøren ved en af aksemærkerne. Når markøren ændrer udseende til en åben hånd (højre skærmbillede ovenfor), holder du (klik) nede indtil hånden griber fat. Du kan nu ændre akseindstillingerne ved at trække aksemærket med ◂ og ▸.

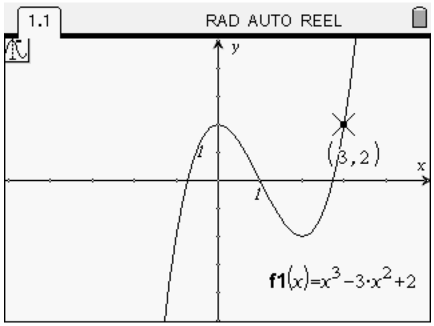
Obs
Når du indtaster *x*-koordinaten, placeres tallet et ret tilfældigt sted på skærmen. Det forsvinder igen når du taster (enter).

Tip
Du kan redigere et punkts koordinater (også *y*-koordinaten), og når du taster (enter), hopper punktet til de nye koordinater.

Tip
Du kan kan fortryde et valg med ↶ .

Funktionsværdier med Spor

Funktionsværdien i 3 kan dårligt aflæses på grafen (og i 7 slet ikke), men du kan jo altid forsøge dig med grafsporing via (menu) 5:Spor ▸ 1:Spor



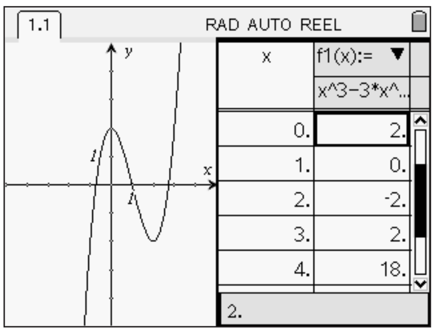
Med grafsporingsværktøjet aktiveret, indtaster du 3 efterfulgt af (enter), og straks står markøren i det punkt på grafen, der har *x*-værdien 3:

Prøv dernæst at indtaste 7 og se, hvad der sker.

Funktionsværdier med en tabel

Det er meget simpelt at få lavet en tabel (et sildeben) over funktioner.

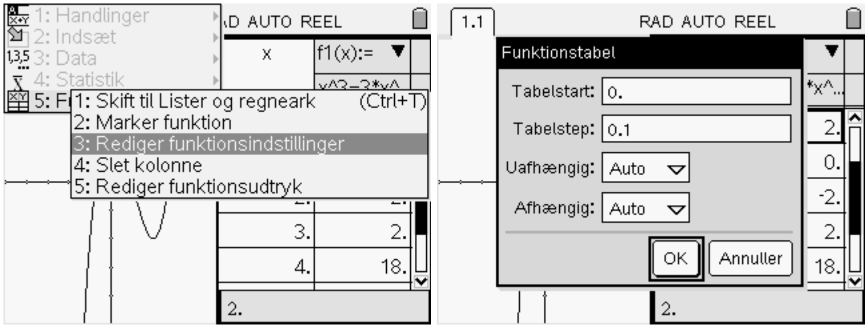
Tast (ctrl)(T), og du får skærmen opdelt i to ruder: En til funktionsgrafen, og en til tabellen. Bladrer du ned i tabellen kan du hurtigt se, at $p(3) = 7$ og at $p(7) = 198$.



Tip
Du skifter fokus med [icon], der aktiveres ved at taste ctrl tab.

På skæmbilledet ovenfor er der en tyk ramme om tabellen. Det betyder, at tabellen er i fokus. Hvis du fx trykker på menu, så er det menuen for tabellen, du får frem.
Hvis du vil have ændret indstillingerne i tabellen taster du menu, og i menuen vælger du 5: Funktionstabel ▸ 3: Rediger funktionsindstillinger. Indstiller du som vist på det højre skærmbillede, så vil du få en tabel med spring på 0.1

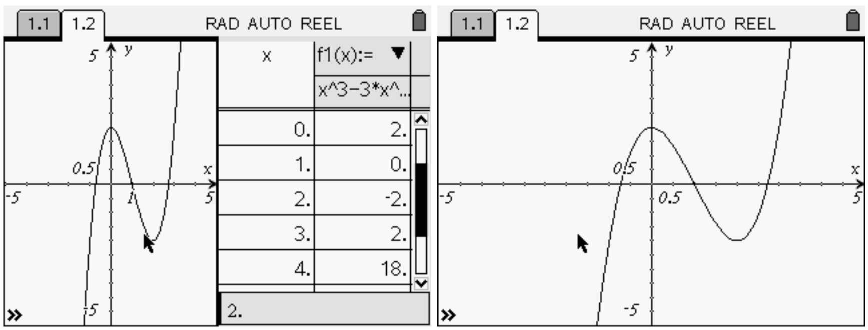
Husk
Du benytter tab - knappen til at hoppe mellem knapper og felter i dialogbokse



Tip
Hvis du vil af med tabellen, og ikke har lavet alt for mange indtastninger efter du satte tabellen ind, så kan du fjerne tabellen med ↶ (mindst 3 tryk).

Hvis du vil beholde grafen og tabellen som en del af dit arbejde, men kunne arbejde videre med grafen uden tabel, så kan du tage en kopi af Grafer og Geometri værkstedet, og sætte det ind i et nyt værksted. Metoden er denne:

Sørg for, at Grafer og Geometri værkstedet er i fokus (tyk ramme om grafen)



Tast ctrl K. Dette får den tykke ramme til at blinke, og du kan nu kopire din graf med ctrl C. Indsæt et nyt værksted med ctrl I, og fjern menuen med esc. Tilbage er blot at indsætte gafen med ctrl V.

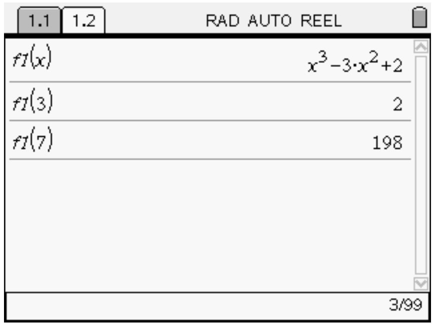
Funktionsværdier i Grafregner værkstedet

Tip
ctrl I bringer dig direkte til værkstedslisten.

Før du kan lave beregninger, skal du have føjet et Grafregner værksted til dit dokument.

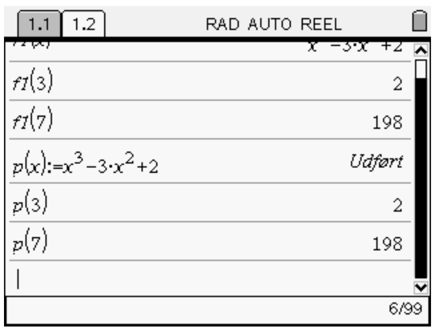
Den beregning, maskinen skal udføre, kan kort formuleres som $f1(3)$, idet du har givet funktionen p navnet $f1$ ved at indtaste forskriften for p som den første i graffeltet. Du kan overbevise dig om dette ved at skrive $f1(x)$:

Obs
Skriver du blot $f1$ og ikke $f1(x)$, får du fejlmeddelelsen "Argumentfejl". Du skal altså altid huske at have argumentet med.



Det ville være mere elegant, hvis man blot kunne skrive $p(3)$ og $p(7)$, da funktionens navn er p. Men det er der råd for:
Du kan definere funktionen p direkte ved at skrive: $p(x) := x^3 - 3x^2 + 2$. Herefter giver det mening at udregne $p(3)$ og $p(7)$:

Tip
Hvis du vil have tegnet grafen for p, kan du blot skrive navnet *p(x)* ind i graffeltet. Naturligvis får p så også navnet $f1$ (hvis det er den første).



Alternativt kan du definere funktioner ved at skrive $x^3 - 3x^2 + 2 \rightarrow p(x)$, hvor pilen laves med sto→ var -knappen.

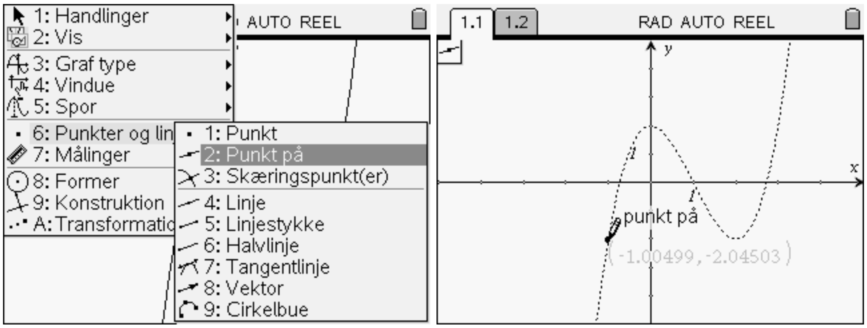
Nulpunktsbestemmelse

Husk
Du skifter mellem værkstederne med og .

Tip
Nulpunktsbestemmelsen kan også foretages med Sporingsværktøjet, der også viser interessepunkter.

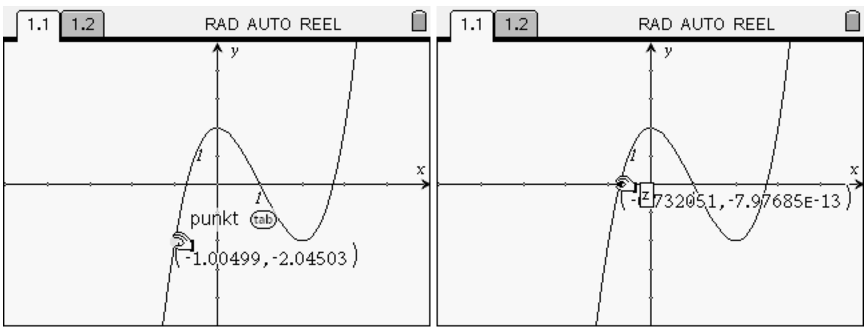
Du skal nu bestemme det nulpunkt for *p*, der ligger i intervallet [–1,0]. Hvis du ikke allerede har grafen på din skærm, så skift til Grafer og Geometri værkstedet.

Afsæt et punkt på grafen med **Punkt på** værktøjet. Du får adgang til værktøjet via menu 6:Punkter og linjer ▸ 2:Punkt på.



Obs
Flyt markøren hen i nærheden af punktet til en åben hånd kommer frem. Hold klik-knappen nede indtil en gribende hånd vises.

Flyt markøren hen til grafen. Når markøren ændrer udseende til en blyant, klikker du på , og et punkt placeres på grafen. Forlad **Punkt på** værktøjet ved at trykke på esc. Markøren ændres så til en åben hånd (venstre skærmbillede nedenfor)
Grib punktet, og flyt det hen til skæringen med *x*-aksen. Der dukker da en label op *z*, der viser, at der er fanget et nulpunkt.



Tryk enter, og juster antallet af decimaler. Nulpunktet aflæses til – 0.732051. Tilsvarende bestemmes de andre nulpunkter.

Nulpunktsbestemmelse symbolsk

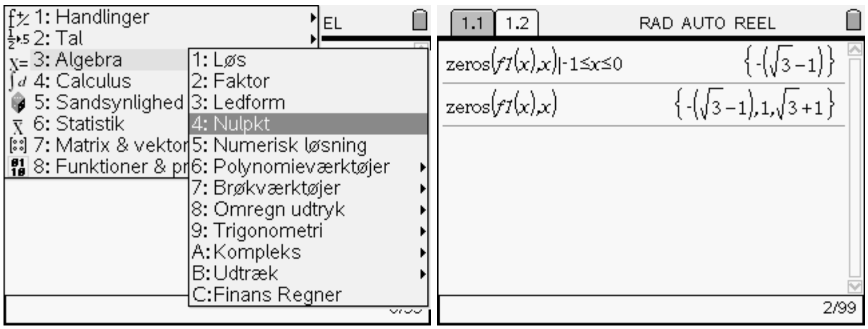
Du kan naturligvis også foretage en symbolsk bestemmelse af det nulpunkt for *p*, der ligger i intervallet [–1,0]. Hertil skal du bruge (menu) 3:Algebra ▸ 4:Nulpkt

Den færdige indtastningslinje skal se således ud:

zeros(p(x),x)| -1≤ x≤ 0

Hvis du vil finde alle nulpunkter, så dropper du blot betingelsen | -1≤ x≤ 0. Læg mærke til, at i begge tilfælde får du resultatet som *lister* — dvs. med krøllede parenteser omkring:

Tip
Du laver nemmest tegnene ≤ og ≥ ved at taste (ctrl)(<) eller (ctrl)(>) hhv.



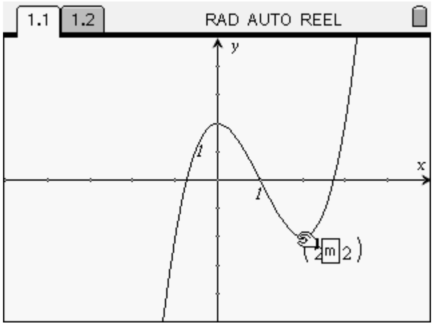
Denne opgave kan naturligvis også løses med med solve. Den eneste forskel er den måde, hvorpå TI-Nspire CAS returnerer løsningen.

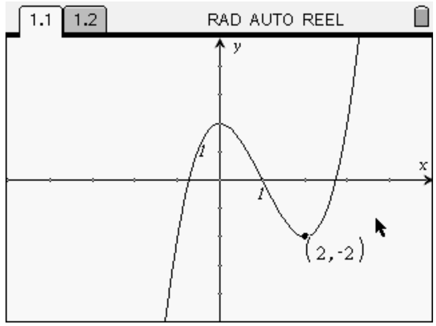
Minimum & Maximum

Du skal nu finde det lokale minimum, funktionen har i nærheden af 2. Metoden er i det væsentlige den samme som ved nulpunktsbestemmelse:

Tip
Bestemmelse af minimum og maksimum kan også foretages med Sporingsværktøjet.

Først afsættes et frit punkt på grafen. Dernæst gribes punktet og trækkes hen til det ønskede ekstremumspunkt. Der kommer da en lille label frem, der signalerer, at her er et minimums- eller et maksimumspunkt. Tryk (enter), og juster evt. antallet af decimaler. Det ses, at minimumsstedet ligger i 2:





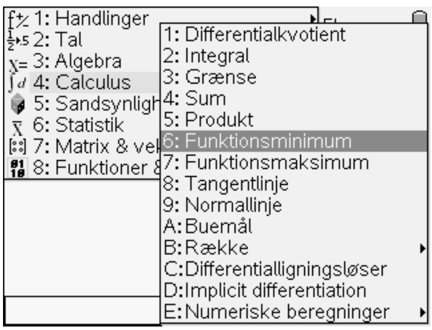
Helt tilsvarende bestemmer du det lokale maksimum, funktionen har i nærheden af 0.

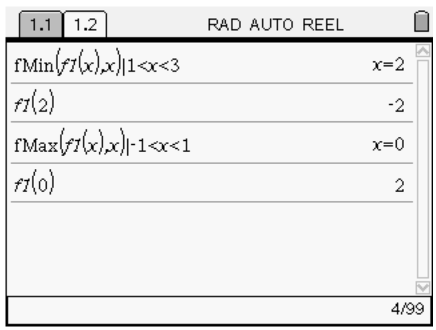
Minimum & Maximum symbolsk

Du kan lave en eksakt bestemmelse af minimum og maksimum i Grafegner værkstedet. Hertil skal du benytte kommandoerne *fMin* og *fMax*, som du finder i 4: Calculus-menuen under 6: Funktionsminimum og 7: Funktionsmaksimum.

For at bestemme det minimum, der ligger i intervallet]1,3[, indtastes derfor kommandoen:

$$fMin(p(x),x)|1<x<3$$





Funktion givet ved en tuborg-forskrift

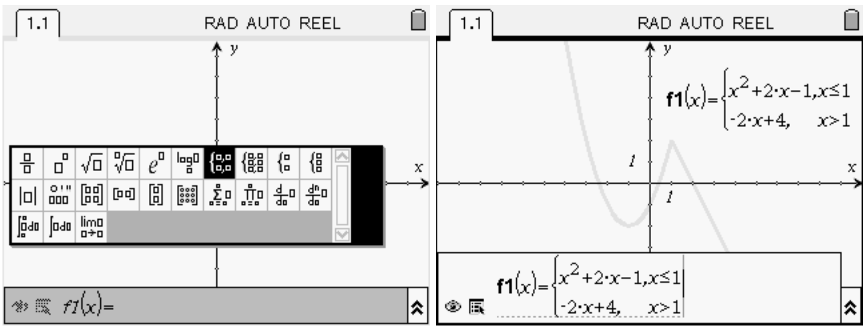
Tegn grafen for funktionen

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & for \quad x\le 1 \\ -2x+4 & for \quad x>1 \end{cases}$$

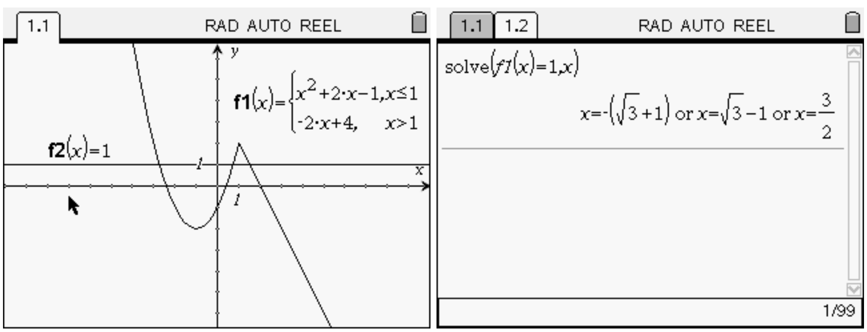
og løs ligningen $f(x)=1$

Gå til graffeltet i Grafer og Geometri værkstedet, og skriv forskriften ind i *f1*, idet du bruger skabelonen for tuborg-forskrifter (fås frem med):

Tip
Du laver nemmest tegnene ≤ og ≥ ved at taste ctrl < eller ctrl > hhv.



Ligningen løses let vha. grafværktøjerne, når først *f*2(*x*)=1 er indtastet. Ligningen kan selvfølgelig også løses symbolsk:

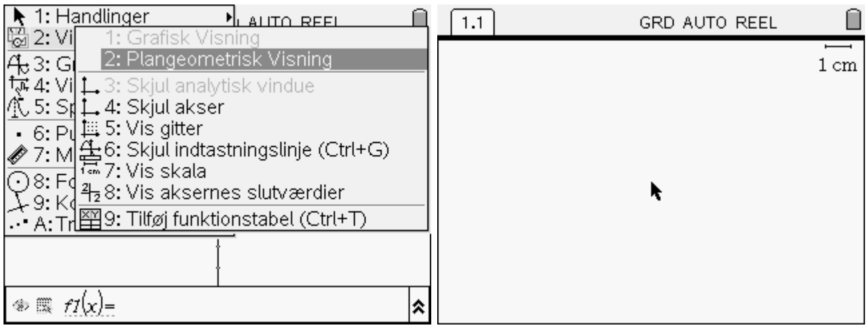


Geometriske konstruktioner

Indtil nu har du stort set kun tegnet og undersøgt funktionsgrafer i Grafer og geometri værkstedet, men, som du skal se her, og i de kommende afsnit, så kan du også lave en lang række geometriske konstruktioner her. Konstruktionerne kan laves med eller uden et underliggende koordinatsystem.

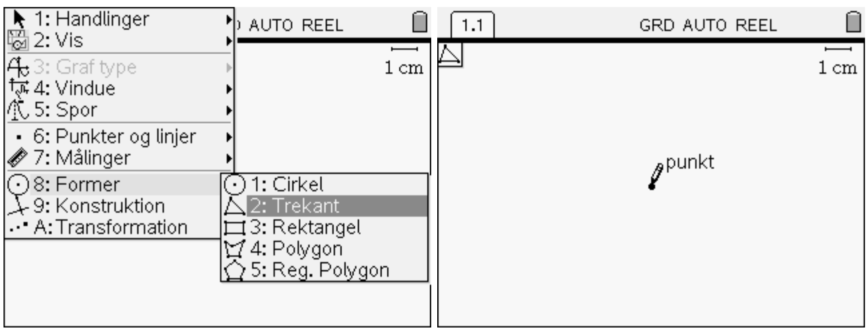
For at se, hvordan dette virker, skal du nu konstruere midtnormalerne i en trekant, fastlægge midtnormalernes skæringspunkt og benytte dette punkt til at konstruere trekantens omskrevne cirkel. Konstruktionen foregår i plangeometrisk visning — dvs. uden koordinatsystem.

Tryk (menu) 2:Vis ▸ 2:Plangeometrisk Visning. Skærmen vil da skifte til en blank skærm — dog med angivelse af en enhed i øverste højre hjørne. Denne er som standard 1 cm.

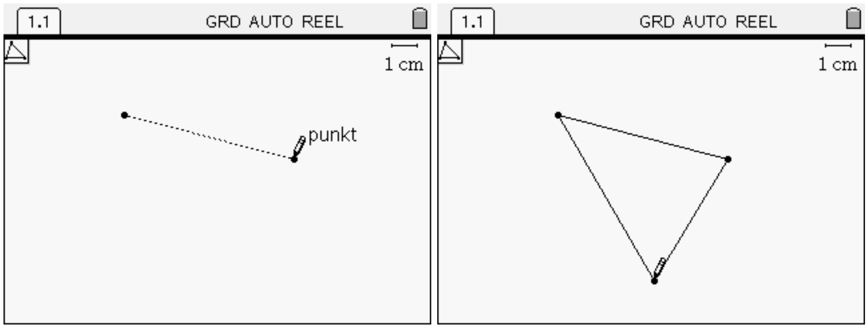


Tryk (menu) 8:Former ▸ 2:Trekant. Markøren ændres til en blyant med et blinkende punkt.

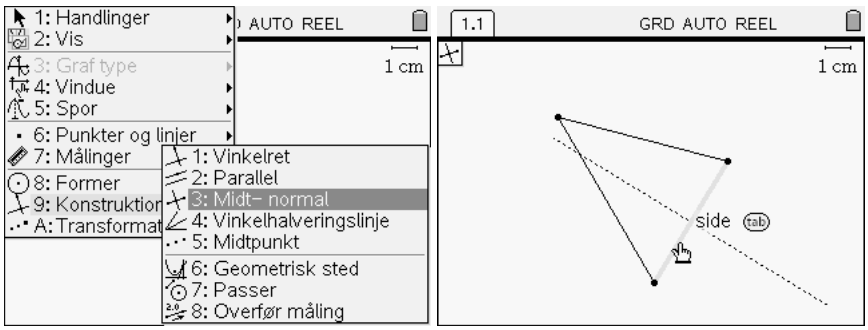
Obs
Ikonen i øverste venstre hjørne viser, at trekantsværktøjet er det aktuelle værktøj. Værktøjet forlades når et nyt vælges, eller når du taster (esc).



For at tegne en trekant, skal du afsætte tre punkter i geometriske plan. Pil hen, hvor du vil afsætte det første punkt, og tryk på . Når du flytter blyanten hen til det næste punkt, vil du se en stiplet linje mellem det afsatte punkt og det nye. Når du er nået til den ønskede placering, trykker du på . Det sidste punkt afsætter du på samme måde:



Så skal midtnormalerne konstrueres: Tryk menu 9:Konstruktion ▸ 3:Midtnormal. Til afsættelse af en midtnormal behøver du kun at udpege en af trekantens sider. Så snart markøren rammer en af siderne, ændres markøren til en pegende hånd, og midtnormalen vises som en stiplet linje:



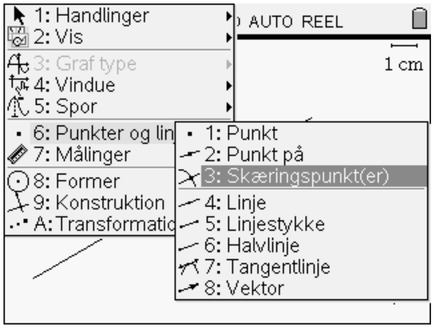
Obs
Etiketten *side* viser, at det er en side i trekanten, du peger på.
Ved mere komplicerede konstruktioner kan det være svært at udpege det ønskede objekt. Med tab kan du skifte mellem objekterne.

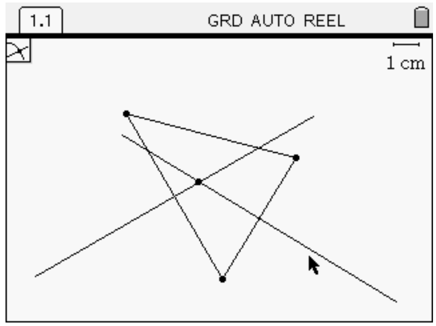
Tryk på for at fæstne midtnormalen. Værktøjet til konstruktion af midtnormal forbliver aktivt indtil du vælger et nyt værktøj (eller taster esc). Så for at konstruere mindtnormlen på en af de andre sider behøver du blot at udpege den ønskede side i trekanten, og trykke på .

Nu skal skæringspunktet mellem de to midtnormaler konstrueres:

Tryk menu 6:Punkter og linjer ▸ 3:Skæringspunkt(er) for at skifte værktøj. Vælg de to linjer (dvs. midtnormalerne) én efter én, og skæringspunktet fastlægges.

Obs
Når en linje udpeges bliver linjen tyk og blinkende. Når du vælger linjen (ved at trykke), så bliver linjen tynd og blinkende.

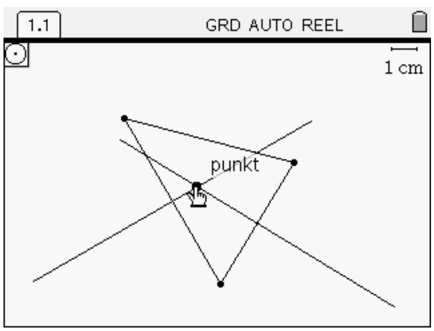


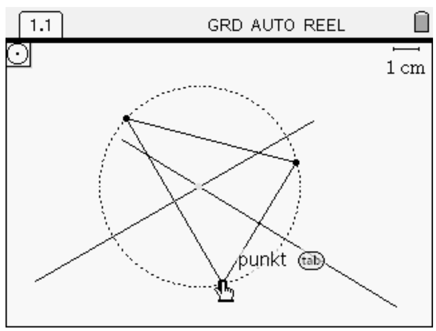


Med udgangspunkt i dette skæringspunkt skal du nu konstruere en cirkel med centrum i dette punkt og radius fastlagt som afstanden fra centrum til en af vinkelspidserne.
Vælg cirkelværktøjet med menu 8:Former ▸ 1:Cirkel

Først fører du markøren hen til midtnormalernes skæringspunkt — skæringspunktet skal blinke og etiketten *punkt* skal ses (venstre skærmbillede). Tryk på for at fastlægge centrum.

Flyt nu markøren til en af vinkelspidserne — igen skal punktet blinke og etiketten *punkt* skal ses (højre skærmbillede). En stiplet cirkel antyder, hvordan resultatet kommer til at se ud. Tryk på for at fastlægge radius.

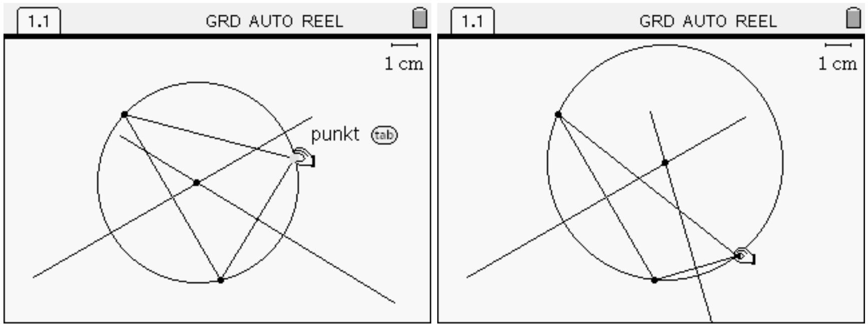




For denne trekant ser det ud til, at den cirkel, du har tegnet, går gennem alle vinkelspidser. For visuelt at checke, om dette er tilfældet for andre trekanter, kan du med TI-Nspire CAS dynamisk ændre trekanten, så hele konstruktionen opdateres:

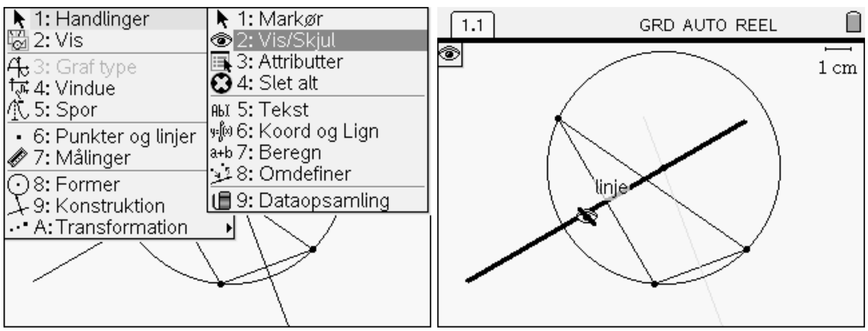
Forlad cirkelværktøjet ved at taste esc. Før markøren hen til en af vinkelspidserne, og sørg for, at markøren er en åben hånd og etiketten *punkt* vises.
Grib punktet, og træk det til en anden placering. Læg mærke til, at figuren opdateres løbende under deformationen.

Husk
at du griber ved at holde nede et øjeblik (det er ikke nok blot at klikke) indtil hånden bliver til en gribende hånd



Du kan bygge videre på konstruktionen ved fx at konstruere trekantens indskrevne cirkel. Inden du går i gang med dette, er det en god ide at skjule midtnormalerne, der jo kun tjener som konstruktionslinjer. Det gør du således:

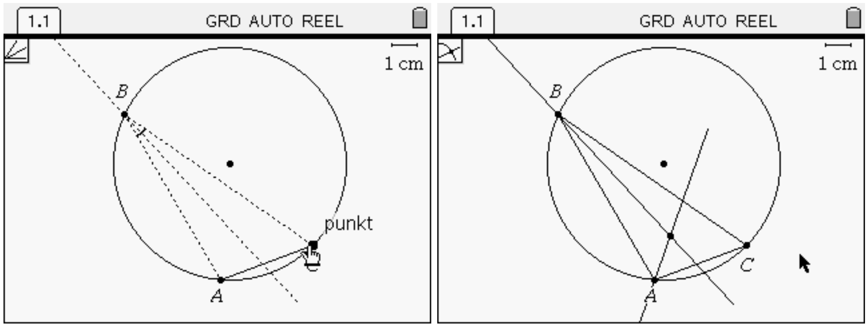
Tryk menu 1:Handlinger ▸ 3:Vis/Skjul. Flyt markøren hen på en af midtnormalerne, så markøren ændres til et 'overstreget øje' og tryk på . Herved bliver midtnormalen næsten usynlig. Gør det samme med den anden midtnormal. Når du forlader Vis/Skjul-værktøjet (tast esc), så er midtnormalerne usynlige.



Centrum for den indskrevne cirkel konstrueres som vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Værktøjet finder du her: (menu) 9:Konstruktion ▸ 4:Vinkelhalveringslinje.

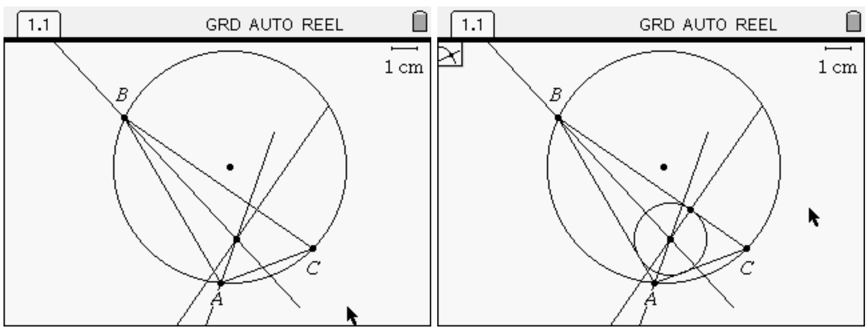
I nedenstående skærmbillede er vinkelspidserne navngivet for at lette beskrivelsen af, hvordan udpegning af en vinkel foregår: Hvis du vil tegne vinkelhalveringslinjen fra $\angle B$, så udpeger du vinklen ved at udpege punkterne A, B, C i denne rækkefølge (eller C, B, A).

Husk
at når du udpeger et punkt, så skal markøren være en pegende hånd og etiketten *punkt* skal vises.



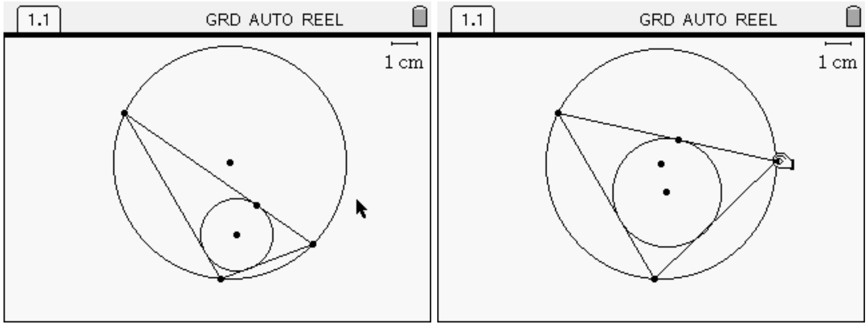
Det højre skærmbillede viser to vinkelhalveringslinjer med skæringspunktet konstrueret (se side 33). Tilbage er blot at bestemme et punkt på periferien af den indskrevne cirkel. Da trekantens sider er tangenter til den indskrevne cirkel, kan du konstruere tangeringspunktet ved at konstruere en linje gennem centrum og vinkelret på en af siderne:

Vælg (menu) 9:Konstruktion ▸ 1:Vinkelret, og udpeg en af siderne og centrum:



På det højre skærmbillede er skæringspunktet mellem den konstruerede linje og siden BC konstrueret.

Skjul alle konstruktionslinjer, og konstruer den indskrevne cirkel ved at bruge cirkelværktøjet og udpege centrum og tangeringspunkt:



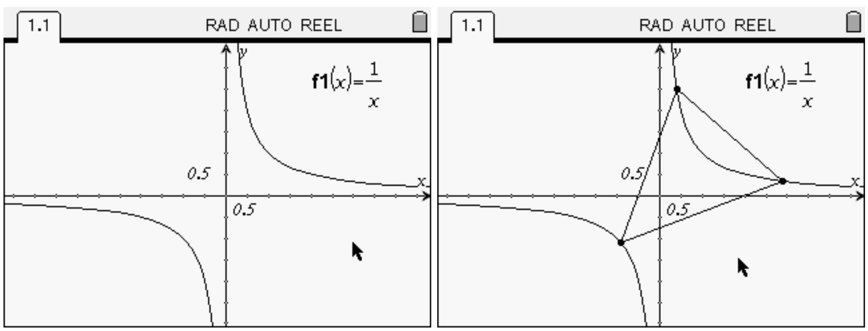
Grib fat i en af trekantens vinkelspidser og deformer figuren. Check, at alt virker som det skal.

Geometri i grafisk visning

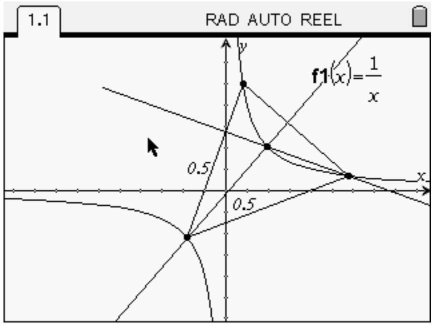
1. Tegn grafen for $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. Vælg 3 punkter på denne graf og konstruer en trekant ud fra disse.
3. Konstruer højdernes skæringspunkt i trekanten.
4. Fremsæt en påstand om højdernes skæringspunkt

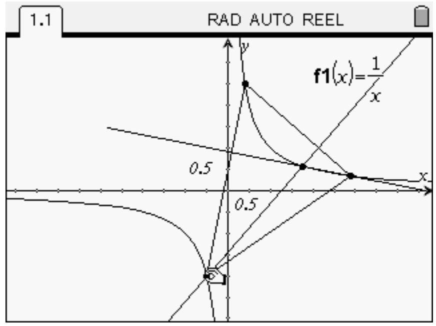
Nedenfor ser du grafen *f* tegnet (der er zoomet ind en gang) og trekanten konstrueret:

Tip
Benyt *Punkt på* værktøjet til at konstruere punkterne. Benyt *Trekant* værktøjet til at konstruere trekanten. Skjul koordinaterne.



Konstruer to højder med *Vinkelret* værktøjet, og konstruer de to højders skæringspunkt:





Træk nu i et punkt, og følg nøje med i, hvad der sker. Inden du fremsætter din påstand, skal du også undersøge, hvad der sker, hvis de 3 punkter ligger på samme gren af hyperblen.

Konstruktion af målfast figur

I trekant ABC er $\angle A = 35^\circ$, $b = 5$ cm og $a = 6$ cm.

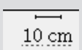
1. Tegn en model af trekanten

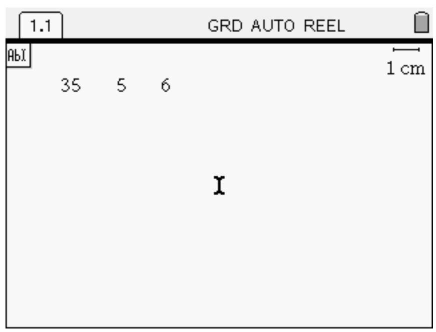
2. Bestem de ukendte sider og vinkler samt trekantens areal.

Opret et nyt Grafer og Geometri værksted, og vælg Plangeometrisk visning. Start med at skrive de givne værdier ind:

Tryk (menu) 1:Handlinger ▸ 6:Tekst. Klik et passende sted, indskriv tallet 35 og afslut med (enter). Indskriv tallene 5 og 6 tilsvarende i hvert sit tekstområde

Tip
Hvis sidelængderne i stedet er fx 50 cm og 60 cm behøver du ikke at skalere tallene for at få figuren til at være på skærmen.
Klik på enheden og ret denne til 10 cm.

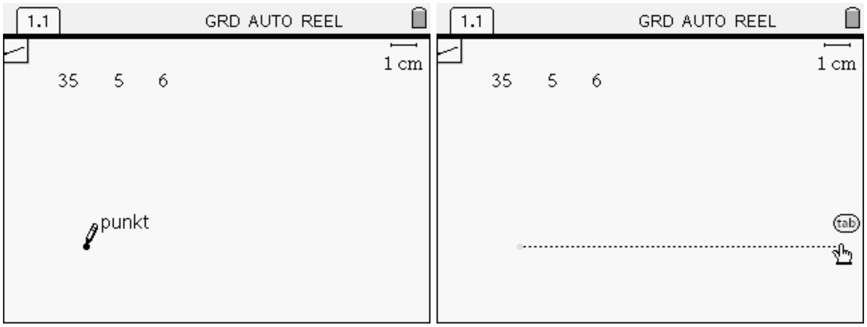




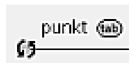
Først skal du konstruere $\angle A$. Hertil skal du bruge en halvlinje:

Tryk menu 6:Punkter og linjer ▸ 6:Halvlinje, og afsæt to punkter. Så vil du få en halvlinje med start i det første punkt

Obs
Indstillingen, der kan ses øverst på skærmen, er **ikke** gældende for Grafer og Geometri værkstedet.
Du indstiller til grader i
8: Systeminfo ▸
3: Indstillinger i Grafer og Geometri, og her skal du sørge for, at Geometrisk vinkel er indstillet til grader.

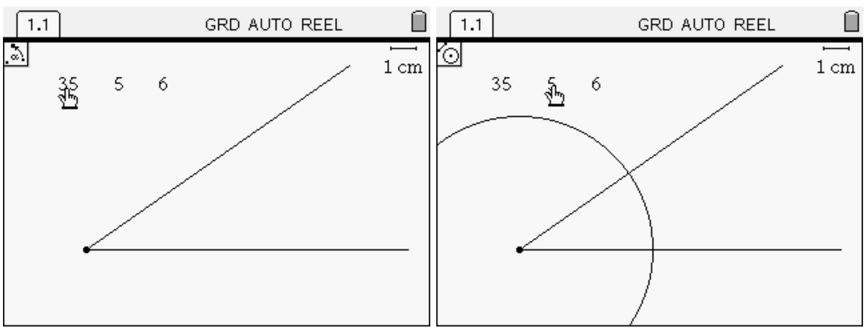


Denne halvlinje skal nu roteres 35º. Vælg hertil værktøjet menu A:Transformation ▸ 4:Rotation. Til en rotation skal du udpege tre ting:

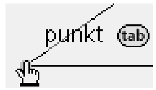
1. *Rotationspunktet* — her udpeger du halvlinjens startpunkt 

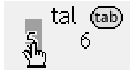
2 *Objektet, der skal returneres* — udpeg halvlinjen 

3. Rotationsvinklen — udpeg teksten 35 (venstre skærmbillede) 



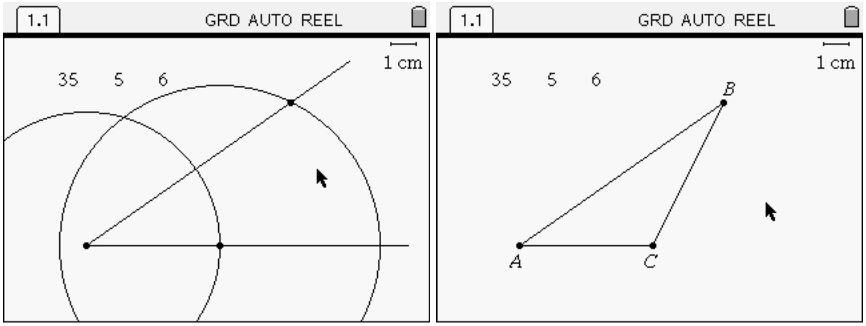
På det højre skærmbillede ser du cirkel tegnet med centrum i halvlinjens startpunkt og radius 5. Denne laver du med værktøjet menu 9:Konstruktion ▸ 7:Passer:

1. *Centrum* — her udpeger du halvlinjens startpunkt 

2 *radius* — udpeg teksten 

Husk
Du konstruerer skæringspunkter med menu 6:Punkter og linjer ▸ 3:Skærings-punkt(er)

Desuden skal du konstruere skæringspunktet (B) mellem cirklen og den vandrette halvlinje. Konstruer tilsvarende med passer-værktøjet en cirkel med centrum i B og radius 6. Konstruer også her skæringspunktet med det venstre vinkelben:



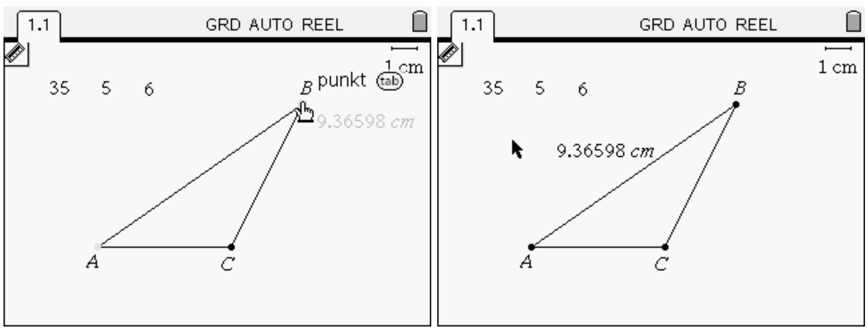
Obs
Det er vigtigt, at du konstruerer en trekant, og ikke blot forbinder med linjestykker.

Tip
Du kan også navngive ved at vælge **Etiket** fra kontekstmenuen

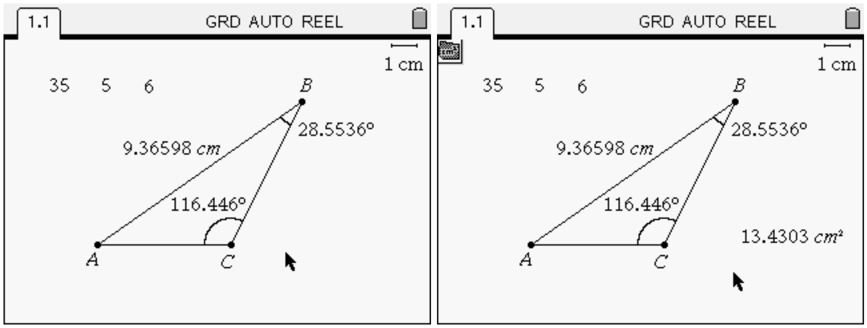
På det højre skærmbillede er der konstrueret en trekant ud fra de tre konstruerede punkter. Desuden er alle konstruktionslinjer skjult og vinkelspidserne er navngivet ved brug af tekstværktøjet.

Nu er alt klar til at foretage målinger på modellen. Værktøjet, du skal bruge, finder du her: menu 7:Målinger ▸ 1:Længde:
Klik først i punktet A, og dernæst i punktet B. Så vises længden af siden AB vises ganske svagt. Flyt markøren hen, hvor du ønsker, at længden skal stå. Klik for at placere:

Obs
Hvis du klikker på en af trekantens sider, så får du vist omkredsen af trekanten, og ikke sidelængden.



Med vinkel-værktøjet måler du $\angle B$ og $\angle C$. Her skal du udpege vinklen ved at udpege tre punkter med den aktuelle vinkelspids som den midterste. Arealet bestemmes ved at udpege trekanten (ét klik):

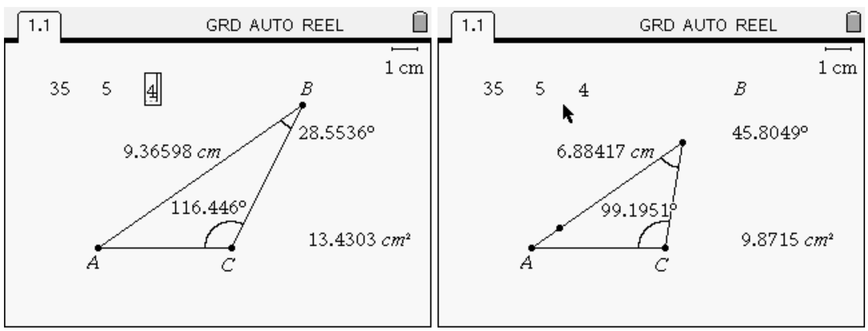


Obs
Pas på, at du ikke kommer til at slette tekstfeltet. Skulle det ske, så kan du redde det med ↶.

I denne model kan du ikke gribe fat i et hjørne og trække, men du kan ændre i tallene 35, 5 og 6, som konstruktionen er baseret på. Du klikke blot på et af tallene og indtaste en ny værdi. Herefter vil modellen omgående blive gentegnet, og de nye værdier vil blive vist.

Særlig interessant er det i ovenstående model at ændre *a* til fx 4. Dette er gjort på skærmbillederne nedenfor:

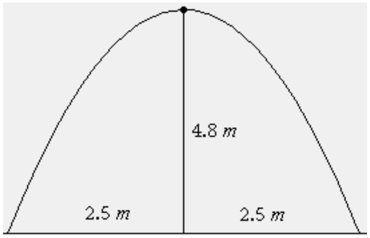
Tip
Du kan gemme en måling i en variabel: Sæt markøren på målingen og tryk . Vælg 5:Lagre i kontekstmenuen, og indtast et navn. (Se side 70).



Læg mærke til, der dukkede et nyt punkt på siden AB. Her er der altså to mulige konstruktioner. For at forstå, hvad der sker, er det en god ide at vise konstruktionscirklen med centrum i *C*.

Porten i parablen

Figuren viser gavlen på en parabelformet hal

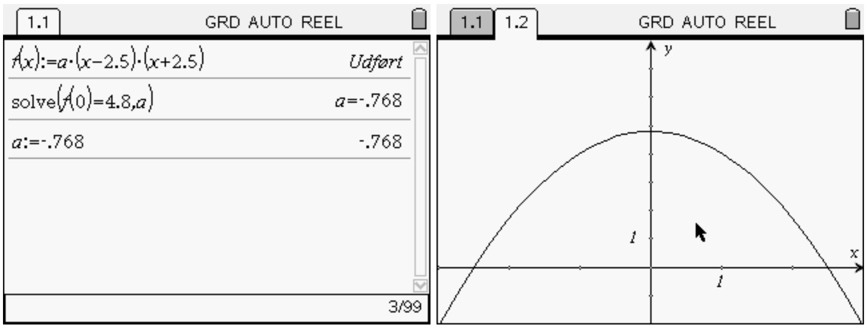


a. Indlæg et passende koordinatsystem, og angiv en forskrift for parablen

I gavlen skal indsættes en rektangulær port

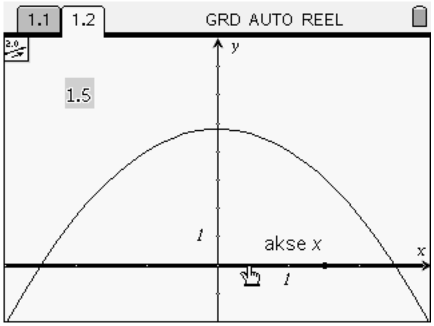
b. Bestem den højest mulige port, der kan indsættes, når bredden af porten skal være 3 m, og bestem den port, der har det størst mulige areal.

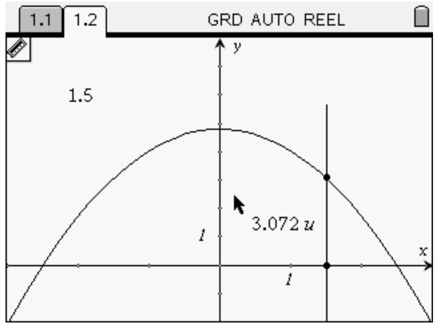
Indlæg koordinatsystemet, så parablen skærer akserne i $(-2.5\,,0), (2.5\,,0)$ og $(0\,,4.8)$. Forskriften beregnes i et Grafregner værksted og parablen tegnes i et Grafer og Geometri værksted:



Lav en port med bredden 3 m således:

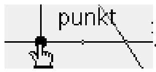
Indtast tallet 1.5 i et frit område i grafvinduet. Tryk (menu) 9:Konstruktion ▸ 8:Overfør måling. Udpeg tallet 1.5 og udpeg *x*-aksen for at overføre målet hertil.

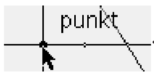




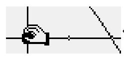
I det højre skærmbillede er konstrueret en linje vinkelret på *x*-aksen i det nye punkt, og linjens skæringspunkt med parablen er konstrueret. Tilbage er blot at måle afstanden mellem de to punkter. Hertil benytter du måleværktøjet, og udpeger de to punkter.

Til den anden del af opgaven skal du konstruere en port på et *frit punkt* på *x*-aksen. Ovenstående konstruktion kan ikke umiddelbart genbruges, da punktet på *x*-aksen er låst, men med værktøjet menu 1:Handlinger ▸ 9:Omdefiner, kan du frigøre punktet:

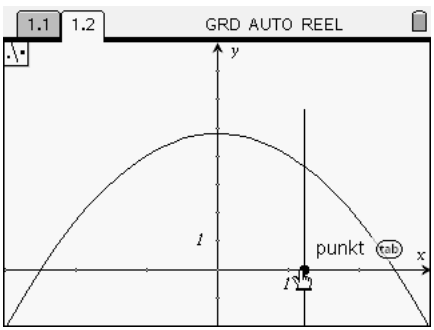
1. Udpeg det punkt, du vil omdefinere: 

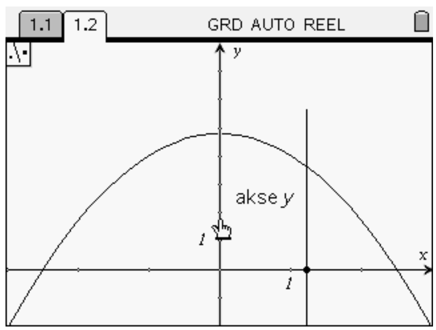
. Når du klikker ændres markøren til en pil 

.
2. Flyt pilen en anelse ved at trykke på ▸. Markøren ændres da til 

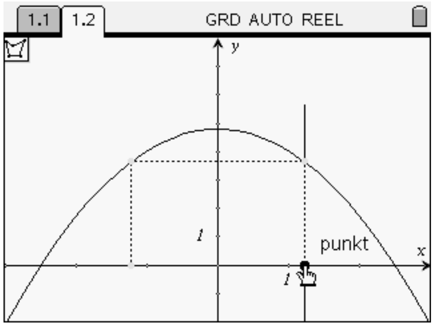
. Afslut med at klikke med . Check, at du kan gribe punktet .

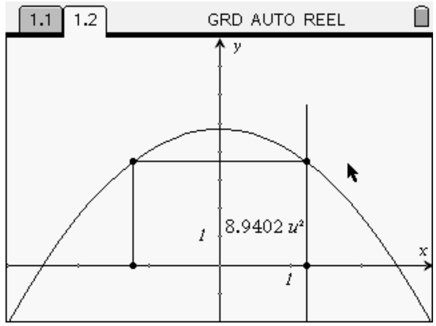
Så skal konstruktionspunkterne spejles i *y*-aksen. Benyt værktøjet menu A:Transformation ▸ 2:Reflektion. Udpeg først det punkt, du vil spejle, dernæst spejlingsaksen (her y-aksen):



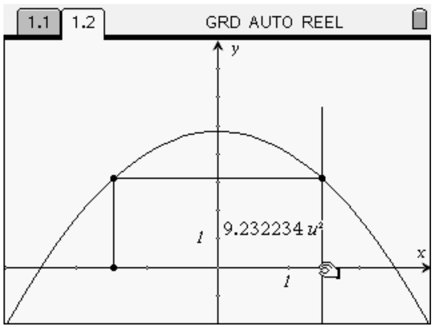


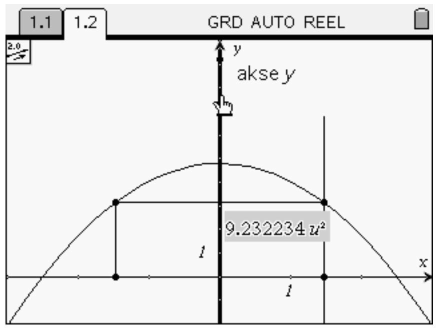
Benyt værktøjet (menu) 8:Former ▸ 4:Polygon til at konstruere porten. Du udpeger de 4 punkter ét efter ét, og trykker (enter) i det sidste punkt for at afslutte. Mål arealet:





Skjul konstruktionslinjen. Grib derefter det frie punkt på x-aksen, og flyt lidt frem og tilbage indtil du finder det største areal.



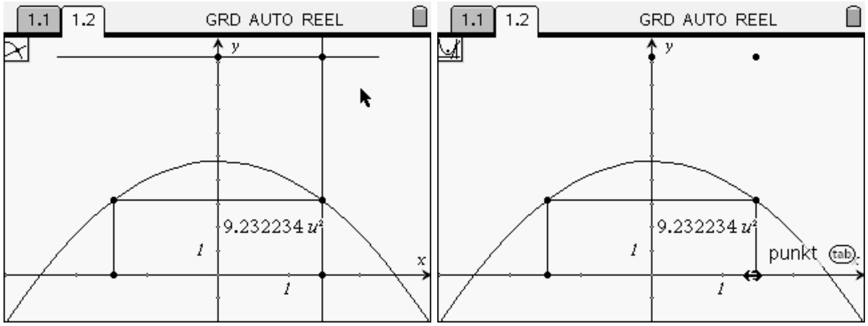


En elegant metode til at finde det maksimale areal er at lave et såkaldt geometrisk spor. Hertil skal du først konstruere et punkt , hvor y er arealet svarende til (den halve) portbredde x :

1. Overfør areal-tallet til y-aksen (højre skærmbillede ovenfor). Du skal sikkert regulere din y-akse først, så du kan se punktet — YMaks skal mindst være 10.

2. Konstruer dernæst en linje vinkelret på x-aksen gennem x-punktet, og en linje vinkelret på y-aksen gennem det konstruerede punkt.

3. Konstruer skæringspunktet for de to linjer.

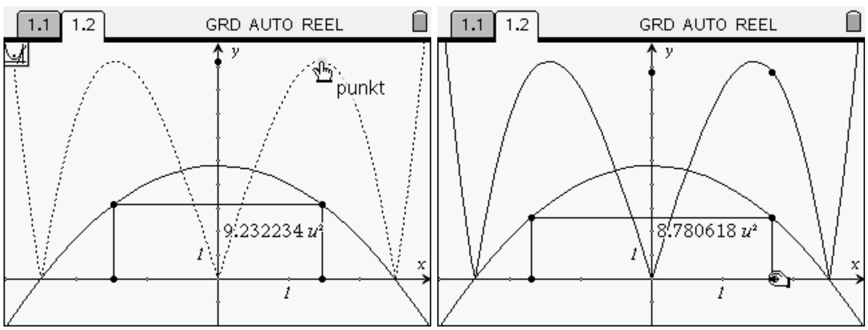


4. Skjul de to konstruktionslinjer, og vælg værktøjet (menu) 9:Konstruktion ▸ 6:Geometrisk sted.

   Udpeg det frie punkt på x-aksen. Se det højre skærmbillede ovenfor. Pilen viser, i hvilke retninger punktet kan bevæges.

   Udpeg herefter det konstruerede punkt — og straks ser du det geometriske spor i stiplet form. Når du klikker, får du et fuldt optegenet spor.

Træk i det frie punkt igen, og følg med i, hvad der sker på sporet. Træk også punktet uden for intervallet $[\,0\,,\,2.5\,]$, så får du en forklaring på, hvorfor sporet ser ud, som det gør.



Du skal være opmærksom på, at det er et tilnærmet resultat, du har fundet her. Arealet af porten kan udtrykkes ved funktionen $g(x) = 2 \cdot x \cdot f(x), \quad 0 \le x \le 2.5$. Maksimum for denne funktion er 9.2376, hvilket du nemt kan bestemme i et Grafregner værksted.

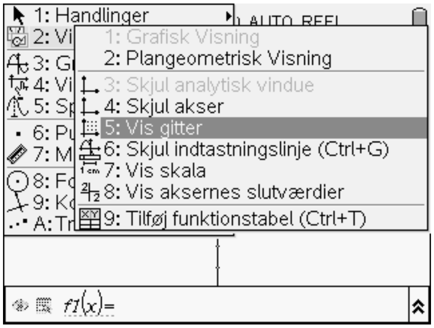
Analytisk geometri

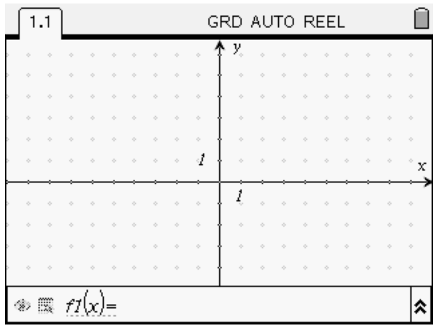
I den analytiske geometri har du de geometriske objekter beskrevet ved hjælp af punkter. Fx er en linje beskrevet fuldstændig ved to punkter på linjen.

Find ligningen for linjen gennem punkterne $(-6,4)$ og $(5,-4.5)$.

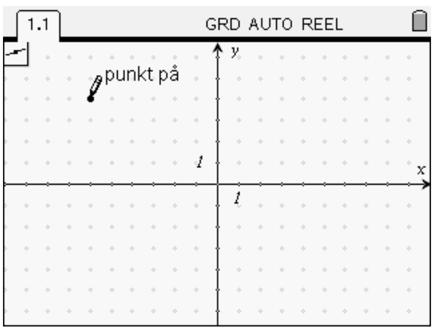
Åbn et nyt Grafer og geometri værksted, og indsæt et gitter med (menu) 2:Vis ▸ 5:Vis gitter:

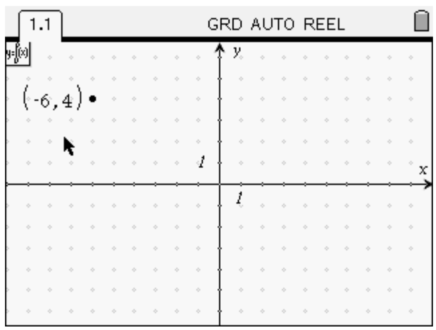
Obs
Bemærk, at med de indstillinger, standardvinduet har, er gitterkoordinaterne multipla af 2.





Du afsætter i gitteret ved at vælge (menu) 6:Punkter og linjer ▸ 1:Punkt, og placere markøren på gitterpunktet. Tryk ikke på (klik) før teksten *punkt på* vises:

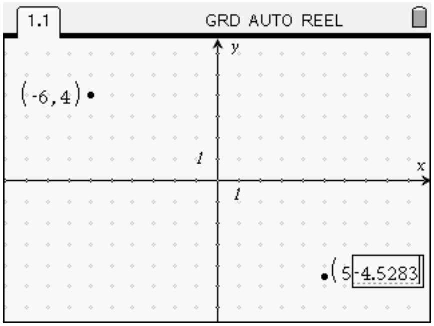


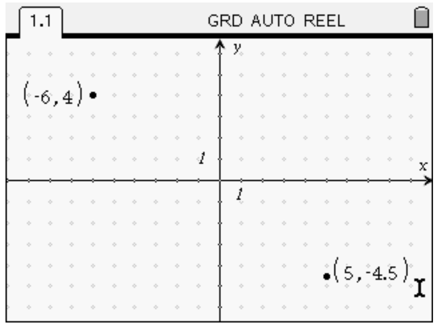


Du kan få vist punktets koordinater med værktøjet (menu) 1:Handlinger ▸ 7:Koord og Lign. Flyt markøren hen til punktet. Når finger-ikonet vises, vises samtidig koordinaterne nedtonet. Klik med , for at vælge punktet, og pil derhen, hvor du vil have koordinaterne placeret. Afslut med .

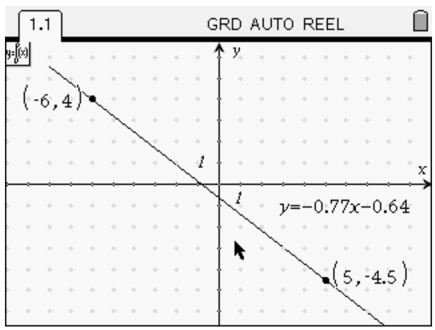
Du kan ikke afsætte fx punktet $(5, -4.5)$ i dette gitter. Afsæt derfor punktet så nogenlunde, men pas på, at du ikke afsætter i et gitterpunkt — dette vil nemlig låse punktet. Vis punktets koordinater, og ret dem til $(5, -4.5)$

Obs
Du ændrer et koordinatsæt ved at flytte markøren til koordinatsættet, og dobbeltklikke med på koordinaterne én efter én.





Tegn en linje gennem punkterne $(-6, 4)$ og $(5, -4.5)$ med linjeværktøjet menu 6:Punkter og linjer ▶ 4:Linje. Du kan få vist linjens ligning med værktøjet menu 1:Handlinger ▶ 7:Koord og Lign.

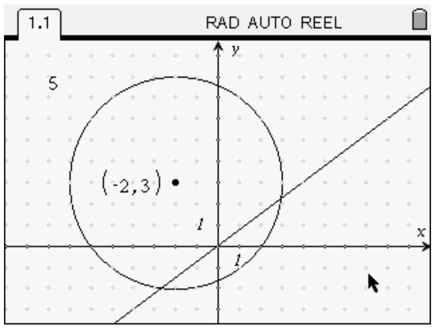


Du kan naturligvis også arbejde uden gitteret, og det er at foretrække, hvis punkterne ikke er pæne. Her afsætter du blot punkterne nogenlunde som de skal ligge, viser koordinaterne og retter disse til.

Skyderobjekter

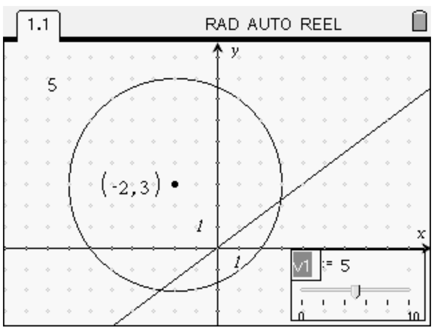
En cirkel har centrum i $(-2,3)$ og radius $r = 5$. Find ligningen for de to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen $y = \frac{3}{4}x$.

Åbn et nyt Grafer og geometri værksted, og indsæt et gitter med menu 2:Vis ▸ 5:Vis gitter. Afsæt punktet $(-2,3)$ i gitteret, og indtast tallet 5 som tekst. Benyt cirkel værktøjet til at tegne cirklen ved at udpege centrum og radius. Tegn linjen som funktionen $f1(x) = \frac{3}{4}x$. Indstil vinduet passende:



Vælg nu menu 1:Handlinger ▸ A:Skyderobjekt. Et skyderobjekt kommer da til syne på skærmen med et variabelnavn markeret. Ret dette variabelnavn til *k*.

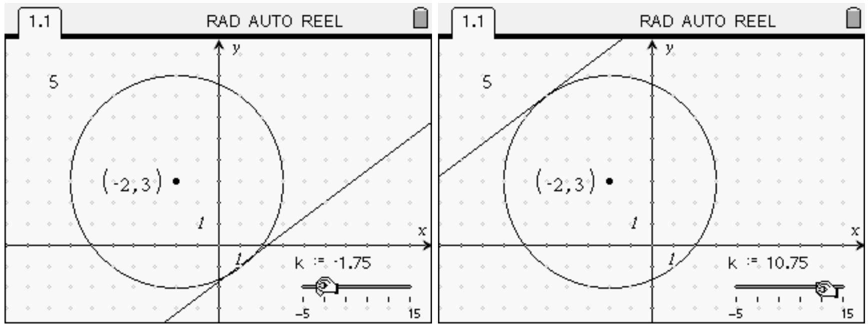
Klik på selve skyderen, og kald kontekstmenuen frem med , hvor du vælger 1:Indstillinger. Indstil som vist:



Husk
Du benytter tab til at hoppe mellem knapper og felter i dialogbokse

Tip
I kontekst menuen får du også mulighed for animation. Prøv dette!

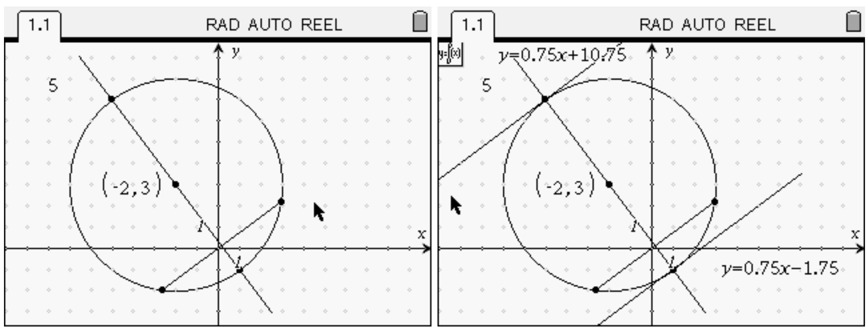
Knyt skydervariablen k til funktionen ved at ændre til $f1(x)=\frac{3}{4}x+k$. Grib skyderen, og træk i begge retninger indtil linjen bliver tangent til cirklen:



Du kan også gå helt anderledes til værks uden brug af skyder, så fjern +k i $f1(x)$:

Obs
En linje defineret som en funktion kan ikke indgå i en Vinkelret konstruktion.

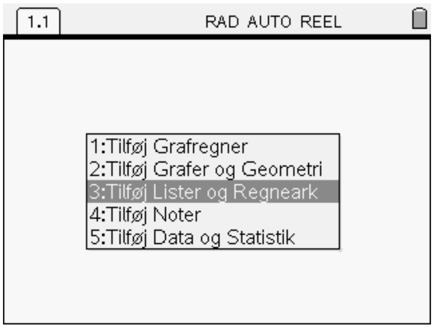
Konstruer først skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, og forbind de to punkter med et linjestykke. Skjul linjen. Konstruer en linje gennem centrum, og vinkelret på linjestykket med (menu) 9:Konstruktion ▸ 2:Vinkelret. Konstruer skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen:

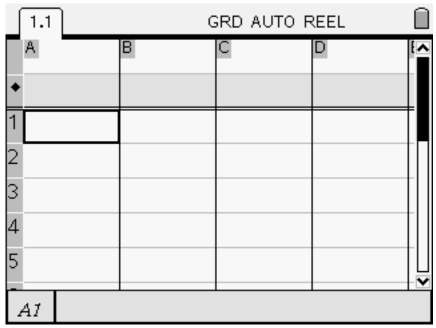


Tilbage er blot at konstruere linjer i de to skæringspunkter parallelle med linjestykket. Hertil benytter du (menu) 9:Konstruktion ▸ 2:Parallel, og får vist ligningerne med (menu) 1:Handlinger ▸ 7:Koord og Lign.

3 Lister og Regneark

Tast ctrl N, og gem det aktuelle dokument efter behov. Vælg Tilføj Lister og Regneark i værkstedslisten



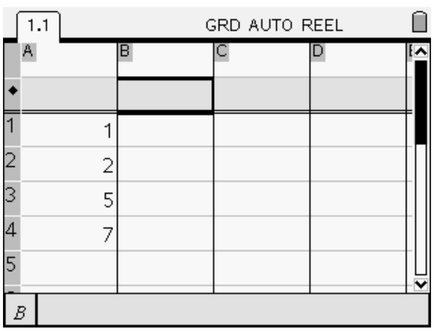


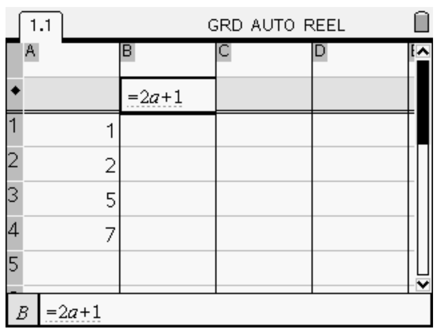
Regnearket

På det højre skærmbillede ovenfor ser du regnearket. Den øverste række viser kolonnenavnene (A, B, C, ...). Til højre for kolonnenavnet er en tom celle, hvor du kan tildele kolonnen et navn. Rækken umiddelbart under er formellinjen, og først i 3 række begynder selve regnearket.

Tast tal ind i kolonne A, som vist nedenfor, og placer markøren i formelfeltet under B, hvor du skriver = 2a + 1 (du kan følge din indtastning i nederste linje på skærmen):

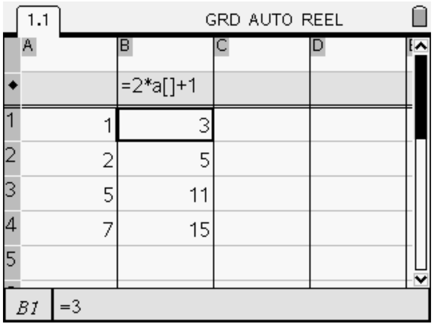
> **Tip:**
> Du navigerer i regnearket med
> ◀ ▲ ▼ ▶
> En indtastning afsluttes med enter eller ▼.

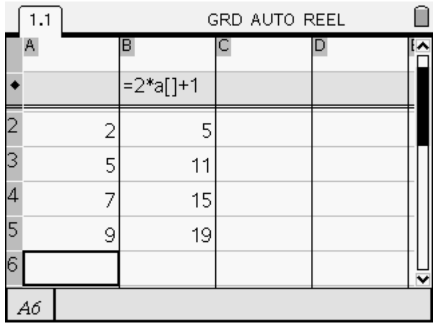




Tast enter, og de beregnede værdier fyldes i kolonne B (venstre skærmbillede nedenfor):

Obs
For at undgå navnekonflikt sættes automatisk [] efter *a* i formlen for kolonne B.





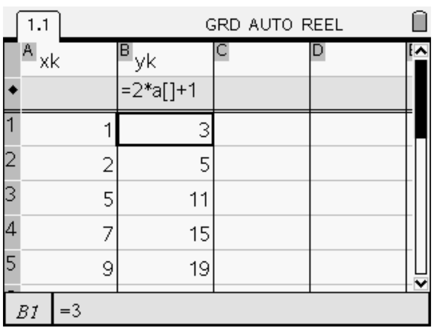
Naviger til celle A5, og indtast her fx 9 enter (højre skærmbillede ovenfor).

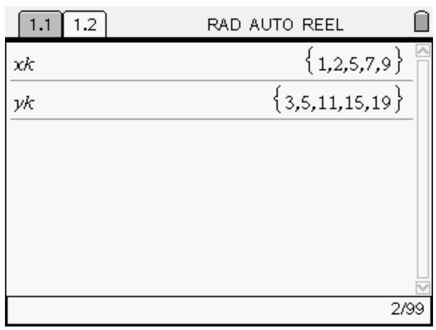
Navngivning af kolonner

Pil op til feltet til højre for kolonnenavnet A, og skriv her *xk*. Tilsvarende skriver du *yk* i feltet til højre for B (venstre skærmbillede nedenfor)

Variabelnavnene *xk* og *yk* er tilgængelige i andre værksteder. For at undersøge dette nærmere, kan du fx indsætte et Grafregner værksted, og beregne værdien af variablerne *xk* og *yk*:

Obs
xk og *yk* er såkaldte listevariable





Cellereferencer og -formler

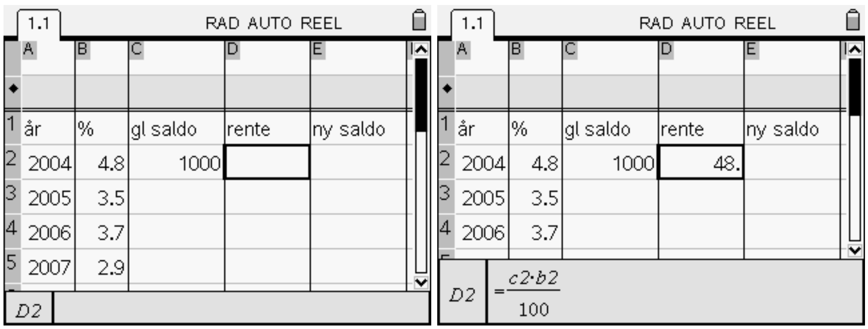
Et beløb på 1000 kr. blev ved starten af 2004 indsat på en konto. Rentesatserne i perioden 2004 - 2008 var som vist i tabellen

År	2004	2005	2006	2007	2008
Rentefod i %	4,8	3,5	3,7	2,9	3,1

Lav et regneark, der viser, hvordan saldoen på kontoen har udviklet sig år for år.

Opret et nyt Lister og Regneark værksted, og indtast tabellens oplysninger vist nedenfor. Når du indtaster tekst i en celle, skal teksten omsluttes af anførelsestegn — ellers opfattes teksten som et variabelnavn

Obs
TI-Nspire CAS skelner ikke mellem store og små bogstaver, så det er ligegyldigt om du skriver *c2* eller *C2*

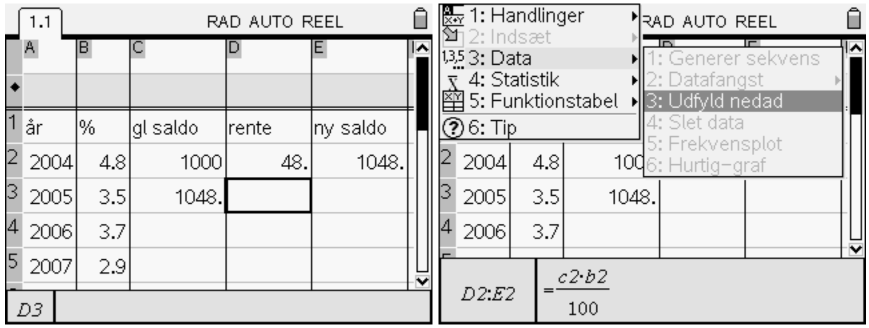


I celle D2 skal det første års rente beregnes. Dette sker ved at indtaste formlen *=C2*B2/100* i celle D2 (højre skærmbillede ovenfor).

I celle E2 skal saldoen efter det første år beregnes, dvs., at indholdet i celle C2 og celle D2 skal lægges sammen. Dette sker med formlen *=C2+D2*, som skrives i celle E2

Saldoen, der er beregnet i celle E2, er det beløb, der skal forrentes i det efterfølgende år. Indholdet af celle C3 skal derfor være det samme som indholdet af celle C2. Dette klarer du let ved at indtste formlen *=E2* i celle C3.

Herefter skulle dit regneark se således ud:

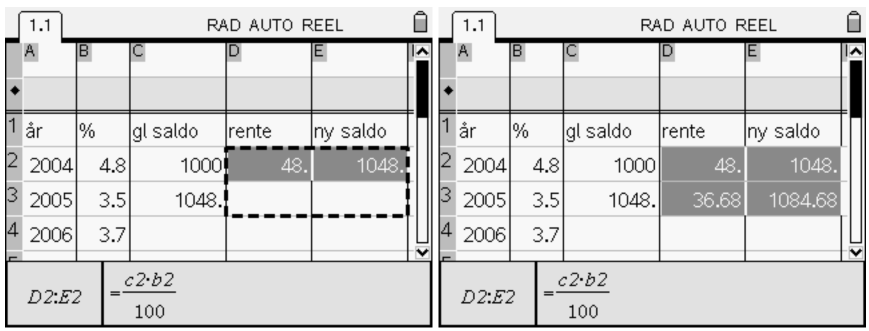


Udfyldningen af resten af regnearket vil ske ved kopiering:

Formlerne, der skal stå i celle D3 og E3, er helt analoge til formlerne i celle D2 og E2 — blot skal cellereferencerne ændres, så de refererer til celler med samme relative placering. Dette sker helt automatisk med menufunktionen *Udfyld nedad*:

Tip
Du markerer et område ved at placere markøren i det øverste venstre hjørne af området, holde ⇧ nede og med NavPad navigere til det nederste højre hjørne.

Marker cellerne D2 og E2, og vælg nu menu 3: Data ▸ Udfyld nedad (højre skærmbillede ovenfor) Rammen om cellerne D2 og E2 bliver stiplet. Pil en celle ned (venstre skærmbillede nedenfor), og tast Enter:

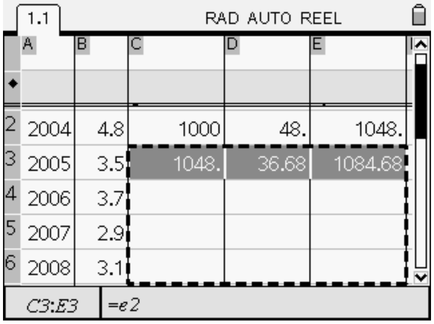


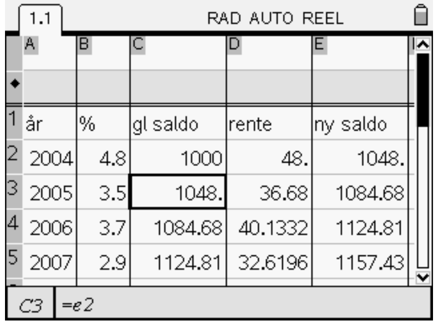
Obs
Et firkantet område specificeres ved at angive øverste venstre celle og nederste højre celle. Mellem de to celler sættes et kolon (:)

Klik på cellerne D3 og E3 for at checke, om formlerne er som forventet.

Cellerne C3, D3 og E3 indeholder nu formler, der kan kopieres til de tre resterende rækker. Så marker området C3:E3, vælg menu 3: Data ▸ Udfyld nedad. Pil 3 rækker ned for at udvide den stiplede boks, og tryk Enter:

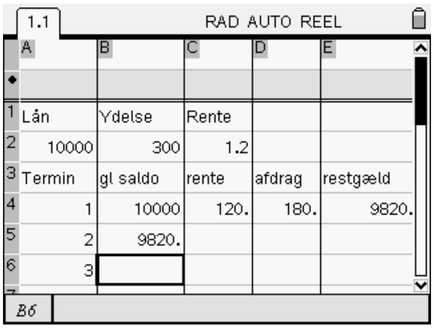
Tip
Hvis du ønsker, at beløbene skal vises med 2 decimaler, skal du vælge indstillingen **Fast2** i dokument-indstillinger.

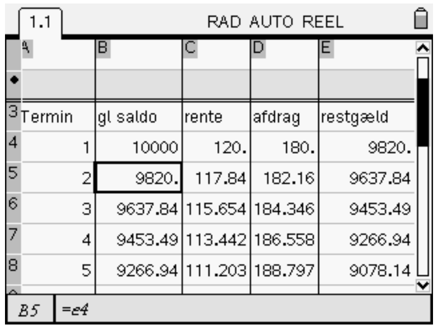




Absolut cellereference

Hvis du vil lave en plan for afviklingen af et lån kan du stort set gå frem som i eksemplet ovenfor:





Begynd som vist på det første skærmbillede. Dog skal du her sikre, at referencerne til B2 (ydelsen) og C2 (renten) i dine formler forbliver uændrede under en kopiering. Dette klarer du ved at låse cellereferencen ved at indsætte $-tegn. Indtast formlerne:

Tip
Du laver et $-tegn vha. ctrl .

i celle B4:	*=a2*
i celle C4	*=b4*c2/100*
i celle D4	*=b2–c4*
i celle E4	*=b4–d4*
i celle B5:	*=e4*

og benyt *Udfyld nedad* i to omgange.

4 Data og Statistik

I Data og Statistik værkstedet kan du visualisere data i mange forskellige diagramtyper, undersøge data, lave kurvetilpasning og deskriptiv statistik.

Obs
En *liste* kan fx være en navngivet kolonne i et regneark

Data og Statistik værkstedet er meget tæt forbundet med Lister og Regneark værkstedet, og tilføjer du et Data og Statistik værksted til et tomt dokument, så får du blot at vide, at der ikke er nogen lister til stede. Start derfor i Lister og Regneark.

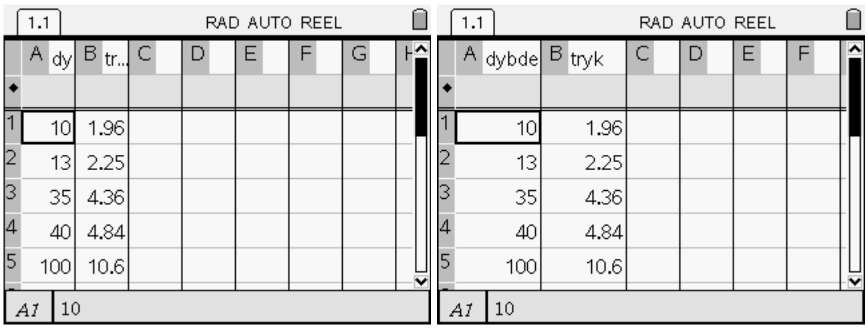
Indtastning og plot af data

Opret et nyt dokument ctrl N og tilføj et Lister og Regneark værksted. Indtast tallene i nedenstående tabel, der viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

$Dybde\ (m)$	10	13	35	40	100
$Tryk(atm)$	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Navngiv de to kolonner *Dybde* og *Tryk*:

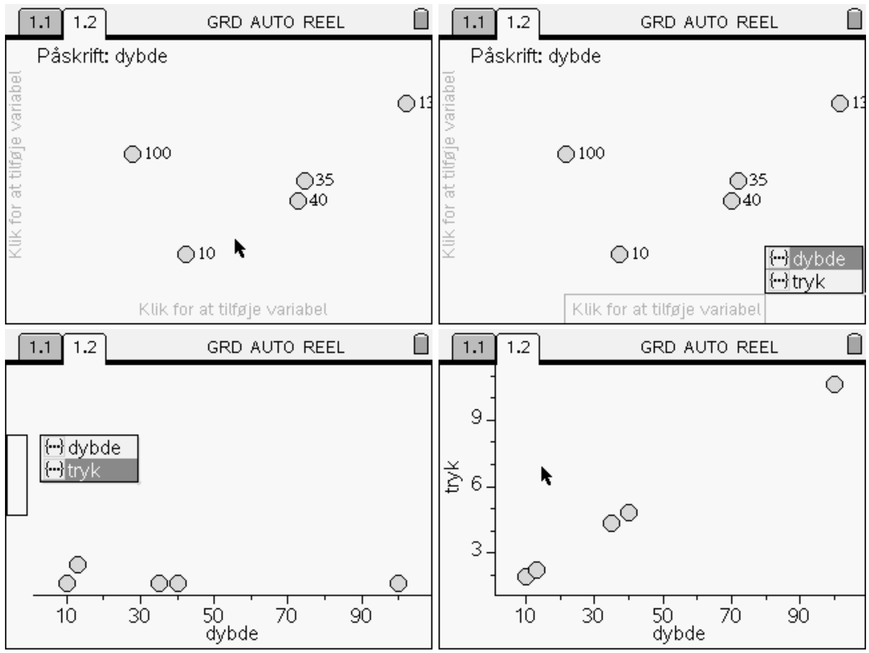
Obs
Hvis du får behov for at tilpasse kolonnebredden gør du således: Vælg
menu 1:Handlinger
▸ 2:Tilpas størrelse
▸ 1:Kolonnebredde.
Kolonnen bliver da markeret, og du kan ændre bredden med ▸ og ◂.



Indsæt nu et Data og Statistik værksted med ctrl I, og straks kommer der en graf med 5 punkter. Du skal blot fortælle, at dybde skal knyttes til x-aksen og trykket skal knyttes til y-aksen:

Pil ned i bunden af skærmen og klik på [Klik her for at tilføje en variabel], og der kommer en valgliste med mulige variabeler frem. Vælg **dybde**.

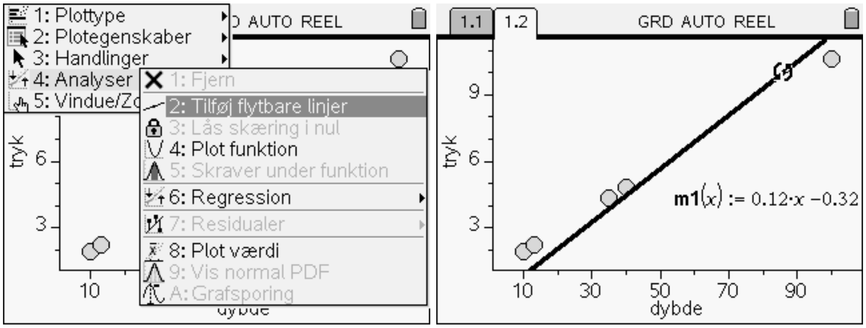
Pil til venstre side af skærmen, og klik her. Så kommer valglisten atter frem, og du vælger her **tryk**.



Lineær regression ved håndkraft

De 5 datapunkter udviser et pænt lineært forløb, så det vil være naturligt at prøve at lægge en ret linje mellem punkterne. Det kan du gøre dynamisk på TI-Nspire CAS:

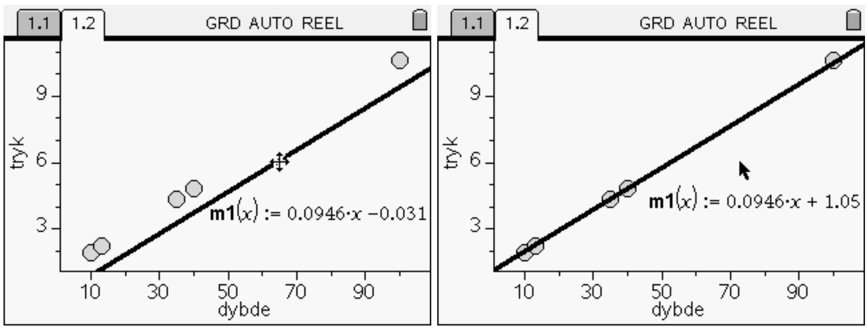
Vælg menu 4:Analyser ▸ 2:Tilføj flytbare linjer, og du får en ret linje tegnet sammen med dine datapunkter. Du skal nu ændre linjens hældning og derefter forskyde op eller ned, så den passer bedst muligt med datapunkterne.



Hvis du placerer markøren nær en af linjens endepunkter, så skifter markøren til et rotationssymbol. Grib da fat i linjen, og træk, så hældningen passer. Afslut med enter.

Placer herefter markøren nær midten af linjen. Markøren skifter da til. Grib fat i linjen, og træk, så placeringen passer. Afslut med enter.

Obs
Hvis du vil se et mål for, hvor godt din linje passer til data, så kan du få vist residualerne:
menu 4:Analyser ▸ 7:Residualer ▸ 1:Vis residuelle kvadrater.
Flyt linjen og forsøg at gøre 'Sum af kvadrater' mindst mulig.



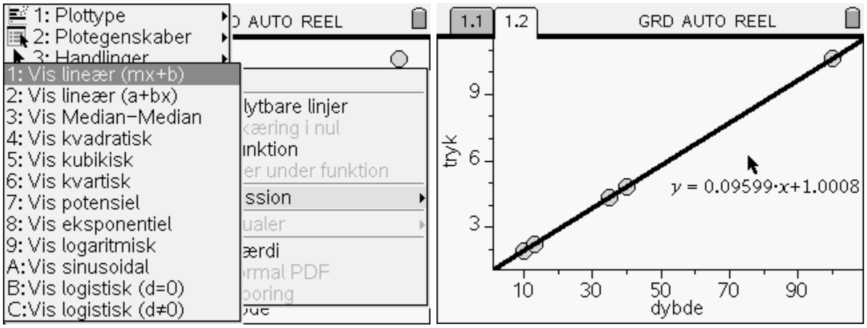
Lineær regression automatisk

Fjern den flytbare linje med menu 4:Analyser ▸ 1:Fjern flytbare linjer. Du kan direkte få bestemt den bedste rette linje gennem datapunkterne i Data og Statistik værkstedet:

Vælg menu 4:Analyser ▸ 6:Regression ▸ 1:Vis lineær (mx+b)

Tip
Du slipper af regressionslinjen med menuvalget (menu) 4:Analyser ▸ 1:Skjul lineær

Tip
Regressionsligningen finder du som stat.RegEqn ved at trykke (sto→ var) (se side 70).



Så let kan det gøres! I listen på det venstre skærmbillede kan du se, at denne metode ikke er forbeholdt lineær regression.

Boxplot

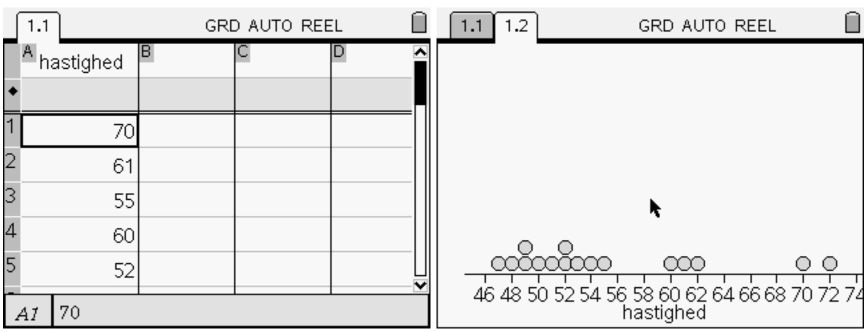
Man har observeret 16 bilers hastighed gennem en by, hvor den højest tilladte hastighed er 50 km/t. De observerede hastigheder var

70, 61, 55, 60, 52, 49, 72, 54, 48, 53, 47, 62, 49, 51, 52, 50

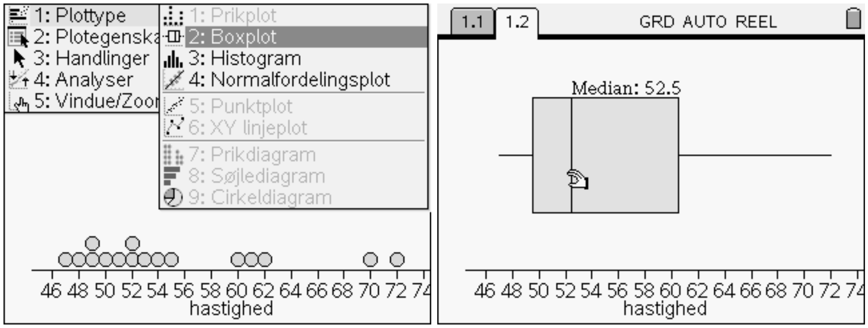
Tegn boxplottet for denne fordeling.

Tast hastighederne ind som kolonner i et Lister og Regneark værksted. Navngiv kolonnen *hastighed* — eller bliver den ikke tilgængelig i Data og Statistik værkstedet.

Tilføj herefter et Data og Statistik værksted, og knyt *hastighed* til *x*-aksen:



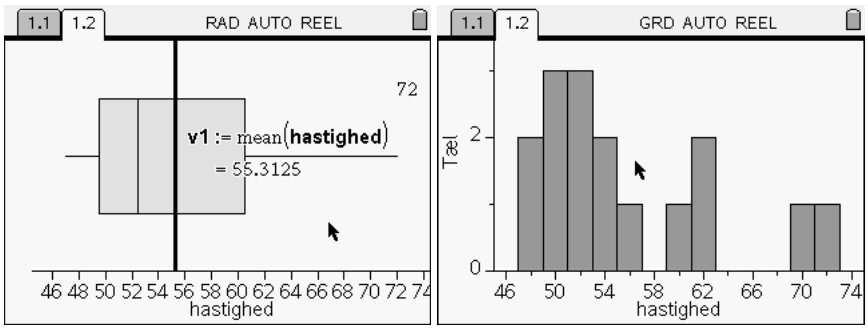
Vælg menu 1:Plottype ▸ 2:Box Plot, og boxplottet tegnes. Ved at flytte markøren til boxplottets linjer, kan du få kvartilsættet:



Tip

Benyt sto▸ var til at indsætte variabelen hastighed.

Du kan plotte middelværdien sammen med et boxplot: Vælg menu 3:Analyser ▸ 8:Plot værdi. Indtast mean(*hastighed*) i det intastningsfelt, der kommer frem:



Du kan let skifte mellem de forskellige plottyper: Prikplot, Boxplot, Histogram og Normalfordelingsplot. Prøv mulighederne. Ovenfor er vist det standardhistogram, TI-Nspire CAS leverer. Hvis du ønsker større intervaller i histogrammet kan du gribe og trække i skillelinjerne — eller lave (mere præcise) indstillinger ved at kalde histogrammets kontekstmenu frem med ,og vælge 5:Søjleindstillinger

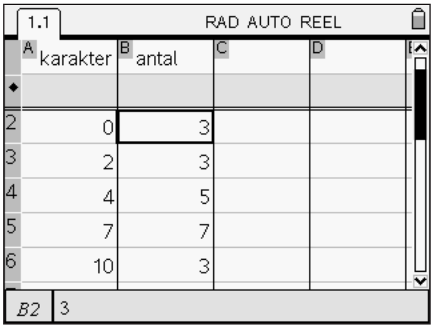
Boxplot efter en hyppighedsliste

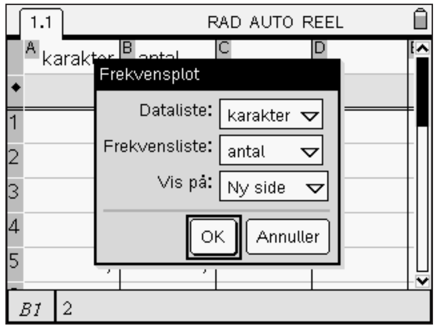
Et matematikhold fik til skriftlig eksamen følgende karakterer

Karakter	–3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	2	3	3	5	7	3	2

Tegn boxplot for denne fordeling

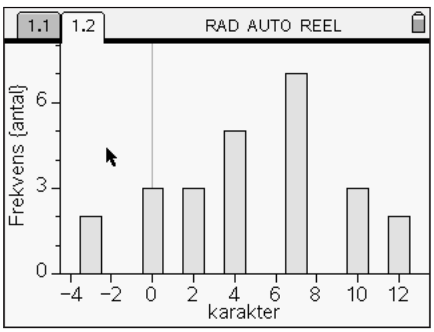
Opret et nyt Lister og Regneark værksted. Indtast tabellens oplysninger som vist:

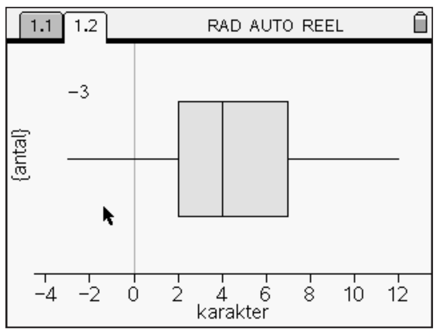




Vælg (menu) 3:Data ▸ 5:Frekvensplot. Indstil dialogen som vist, og tast Enter. Du vi da få tegnet et stolpediagram på en ny side. Kald kontekstmenuen frem med for at ændre graftypen til et boxplot:

Tip
Hvis du vil have afsat middelværdien, som ovenfor, kan du beregne denne efter hyppighedslisten som *mean(a1:a7,b1:b7)*





Sammenligning af boxplot

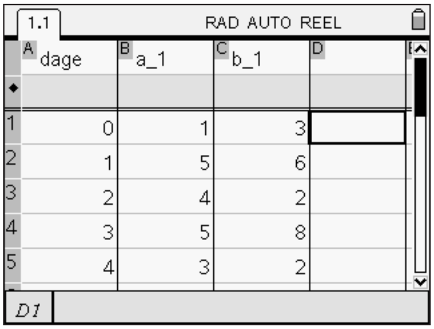
I to klasser er fraværet for et kvartal opgjort til

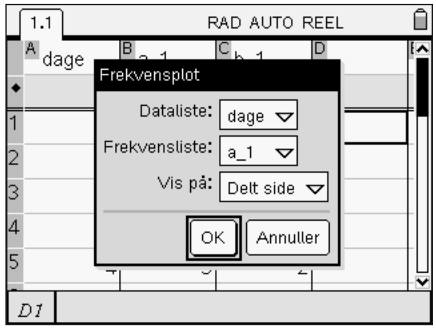
Antal dage	0	1	2	3	4	5	6	7	18	20
Antal elever 1a	1	5	4	5	3	4	2	2	1	1
Antal elever 1b	3	6	2	8	2	3	1	1	0	0

Sammenlign fraværet i de to klasser ved at tegne boxplot for begge

Indtast data i et Lister og Regneark værksted og navngiv kolonnerne:

Tip
Observationerne 18 og 20 er atypiske, og afsættes derfor som *isolerede* punkter.
Ved at vælge menu 2:Plotegenskaber ▸ 3:Udvid boxplot-grænser kan du få punkterne forbundet.

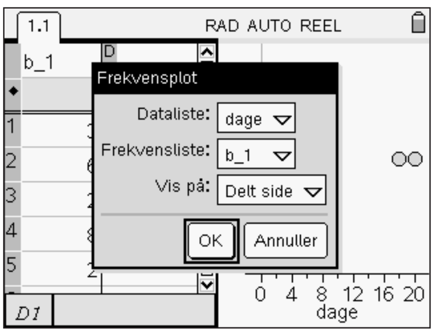


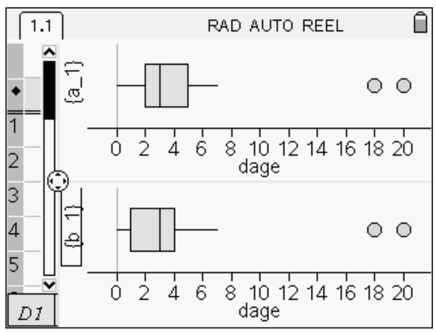


Vælg menu 3:Data ▸ 5:Frekvensplot. Indstil dialogen som vist ovenfor, og tast Enter. Kald kontekstmenuen frem med for at ændre graftypen til et boxplot.

Skift fokus til regnearket med , og gentag proceduren med b_1 som frekvens liste og vælg igen et delt side:

Tip
Hvis du vil have dine ruderne med boxplot forstørret, skal du taste , og vælge 5:Sidelayout ▸ 1: Brugerdefineret opdeling.
Herefter kan du med NavPad ændre opdelingen.





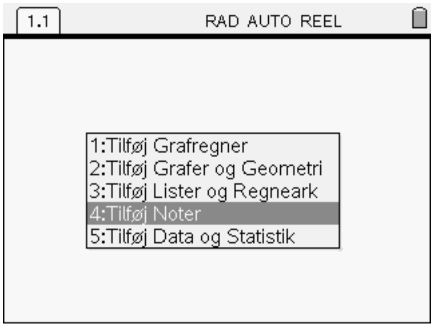
5 Noter

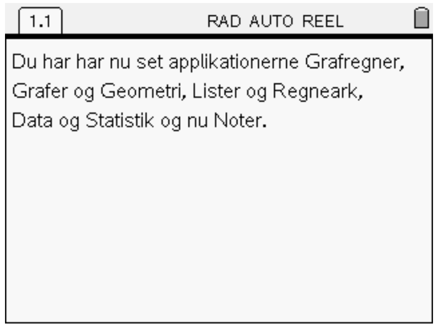
I værkstedet Noter kan skrive og formatere den tekst, der skal ledsage din opgave. I teksten kan du indsætte formler, figurer og specialtegn

Indtastning af tekst

Opret et nyt dokument ctrl N og tilføj et Noter værksted.

Tip
De almindelige genveje til *kopier* (enter C) og *indsæt* (enter V) findes også på TI-Nspire CAS.
Markering sker med CAPS ◀ eller CAPS ▶
Du kan således fx kopiere fra et Grafregner vækstedtil Noter.





At skrive tekst i Noter værkstedet går helt af sig selv ved at benytte de grønne bogstavknapper på TI-Nspire CAS, omend det tager lidt tid. De eneste knapper, du sikkert kommer til at lede efter, er mellemrum ␣ og linjeskift ↵. Specialtegn indsætter du vha ∞β°.

Indtastning af formler

Indsæt et nyt Noter værksted med ctrl I. Du skal nu indtaste denne tekst i Noter:

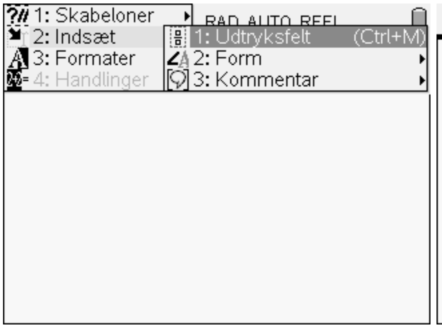
Ligningen $x^2 = 2$ har løsningen $x = \sqrt{2}$ eller $x = -\sqrt{2}$

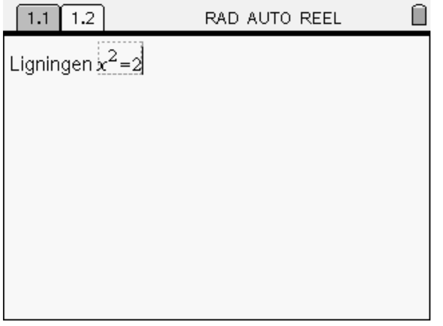
Denne tekst indeholder to udtryksfelter, nemlig selve ligningen og løsningen. Start med at indtaste ordet “Ligningen” efterfulgt af mellemrum ␣.

Tip
Udtryksfeltet indsættes automatisk når du trykker på .

Tip
Hvis du har løst ligningen i et Grafregner værksted, kan du hente en kopi og indsætte denne. Udtryksfeltet indsættes da automatisk.

Tast menu 2:Indsæt ▸ 1:Udtryksfelt, og skriv i feltet. Tast ▸ for at komme ud af udtryksfeltet. Læg i øvrigt mærke til genvejen Ctrl+M:



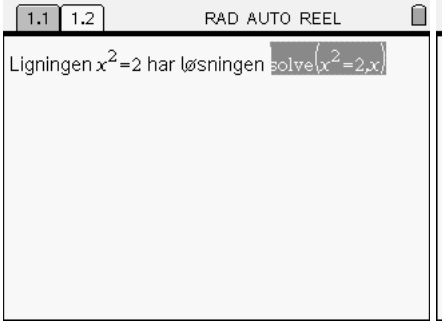


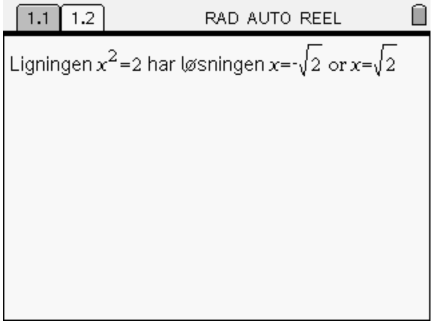
Indtast så “ har løsningen ”. Du har sikkert bemærket, at æ, ø og å ikke findes på tastaturet, men der er en meget elegant genvej med knappen :

æ = a, ø = o og å = a,

og tilsvarende for de store bogstaver.

Indsæt et nyt udtryksfelt, hvori du indtaster kommandoen, der løser ligningen, og markerer ligningen med ◂:





Tip
Du kan fx hente *solve* i kataloget

Tilbage er blot at vælge menu 4:Handlinger ▸ 1:Evaluer det markerede — eller tryk , og vælg Evaluer det markerede i kontekstmenuen. Så bliver løsningen placeret i udtryksfeltet.

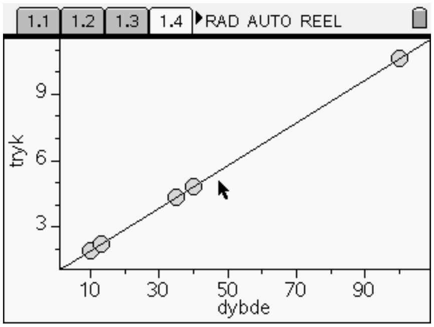
6 Dokumentstyring

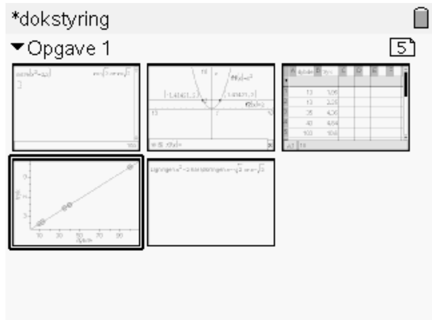
På skærmbilledet nedenfor ser du øverst i vinduet ser du en række faner, der viser, at du aktuelt er i Opgave 1 side 4. Du skifter mellem de enkelte sider med og .

Hvis du derimod vælger ved at taste ctrl ▲, får du vist siderne i miniatureform:

Tip
At slette en side er meget simpelt i miniature visningen:
Med den pågældende side i fokus taster du clear.

Tip
Du kan også nemt flytte rundt på siderne: Klip den side, der skal flyttes, med ctrl X, og sæt ind det ønskede sted med ctrl V





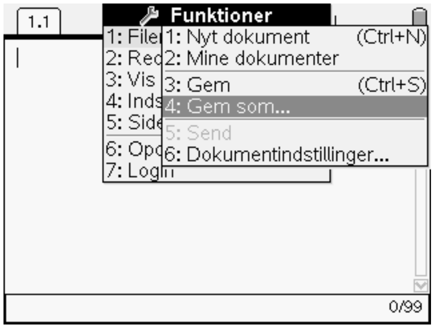
I miniature visningen kan du ændre på rækkefølgen af siderne: Naviger til den side, du vil flytte, og tast ctrl . En hånd kommer til syne, og du kan nu med NavPad flytte siden hen, hvor du vil have den. Afslut ved at klikke med .

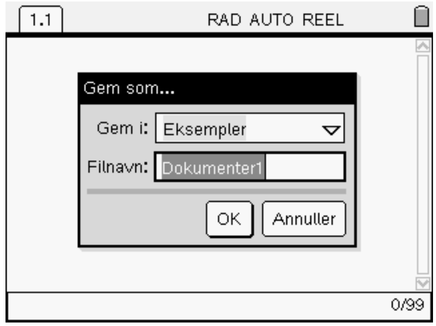
Hvis du vil tilbage til normal visning, så vælger du ved at taste ctrl ▼, og siden i fokus vil blive vist.

Gem et dokument

Øverst i det højre skærmbillede ovenfor står der ***dokstyring**. Det betyder, at dokumentet bestående af de 5 sider er gemt under navnet dokstyring. * betyder, at der er foretaget ændringer i forhold til det, der er gemt under navnet dokstyring.

For at gemme et dokument (der ikke er gemt i forvejen) skal du trykke og i menuerne vælge 1:Filer ▸ 4:Gem som...

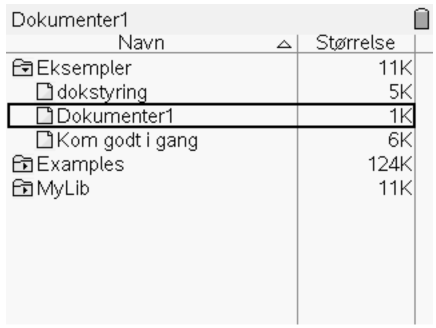




Obs
Gem som vil altid vise den mappe, du sidst gemte i. Gemmer under **Dokumenter1**, foreslås **Dokumenter2** næste gang.

TI-Nspire CAS foreslår selv, at du gemmer i mappen **Eksempler**. Vil du gemme et andet sted, så hopper du til **Gem i** -feltet med (tab), og åbner mappelisten med ▼. Som filnavn foreslås **Dokumenter1**, som du kan ændre efter behag.

Du kan få en oversigt over dine filer ved at taste 7: Mine dokumenter:



Tip
Du kommer tilbage til det aktuelle dokument ved at taste .

Læg mærke til, at **Dokumenter1** er placeret i mappen **Eksempler**. Der også en **Kom godt i gang**. Den kan du passende vælge nu ved at pile ned på den og klikke med .

Vil du slette en fil, er det i **Mine Dokumenter** det foregår: Pil hen på den fil, du vil slette, og tast (clear). I en dialogboks skal du bekræfte, at den valgte fil skal slettes.

7 Variabler

I arbejdet med TI-Nspire CAS er det meget vigtigt at forstå, hvad variabler er, hvordan de håndteres samt at kende betydningen af definerede og ikke-definerede variabler.

I dette afsnit benyttes som eksempel toppunktsformlen for en parabel

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right)$$

hvor a, b og c er koefficienterne i parablens ligning $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, og $d = b^2 - 4a \cdot c$ er diskriminanten.

Gem talværdier i variabler

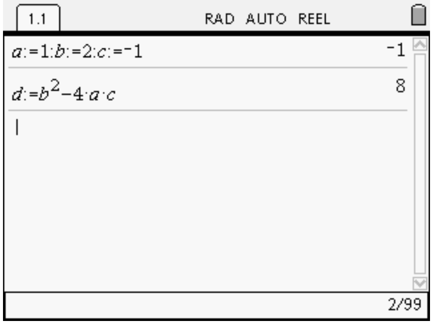
Tip
Alternativt kan du lave tildelingen således 1→a, hvor pilen laves med ctrl sto→ var.

I det konkrete eksempel, $y = x^2 + 2x - 1$, er $a = 1, b = 2$ og $c = -1$. På TI-Nspire CAS kan du gemme talværdier i navngivne variabler:

Et 1-tal gemmes i variablen a ved at taste: a:=1 og tilsvarende for de andre variabler.

Du kan også gemme værdien af et udtryk i en variabel, fx kan du gemme værdien af $b^2 - 4a \cdot c$ i en variabel med navnet d. Du skal blot taste $d := b^2 - 4a \cdot c$

Tip
Du behøver ikke at taste enter efter hver tildeling, men du må gerne.
Det bliver mere overskueligt, hvis tildelingerne adskilles af et kolon :.

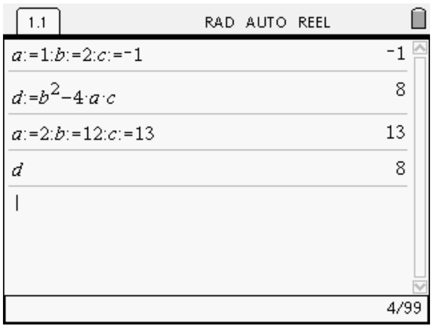


Obs
Gemmer du en ny værdi i en variabel, vil den gamle værdi blive slettet. Indholdet af en variabel kan ses ved blot at skrive variablens navn efterfulgt af (enter).

Det er vigtigt at skrive gangetegn mellem *a* og *c* i udtrykket $b^2 - 4a \cdot c$. TI-Nspire CAS genkender ikke underforstået multiplikation. Udelader du gangetegnet, opfattes *ac* som navnet på en variabel. Derimod behøver du ikke at skrive noget gangetegn mellem 4 og *a* — her benyttes underforstået multiplikation. Kravene til et variabelnavn gør dette muligt, idet et variabelnavn skal starte med et bogstav

Du kan se, at det er en værdi, der er blevet gemt i variablen *d*, nemlig tallet 8. Det betyder, at selvom du ændrer værdierne af *a*, *b* og *c*, vil *d* forblive uændret.
Ændrer du de værdier, der er gemt i variablerne *a*, *b* og *c* til fx $a = 2$, $b = 12$ og $c = 13$, og checker *d*'s værdi, ser du, at denne er uændret fra den foregående beregning:

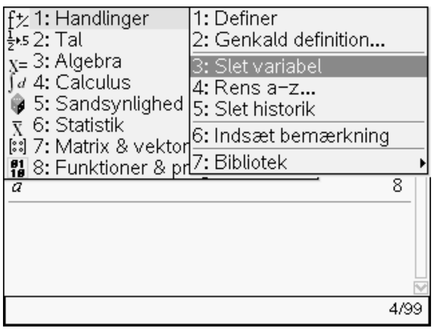
Tip
Hent den øverste linje i historikken, og ret den til med de nye værdier.

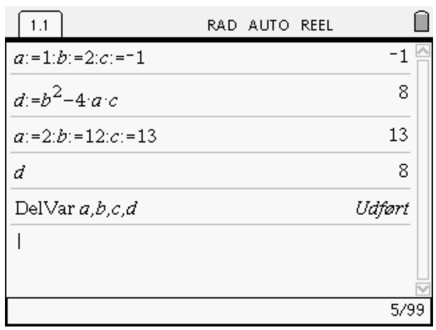


Slet variabler

Du skal nu lave det hele en gang til, men i omvendt orden. Først skal du slette de værdier, *a*, *b*, *c* og *d* har fået tildelt. Du kan nemt klare sagen ved at vælge (menu) 1:Handlinger ▸ 3:Slet variabel — eller blot skrive kommandoen *DelVar* direkte:

Tip
Menupunktet **1:Handlinger ▸** 3:**Rens a-z** vil også klare sagen. Denne kommando sletter alle 1-bogstavs variabler.



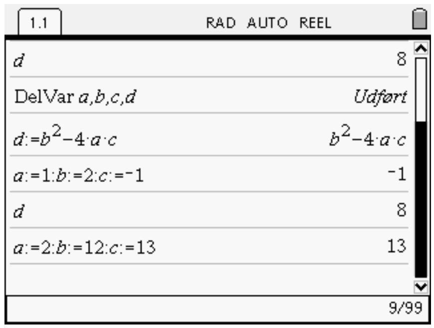


Gem formler i variabler

Nu er variablerne a,b og c udefinerede, og når du igen udfører tildelingen

$$d := b^2 - 4a \cdot c$$

er det udtrykket $b^2 - 4a \cdot c$, der gemmes i d og ikke blot værdien af udtrykket. Herefter vil d kun få en værdi, hvis du tildeler a, b og c værdier, og værdien af d vil ændres, hvis du ændrer værdien af a, b eller c:



En ulempe er naturligvis, at så snart du tildeler værdier til a, b og c, vil du ikke længere umiddelbart kunne se, hvilken formel der er gemt i d — det kan du kun, hvis a, b og c er udefinerede.

Midlertidig tildeling

Slet variablerne a, b og c med kommandoen *DelVar a,b,c*. Beder du nu om at få d udregnet, svarer maskinen ved at give dig formlen, der er gemt i d — se skærmbilledet nedenfor.

Du kan lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i d og beregne værdien af d ved at skrive:

$$d \,|\, a = 1 \text{ and } b = 2 \text{ and } c = -1$$

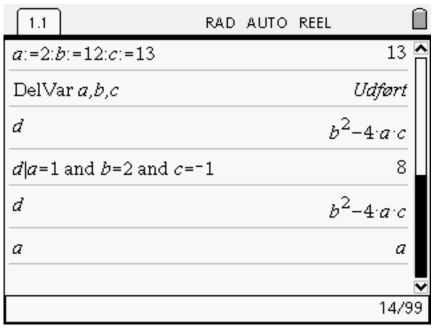
Efter denne midlertidige tildeling kan du let checke, at du stadig kan fremkalde formlen i *d*, samt at *a*, *b* og *c* er udefinerede (venstre skærmbillede nedenfor)

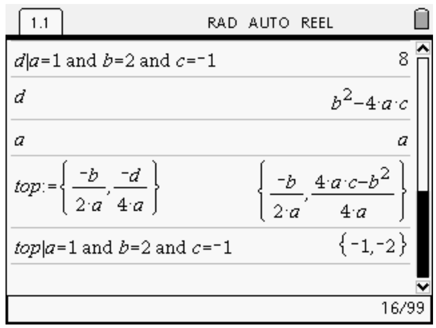
For at lave en formel, der bestemmer toppunktets koordinater, behøver du nu blot at taste følgende:

$$top := \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right\}$$

De krøllede parenteser { og }, er vigtige at få med, men betydningen skal du ikke bekymre dig om lige nu.

Herefter skal du blot lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i formlen *top* for at beregne toppunktets koordinater i et konkret eksempel:



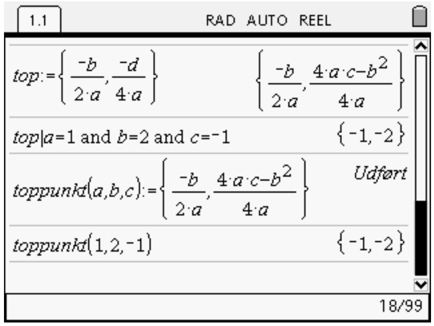


En brugerdefineret funktion

Toppunktsformlen kan implementeres som en brugerdefineret funktion af 3 variabler. I Grafregner værkstedet skriver du:

$$toppunkt(a,b,c) := \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4a\cdot c)}{4a}\right\}$$

Herved defineres en funktion med navnet *toppunkt*. For at bestemme toppunktet for parablen $y = x^2 + 2x - 1$, indtaster du toppunkt(1,2,–1):



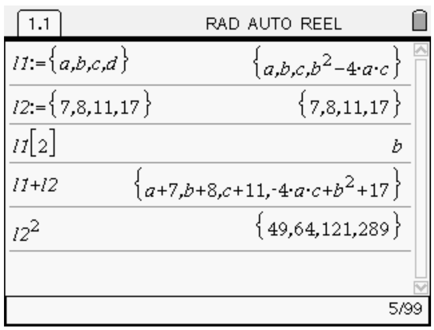
Lister

I ovenstående implementation af toppunktsformlen satte du krøllede parenteser om toppunktets koordinater — du lavede det, der kaldes en liste.

En liste er en samling af objekter (tal, udtryk, strenge), som ikke nøvendigvis er relaterede. Som mængder angives lister med krøllede parenteser og de enkelte elementer separeres af et komma, men til forskel fra mængder, kan en liste indeholde dubletter.

Lister kan indtastes manuelt eller være resultat af anvendelse af en operation, der returnerer en liste - fx *zeros*, som du stiftede bekendtskab med tidligere. Nedenfor er vist nogle eksempler på lister:

Tip
Læg mærke til, at formlen *d* indsættes ved udregningen.

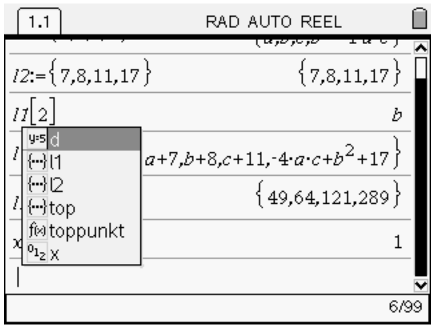


På skærmbilledet er vist, hvordan du kan trække et specifikt element ud af en liste. Du kan regne på lister præcis som på tal herunder benytte alle standardfunktioner, selvom det naturligvis stiller visse krav til listens elementer.

Oversigt over variabler

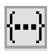
Hvis du har arbejdet dette afsnit igennem i samme dokument, så har du haft ganske mange variabler i sving: Simple variable, formler, funktioner og lister. Ingen simple variable har overlevet — *a*, *b* og *c* blev jo slettet med DelVar, så tilføj lige en enkelt, fx $x{:}=1$.

Du kan få en oversigt over de variabler, du har i sving, ved at taste sto▸var:



Af variabellisten fremgår, at der pt. er 6 variabler i brug. Af piktogrammerne foran variabelnavnene kan du se, hvilken type variabler, der er tale om

en formel


en liste

en simpel variabel

en funktion

Du kan benytte sto▸var-tasten til at indsætte (lange) variabelnavne — det er langt hurtigere end at skrive dem. Du piler blot ned til den variabel, du vil indsætte, og taster enter. Lange variabelnavne møder du, hvis du fx har lavet en regression i Lister og Regneark, og skal bruge et eller flere af resultaterne i Grafregner værkstedet.

8 Ligninger og uligheder

Du har allerede set nogle eksempler på såvel symbolsk som numerisk ligningsløsning, men der er meget mere at se på i den forbindelse:

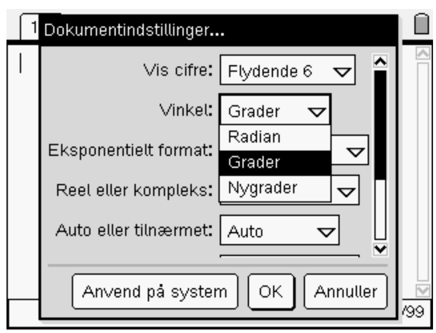
- trigonometriske ligninger
- to ligninger med to ubekendte
- ligninger med parametre
- numerisk nulpunktsbestemmelse
- uligheder

Trigonometriske ligninger

Løs ligningen $\sin(v) = 0.65$, hvor $0° < v < 180°$

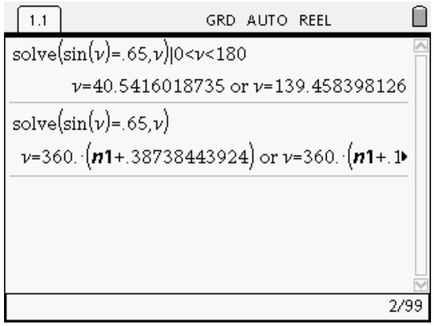
Start med at sikre dig, at din maskine regner i grader. Hvis der står GRD øverst på skærmen, er det OK. Står der derimod RAD, skal du taste 1:Filer ▸ 6:Dokumentindstillinger

Tip
Brug tab til at hoppe til den ønskede valgboks. Du åbner valgboksen med ▾, og vælger med .
Når du er færdig, hopper du til OK med tab og afslutter med .



På nedenstående skærmbillede ser du ligningen løst såvel med som uden betingelsen $0<v<180$

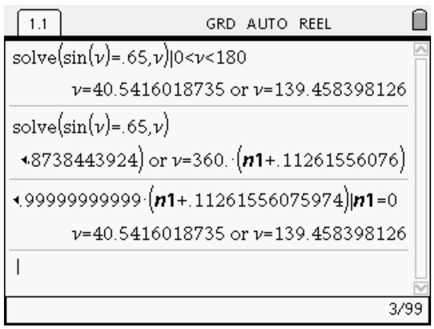
Tip
Det er ikke sikkert, at du får ***n*1** i løsningen. Næste gang, du løser en ligning af denne type, udtrykkes løsningen ved ***n*2**. Osv. Indtil ***n*255**, hvor der startes forfra.



Uden betingelsen $0<v<180$ ser løsningen lidt underligt ud, men viser, hvordan TI-Nspire CAS tackler en ligning med uendelig mange løsninger. Variablen ***n*1** står for en heltallig konstant.

Løsningerne i intervallet $0<v<180$ finder du så ved at sætte ***n*1** = 0. Det klarer du sådan: Hent løsningerne i historikområdet og tilføj |***n*1** = 0, idet du også kopierer og indsætter ***n*1**, som ikke er en almindelig bogstavvariabel:

Tip
Du kan også hente **n** med skabelonen for specialtegn via ctrl .



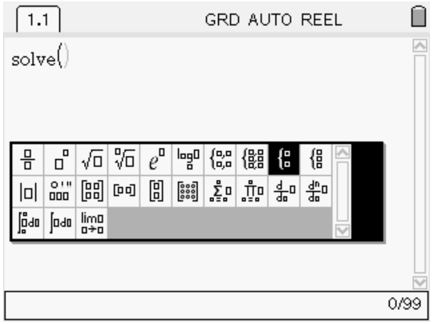
To ligninger med to ubekendte

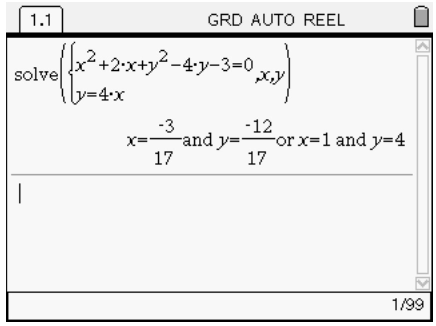
Løs ligningssystemet

$$x^2+2x+y^2-4y-3=0 \;\wedge\; y=4x$$

Geometrisk svarer opgaven til at finde skæringspunkterne mellem en cirkel og en linje. Du indtaster nemmest ved at benytte skabelonen for to ligninger med to ubekendte:

Tip
Hvis du ikke bruger skabelonen til indtastningen, skal du skrive system(ligning1, ligning2).





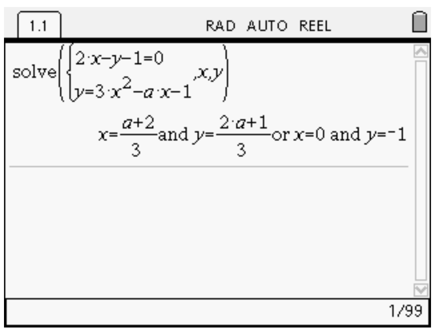
Ligninger med parametre

Måske har det undret dig, at du altid skal skrive, hvilken eller hvilke variabler du vil løse ligningen med hensyn til. Det hænger sammen med, at TI-Nspire CAS også kan håndtere ligninger med parametre:

Løs ligningssystemet

$$2x - y - 1 = 0 \ \wedge \ y = 3x^2 - ax - 1$$

Geometrisk svarer denne opgave til at finde skæringspunktet mellem en ret linje og en parabel. Indtast således som vist nedenfor — brug skabelonen :



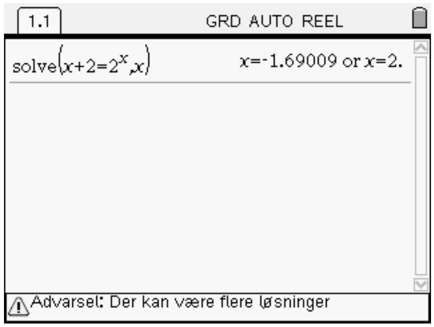
Numerisk nulpunktsbestemmelse

Løs ligningen $x + 2 = 2^x$

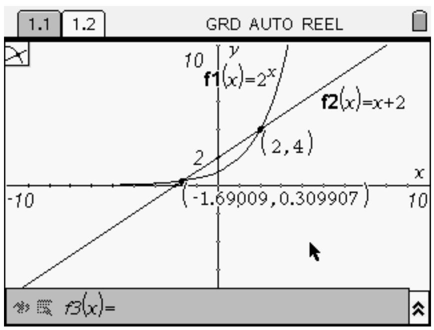
Tip
Du kan styre **solve** med et gæt på løsningen, fx solve(x+2= 2^x,x = 1) Når du styrer solve med et gæt, får du et mere nøjagtigt resultat.

Tip
Du kan også styre **nsolve** med et gæt på løsningen. Det er specielt nyttigt, hvis **solve** helt må opgive at komme med en løsning, og du ved, at der er en.

Her ser du for første gang maskinen ryste lidt på hånden og advare om, at der kan være flere flere løsninger.



Læg mærke til, at maskinen opgiver at regne symbolsk. I den slags situationer er det klogt at bruge grafværktøjet for at se, om alle løsninger er fundet.

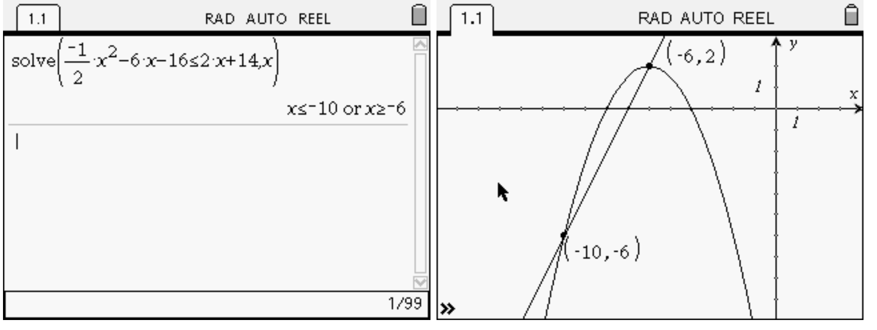


Uligheder

Du kan også løse uligheder vha. solve-kommandoen:

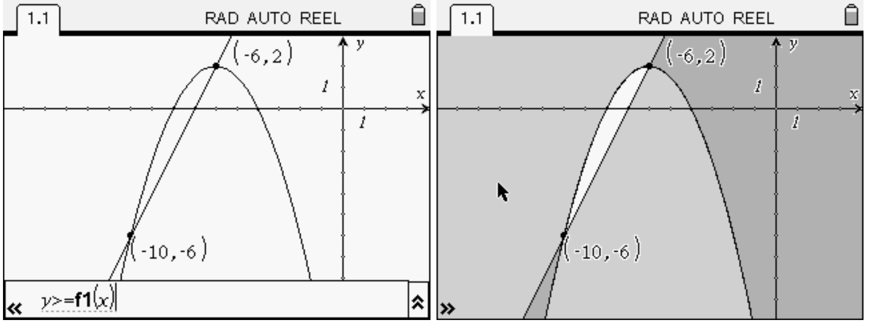
Løs uligheden $-\frac{1}{2}x^2-6x-16 \;\leq\; 2x+14$

Uligheden indtastes præcis som en ligning — blot skal du anvende et ulighedstegn i stedet for et lighedstegn. På det højre skærmbillede ser du en grafisk illustration af løsningen:



Du kan lave den grafiske illustration af løsningen endnu bedre ved at indtaste uligheden *y>=f1(x)* og dernæst uligheden *y<=f2(x)*:

Obs
Du skal slette indholdet i indtastningslinjen før du kan skrive y>=f1(x).
Tryk på for at se de uligheder, der er tastet ind.



Det mørke sværtede område markerer da løsningsområdet, hvor vi er over parablen, men under linjen.

9 Funktioner

Du har allerede set flere eksempler på, hvordan funktioner håndteres. Hovedsagelig har du foretaget indtastningen i graffeltet og refereret til funktionerne via det navn, *f*1, *f*2, osv. funktionen således får. I dette afsnit vil du lære at

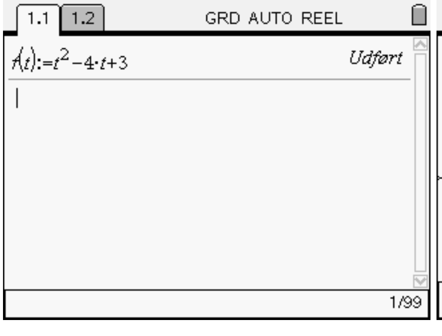
- definere funktioner i Grafregner-værkstedet og tegne grafen herfra
- bestemme grænseværdier
- bestemme differentialkvotienter og finde tangenter
- finde stamfunktioner og benytte disse til arealbestemmelse

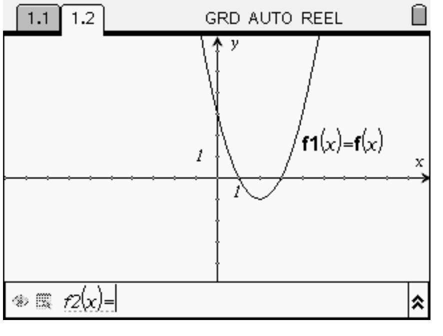
Funktioner i Grafregner-værkstedet

I graffeltet i Grafer og geometri-værkstedet *skal* du bruge x som uafhængig variabel. Definerer du en funktion i Grafregner værkstedet, er der frit valg af navn til den uafhængige variabel. En definition af funktionen $f(t) = t^2 - 4t + 3$ vil i Grafregner værkstedet se således ud:

$$f(t) := t^2 - 4t + 3$$

Grafen tegnes kan herefter tegnes i Grafer og geometri-værkstedet ved at indtaste f1(x) = $f(x)$ i graffeltet:

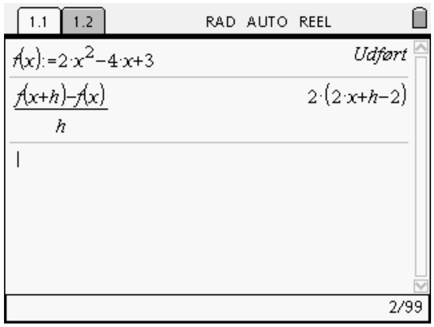




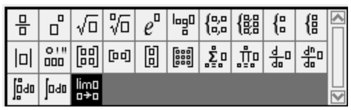
Grænseværdier

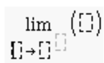
En funktion *f* er givet ved $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Bestem grænseværdien af differensbrøken for *f*, når *h* går mod 0.

Definer funktionen *f* i hovedskærmen ved $f(x) := 2x^2 - 4x + 3$ og beregn differens-brøken:



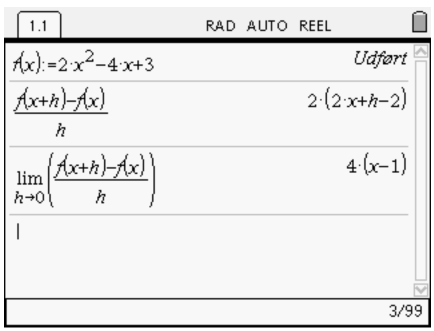
Grænseværdier bestemmer du vha.



der vil indsætte skabelonen . En af pladsholderne i skabelonen er grå — det betyder, at det er valgfrit, om du skriver noget i denne.

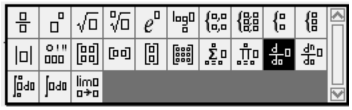
Tip
I den valgfrie pladsholder skal du skrive +, hvis du vil finde grænseværdien fra højre, og –, hvis du vil finde grænseværdien fra venstre.

Tip
Du hopper nemmest mellem pladsholderne med (tab).

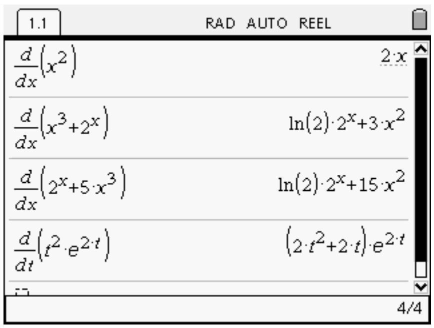


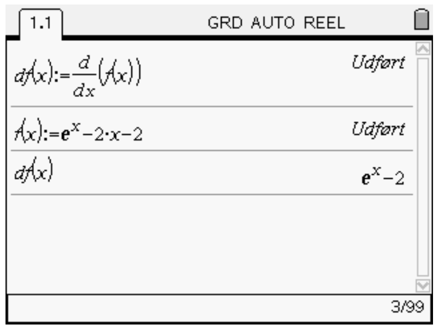
Differentialregning

Differentialkvotienter bestemmer du vha.



der vil indsætte skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$. Først indtaster du, hvilken variabel der skal differentieres med hensyn til, og dernæst det udtryk, der skal differentieres. På skærmbilledet til venstre kan du se nogle eksempler





Det er fornuftigt at definere en ny funktion ved (se højre skærmbillede)

$$df(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$$

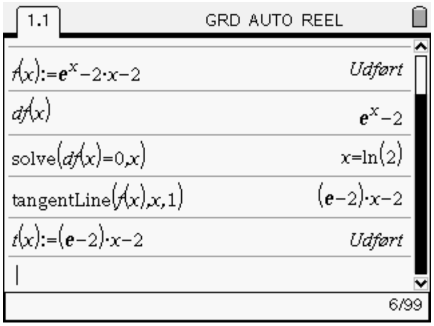
Så vil *df* altid rumme differentialkvotienten af funktionen *f*, og *f* kan jo skifte indhold. Herefter kan du arbejde med *df* som med enhver anden funktion — herunder fx bestemme nulpunkter.

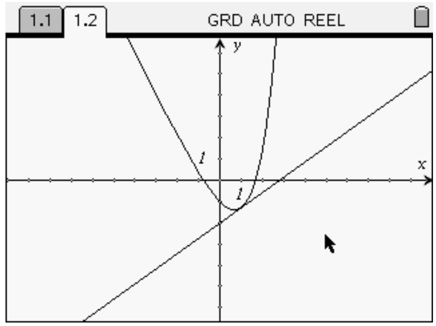
En funktion *f* er givet ved forskriften

$$f(x) = e^x - 2x - 2$$

Bestem de punkter, hvor *f* har vandret tangent, og bestem tangentligningen i punktet med førstekoordinaten 1.

Første del klares ved at løse ligningen $f'(x)=0$. Til den anden del, skal du benytte kommandoen $tangentLine(f(x),x,1)$, der umiddelbart giver dig forskriften for tangenten til grafen for *f* i punktet med *x*-koordinaten 1.

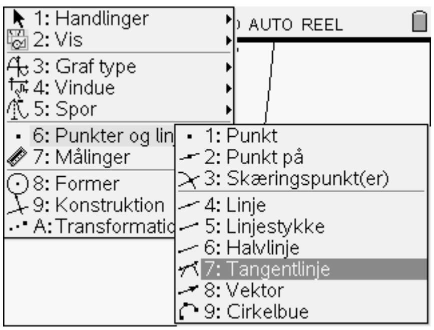


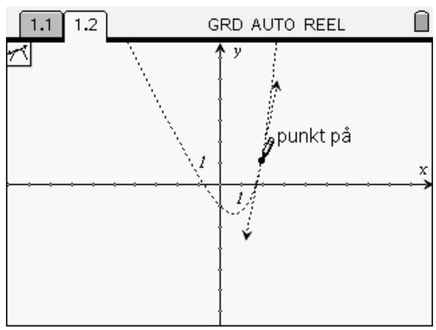


I sidste linje er vist, hvordan tangenten kan defineres som en funktion af *x*. På højre skærmbillede ser du grafen for *f* og tangenten *t*.

Dynamisk tangent

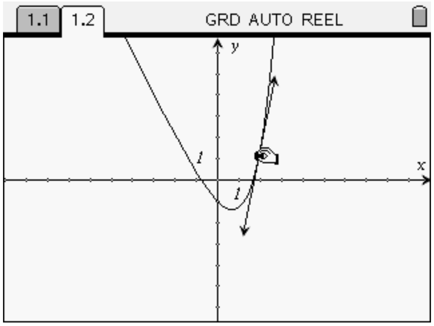
I Grafer og Geometri værkstedet finder du et stærkt tangentværktøj, hvor med du kan klistre en dynamisk tangent på en graf:
Tegn først grafen for *f* i Grafer og Geometri. Vælg så tangentværktøjet menu 6:Punkter og linjer ▸ 7:Tangentlinje.
Klik i et punkt på grafen, og en tangent tegnes i dette punkt — højre skærmbillede viser situationen umiddelbart før punktet placeres med et klik på :

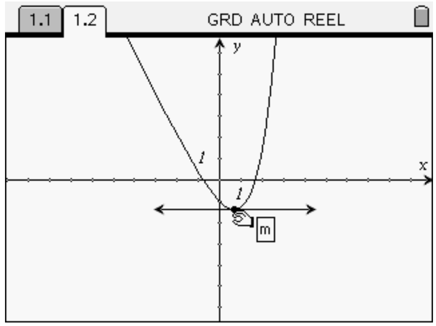




Grib punktet, og træk det langs kurven:

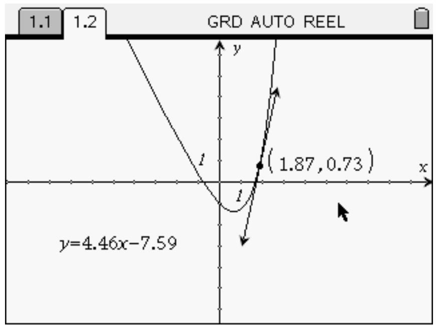
Tip
Passerer du interessante punkter undervejs, så bliver du underrettet.





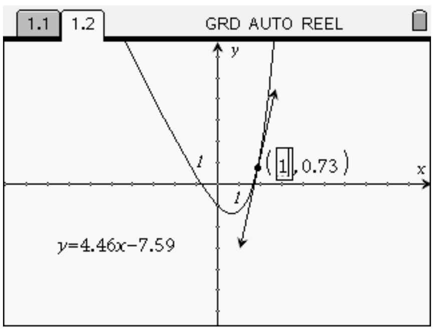
Du kan få vist tangentens ligning og punktets koordinater således: Vælg menu 1:Handlinger ▸ 6:Koord og Lign. Klik på punktet og tangenten, og flyt tangentligningen passende:

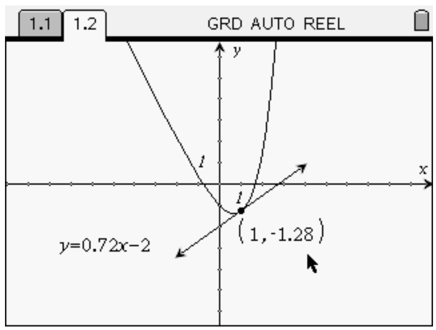
Husk
Du ændrer til 2 decimaler ved at placere markøren over koordinaterne, og taste eller



Du kan også ændre punktets koordinater direkte:

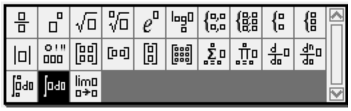
Husk
Du ændrer en koordinat ved at dobbeltklikke på den, og indtaste den nye værdi.



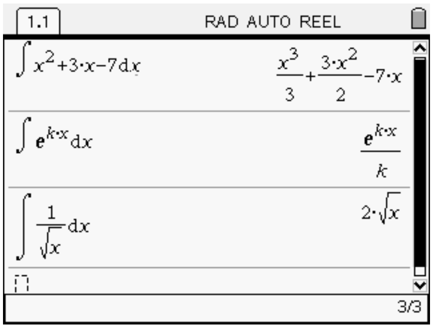


Integralregning

Stamfunktioner bestemmer du vha.



der vil indsætte skabelonen $\int \square \, d \square$. Først indtaster du, hvilket udtryk der skal integreres og dernæst den variabel der skal integreres med hensyn til. Her ser du nogle eksempler:



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 21x + 30$$

Bestem den stamfunktion til f, der går gennem punktet $P(2, 42)$.

Obs
Ved at bruge $\int($ fra kataloget kan du få integrationskonstanten med. Syntaksen er

$$\int(f(x), x, k)$$

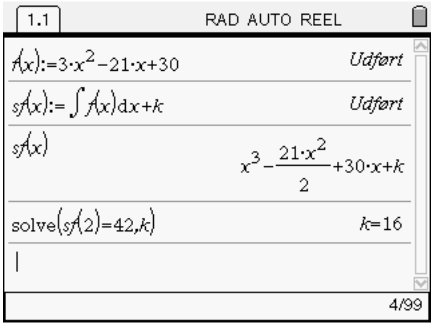
Du kan også skrive kommandoen direkte således: Integral(f(x),x,k)

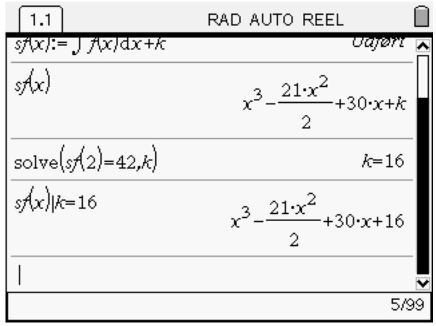
Start med at definere f. Du kan ikke benytte navnet F for en stamfunktion til f, da TI-Nspire CAS ikke skelner mellem store og små bogstaver i variabelnavne. Brug fx navnet sf i stedet.

Når du bruger skabelonen til at bestemme stamfunktioner, får du ikke en integrationskonstant med i resultatet — den må du selv tilføje. Du skal derfor definere stamfunktionen ved:

$$sf(x) = \int f(x)dx + k$$

Opgaven er løst på nedenstående skærmbilleder

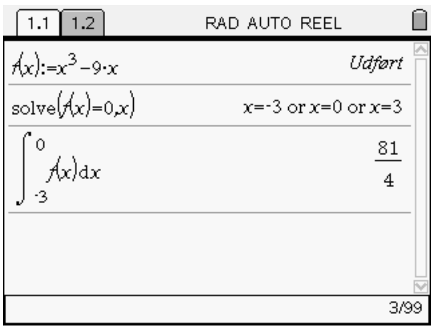


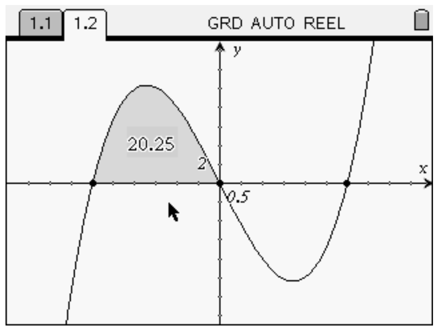


Til det bestemte integral benytter du skabelonen $\int_{\square}^{\square}\square\,d\square$. Du udfylder som ved det ubestemte integral — blot skal du her medtage grænser. Husk, at du navigerer mellem pladsholderne med tab.

Grafen for $f(x) = x^3 - 9x$ afgrænser sammen med x-aksen i anden kvadrant en punktmængde. Bestem arealet af denne punktmængde.

Tip
Bestem først skæringspunkterne med x-aksen ved at bruge værktøjet til bestemmelse af skæringspunkter (udpeg x-aksen som den ene graf).





På det højre skærmbillede ser du opgaven løst med værktøjet menu 7:Målinger ▸ 5:Integral. Med dette værktøj skal du først udpege funktionen og dernæst de to skæringspunkter med x-aksen en efter en — du kan også indtaste grænserne direkte.

10 Matematiske modeller

I Lister og Regneark du adgang til et væld af værktøjer, der gør arbejdet med modeller menustyret og meget fleksibelt. I dette afsnit vil du lære at

- plotte måledata i Grafer og Geometri
- udføre lineær regression
- udføre eksponentiel regression
- udføre potens regression
- lave en grafisk modelkontrol

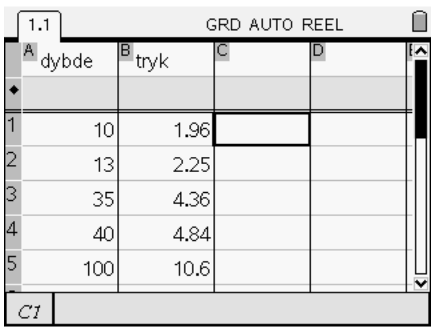
Lineær regression

Skemaet viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

$Dybde\ (m)$	10	13	35	40	100
$Tryk(atm)$	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

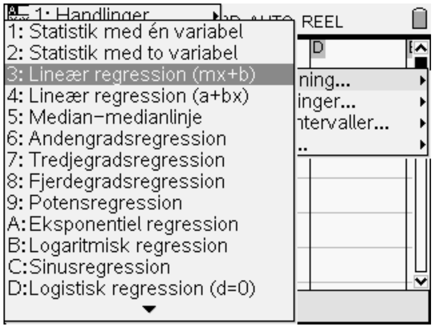
Gør rede for, at trykket med god tilnærmelse er en lineær funktion af dybden.
Find trykket i en dybde på 150 m, og bestem den dybde, hvor trykket er 30 atm.

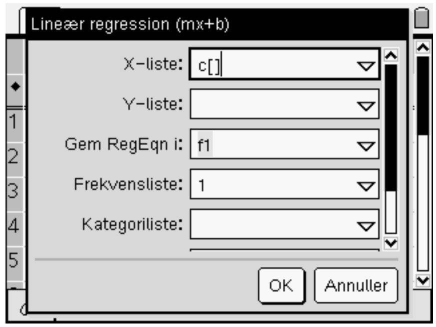
Dataene indtastes i et Lister og Regneark værksted. Kolonnerne navngives *dybde* og *tryk* hhv., og kolonnebredden justeres:



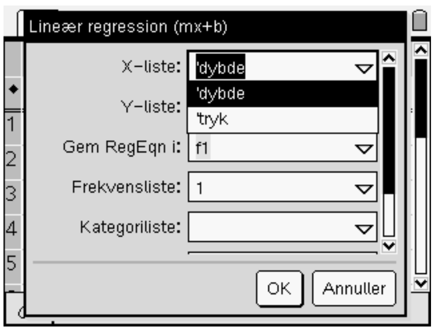
For at få udført en lineær regression på disse punkter, vælger du (menu) 4:Statistik ▸ 1:Stat-beregning ▸ 3:Lineær regression (mx+b). Dette åbner den viste dialog:

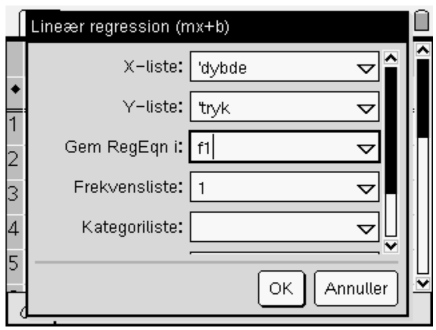
Husk
Du hopper mellem indstillingerne vha. (tab)





I dialogen skal du udpege *x*-listen og *y*-listen. Dette *kan* du gøre ved at referere til kolonnerne via navnene *a*[] og *b*[], men her er det mest bekvemt at vælge *dybde* og *tryk* i kombinationsboksene:

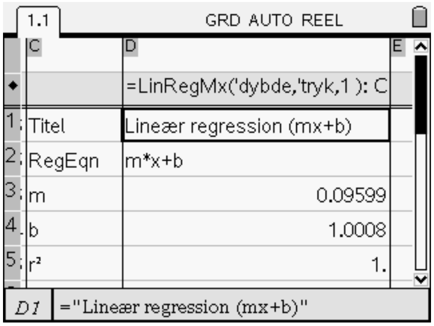


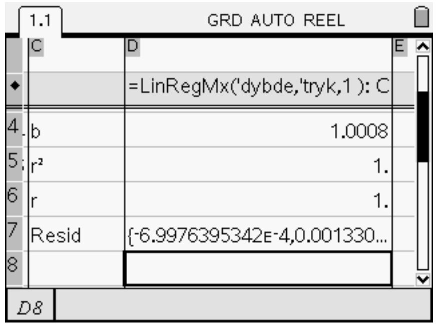


I det tredje felt skal du angive, hvor du vil gemme regressionsligningen (som funktion). Her foreslås *f*1, og er den ikke brugt til noget andet, så vælg den. Herved bliver regressionsligningen tilgængelig i andre værksteder.

Husk at indstille i feltet **1. resultat kolonne** (her *c*[]), dvs., hvor du vil have sat resultatet af regressionen ind i regnearket. Du finder dette felt nederst i listen.

Klik OK, og resultatet vises i kolonne C og D (over to skærmbilleder nedenfor):



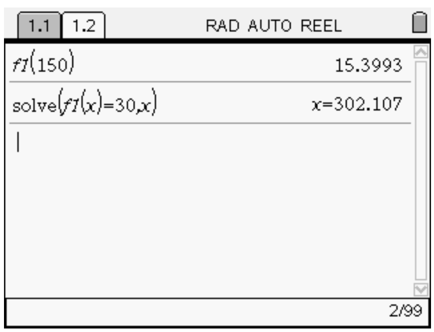


Her kan du se, at regressionslinjen får hældningen (m) 0.09599 og at trykket ved overfladen (b) er 1.0008.

Resultatet af regressionen viser tillige to størrelser: r og r^2, kaldet korrelationskoefficient og forklaringsgrad hhv. Almindeligvis regnes en model for acceptabel, hvis r^2 er over 0.95, og glimrende, hvis r^2 er over 0.99. Din lineære model er altså glimrende!

Residualerne, Resid, finder du du nederst på det højre skærmbillede. Resid er en liste af tal, der viser forskellen mellem de observerede trykværdier og de (teoretiske) trykværdier beregnet vha. modellen.

For at finde trykket i en dybde på 150 m og bestemme den dybde, hvor trykket er 30 atm., kan du indsætte et Grafregner værksted:

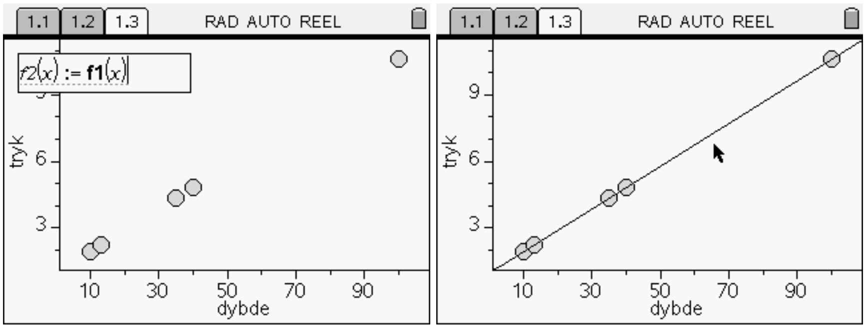


Grafisk kontrol

Du har allerede set, hvordan du med et par tastetryk meget bekvemt kan få tegnet regressionslinjen ind sammen med datapunkterne i et Data og Statistik værksted. Hvis du har lavet regressionen i Lister og Regneark værkstedet, behøver du ikke at genberegne regressionsligningen i Data og Statistik værkstedet — nu kan du direkte plotte funktionen f1, men resultatet er det samme.

Indsæt et Data og Statistik værksted, og indstil akserne til at vise *dybde* og *tryk* hhv. Vælg menupunktet (menu) 4:Analyser ▸ 4:Plot funktion

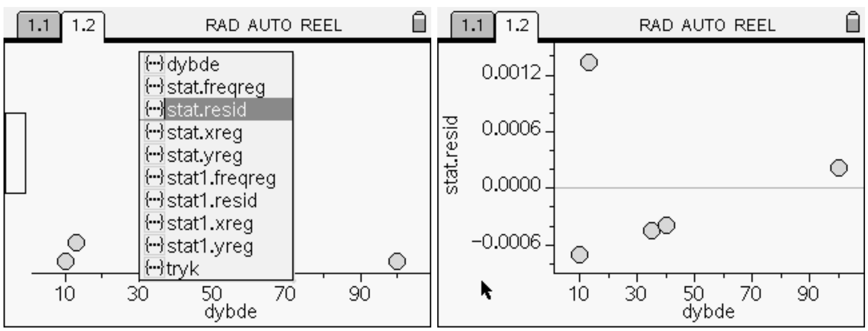
Tip
Fra starten af vises regressionslinjen som en fed linje. Klik uden for linjen, og straks bliver stregtykkelsen bedre.



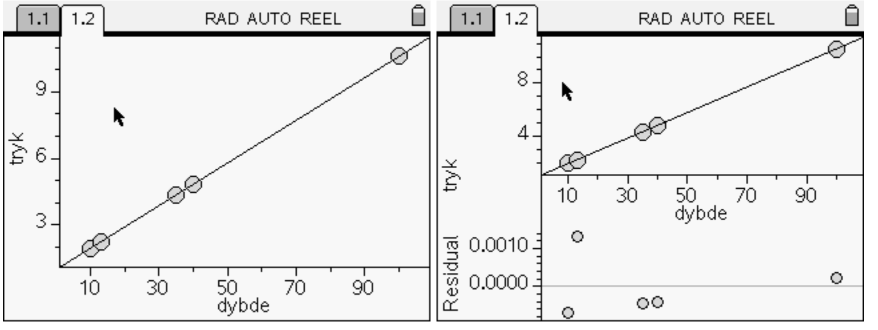
Residual plot

For at plotte residualerne skal du indsætte et Data og Statistik værksted. Indstil som vist på det venstre skærmbillede, og straks får du tegnet residualplottet:

Tip
Residuallisten hedder som variabel **stat.resid**



Du kan lave kontrollen i én arbejdsgang i Data og Statistik værkstedet ved først at indstille akserne til at vise *dybde* og *tryk*, og vælg (menu) 4:Analyser ▸ 6:Regression ▸ Vis lineær (mx+b).
Vælg dernæst (menu) 4:Analyser ▸ 7:Residualer ▸ 2:Vis residualplot:



Plottet viser, at datapunkterne ligger tilfældigt fordelt omkring den rette linje og at den typiske afvigelse på den enkelte måling er af størrelsesorden 0.001.

Eksponentiel regression

Tabellen viser sammenhørende værdier af temperaturen T (målt i °C) i en fryser og holdbarheden D (målt i dage) af en rullepølse, der opbevares i en fryser

Temperatur (T)	–25	–20	–15	–10
Holdbarhed (D)	280	154	91	49

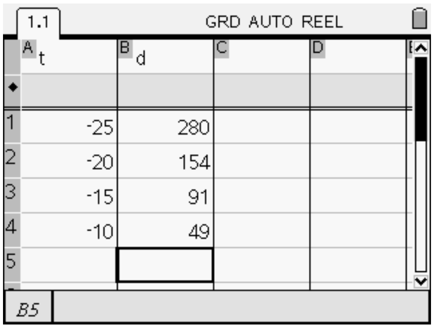
Det oplyses, at D med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion af T.

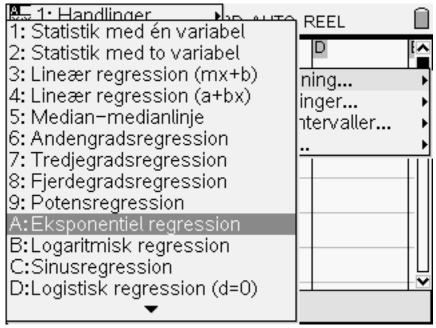
a) Bestem en forskrift for denne funktion

b) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift holdbarheden ved en temperatur på -18 °C, og bestem temperaturen, hvis holdbarheden er 180 døgn.

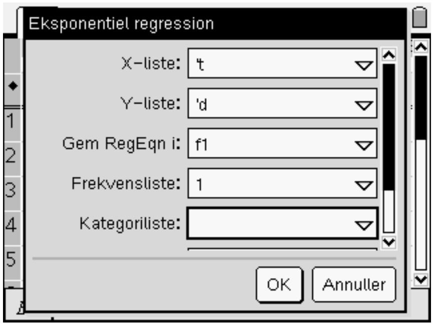
c) Bestem ved hjælp af den fundne forskrift halveringstiden for holdbarheden, og bestem den procentvise ændring i holdbarheden, når temperaturen øges 2 °C

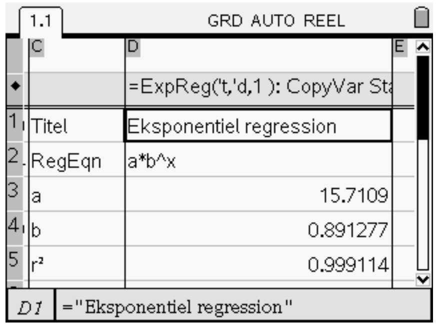
Tast data ind i et Lister og Regnearks værksted, navngiv kolonnerne og lav regressionen med (menu) 4:Statistik ▸ 1:Stat-beregning ▸ A:Eksponentiel regression:



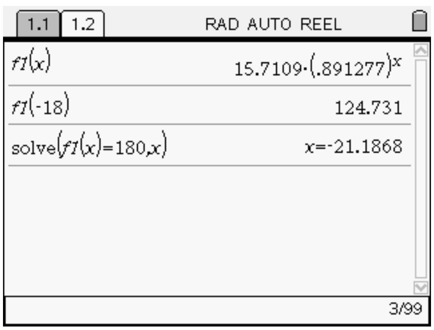


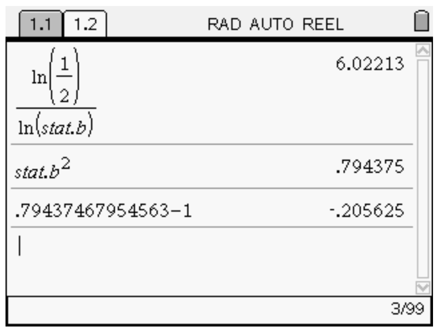
Obs
TI-Nspire CAS giver forskriften på formen ab^x og ikke, som du er vant til, på formen ba^x.





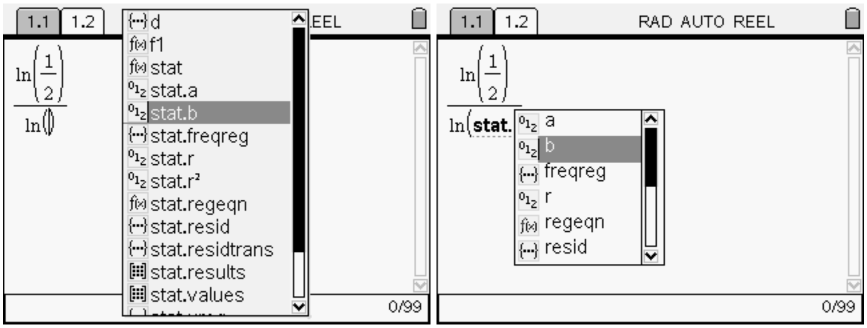
Resten af opgaven løses i et Grafregner værksted, hvor du husker på, at regressionsligningen er gemt som funktionen $f1$. Start med at få vist denne, så kan du nemt aflæse a og b.





På det venstre skærmbillede ser du, at ved en temperatur på -18 °C er holdbarheden 124 dage, og hvis holdbarheden skal være 180 dage, så skal temperaturen være ca. -21 °C. Ved beregning af halveringstiden skal du passe på, idet det *a*, som indgår i formlen, jo hedder *b* her — eller mere præcist *stat.b*.

Du kan få en oversigt over og adgang til de variabler, der er i brug i den aktuelle opgave ved at trykke på knappen sto▸ var. Taster du ind ved håndkraft, og skriver *stat*, så popper en liste op over variabler knyttet til din regression (højre skærmbillede):



Den sidste udregning viser, at hvis temperaturen øges med 2 °C, så mindskes holdbarheden med 20.5%.

Potens regression

Tabellen viser for 3-slået tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter (målt i mm) og tovets brudstyrke (målt i kg).

Diameter	4	5	6	8	10	14	16	20	24	26
Brudstyrke	250	400	600	1000	1550	3200	4000	6000	8600	10000

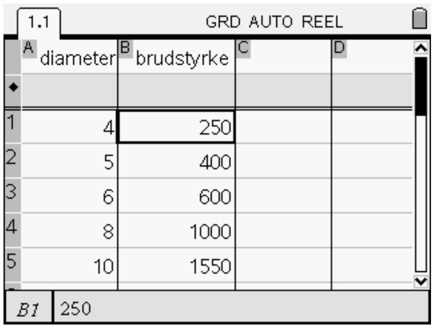
Det oplyses, at brudstyrken som funktion af diameteren tilnærmelse er en funktion af formen $f(x) = b \cdot a^x$.

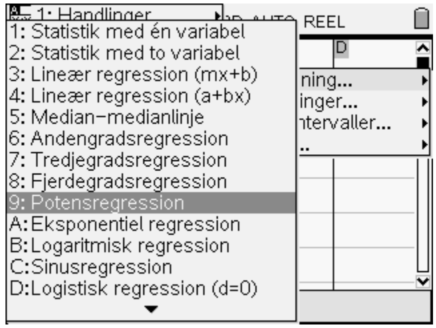
a) Benyt tabellen til at bestemme $f(x)$.

b) Benyt den fundne forskrift $f(x)$ til at bestemme, hvor mange gange så stor diameteren skal være, hvis brudstyrken skal fordobles

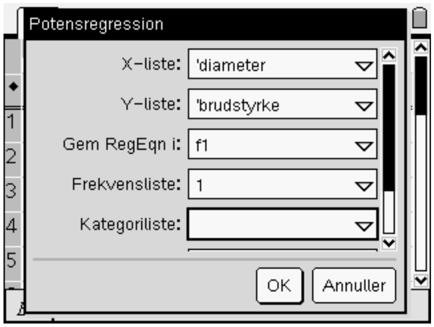
---

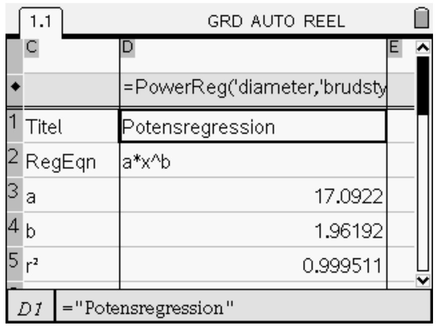
Tast data ind i et Lister og Regnearks værksted, navngiv kolonnerne og lav regressionen med (menu) 4:Statistik ▸ 1:Stat-beregning ▸ A:Potensregression:



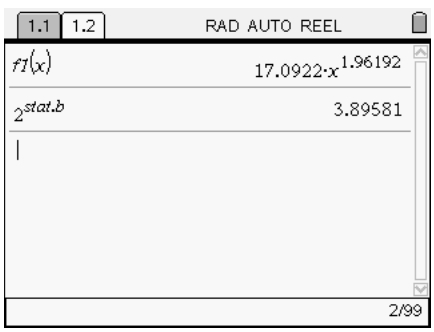


Obs
TI-Nspire CAS giver forskriften på formen ax^b og ikke som du er vant til, på formen bx^a.





Resten af opgaven løses i et Grafregner værksted, hvor du husker på, at regressionsligningen er gemt som funktionen *f*1. Start med at få vist denne. Den sidste udregning viser, at brudstyrken øges med en faktor 3.9, hvis diameteren fordobles:



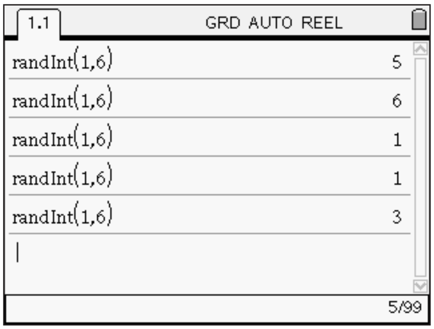
11 Sandsynlighedsregning

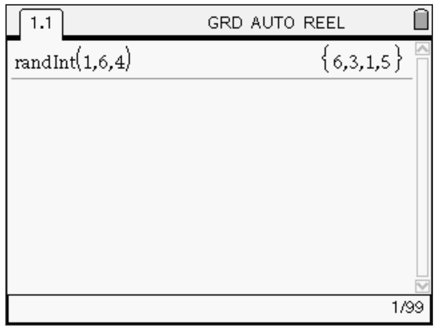
TI-Nspire CAS stiller en lang række sandsynlighedsteoretiske funktioner til rådighed. I dette afsnit skal du kun se en enkelt af disse, idet du skal på opdagelse i sandsynlighedsregningen med simulation som værktøj.

Terningkast

Ved kast med en terning er der 6 *mulige* udfald: 1, 2, 3, 4, 5 og 6, hvor tallet refererer til antallet af øjne på den side af terningen, der vender opad.
Du kan simulere kast med en terning ved at vælge et tilfældigt helt tal mellem 1 og 6. Hertil er TI-Nspire CAS udstyret med funktionen *randInt*. Fx vil *randInt*(1,6) give et tilfældigt tal mellem 1 og 6 — svarende til et kast med en terning. Eksperimenter med funktionen. Du vil næppe få samme resultater som på skærmbillederne nedenfor:

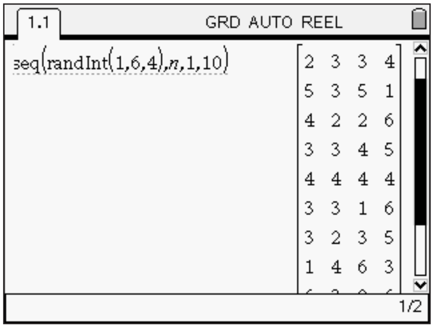
Obs
randInt finder
du her: menu
5:Sandsynlighed ▸
4:Tilfældig
▸ 2:Heltal

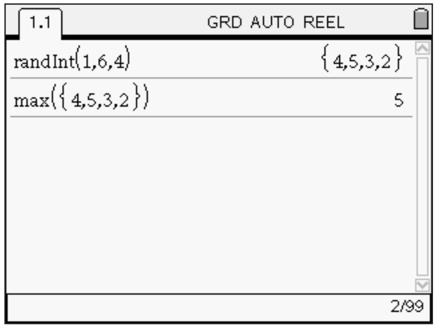




På skærmbilledet til højre er vist, hvordan du simulerer fire kast med én terning. Resultatet skal tolkes således, at du i første kast slår en 6'er, i andet kast en 3'er, i tredje kast en 1'er og i fjerde kast en 5'er.
Hvad er *sandsynligheden* for at få (mindst) én 6'er i 4 kast med en terning ? For at finde ud af dette skal simulationen *randInt*(1,6,4) gentages mange gange, og undervejs skal der holdes regnskab med, om der kommer en 6'er i et af de fire kast eller ej.
Til den slags gentagelser kan sekvensfunktion *seq* benyttes. Hvis du fx vil lave 10 gentagelser af *randInt*(1,6,4) gør du således:

Obs
seq virker i det væsentlige som en løkke i stil med **for** $n = 1$ **to** 10





Hver række i skærmbilledet ovenfor repræsenterer udfaldet af 4 kast med en terning. En optælling i listen (du får måske et andet resultat) viser, at i halvdelen af de 10 gentagelser er der (mindst) én 6'er.

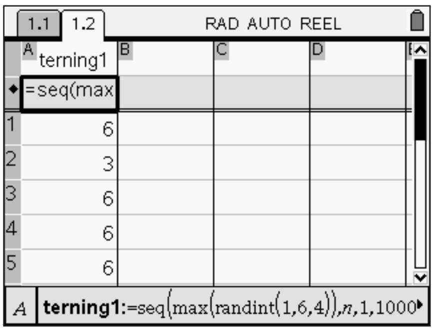
Da det eneste interessante er, om der er en 6'er i udfaldet eller ej, er det tilstrækkeligt at undersøge, om det største element i listen er 6. Hertil er *max*-funktionen nyttig — se skærmbilledet oven for til højre.

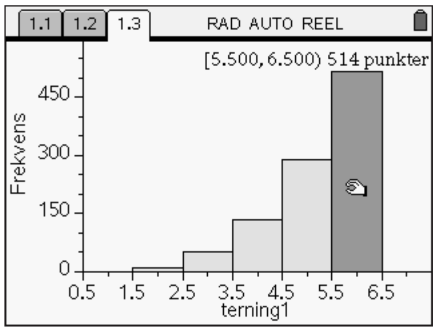
Indsæt et Lister og Regneark værksted, og indtast formlen

$$= seq(\max(randInt(1,6,4)),n,1,1000)$$

i formelfeltet i kolonne A. Dette vil give dig 1000 gentagelser af 4 kast med en terning, hvor kun det største øjental vises:

Tip
I Lister og Regneark kan du nemt foretage en genberegning ved at taste ctrl R. Prøv dette, og få gentegnet histogrammet. Du vil næppe få 514 punkter igen. Det tager lidt tid (et ur-ikon kommer frem).





Indsæt et Data og Statistik værksted, og vælg Histogram som plottype. 514 punkter tyder på, at sandsynligheden er omkring 0.514 for at slå en 6'er i 4 kast med en terning.

Chevalier de Meres problem

Omkring 1650 led Chevalier de Mere svære økonomiske tab som følge af, at han havde ræsonneret sig frem til, at følgende to spil har samme gevinstchance:

Spil 1: Kast en terning 4 gange og indgå et væddemål om at få en 6'er.
Spil 2: Kast to terninger 24 gange, og indgå et væddemål om at få en dobbelt-6'er

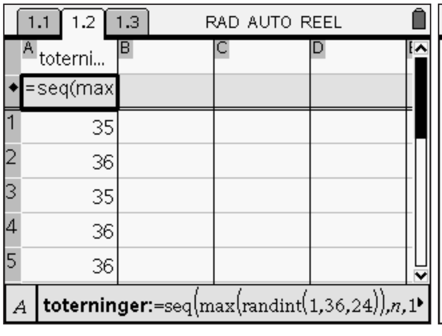
Med andre ord hævder de Mere, at sandsynligheden for, at det lykkes, er større end 0.5 i begge spil. Undersøgelsen i sidste afsnit viser, at sandsynligheden for at spil1 lykkes er omkring 0.514 — og altså større end 0.5.

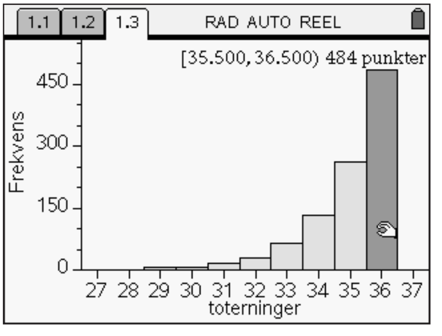
Men hvad med det andet spil?
Basalt set er her tale om et eksperiment med 36 mulige udfald — her systematisk opskrevet:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(6,5),(6,6)\}$$

hvor fx (1,4) skal forstås sådan, at terning1 viser 1 og terning2 viser 4. Hvis terningerne er ægte, så har alle 36 mulige udfald har samme sandsynlighed for at forekomme.

Hvis udfaldene nummereres 1..36, kan et kast med to terninger simuleres ved *randInt*(1,36) og 24 kast med to terninger ved *randInt*(1,36,24).
For at danne dig et skøn over sandsynligheden for at slå en dobbelt-6'er i 24 kast med to terninger, behøver du blot at redigere beregningen, du benyttede ovenfor, en smule:





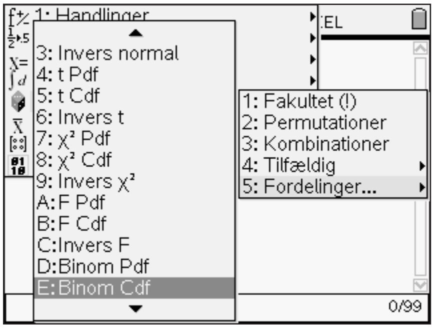
Her ser sandsynligheden ud til at være mindre end 0.5. Prøv at genberegne nogle gange, så du kan blive overbevist om, at sandsynligheden faktisk er mindre end 0.5.

Binomialfordelingen

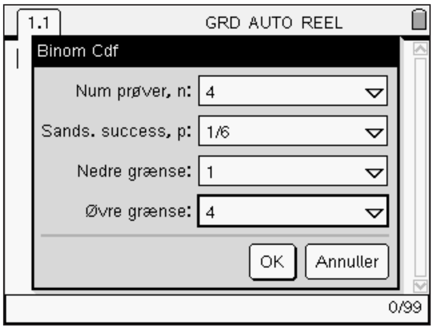
Hvis X betegner antallet af 6'ere i 4 kast med en terning, så er X binomialfordelt med parametrene $n = 4$ og $p = \frac{1}{6}$.

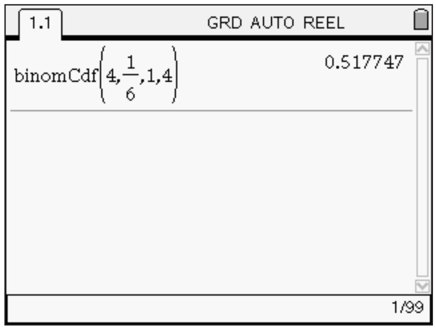
Bestem sandsynligheden for at få mindst én 6'er i 4 kast med en terning. Eller med andre ord, $P(X \geq 1)$.

Indsæt et Grafregner værksted, og vælg (menu) 5:Sandsynlighed ▸ 5:Fordelinger... ▸ E:Binom Cdf.



Dette giver en dialogboks til løsning af binomialfordelingsopgaver. Idet du skal bestemme sandsynligheden for at få *mindst* én 6'er, skal nedre grænse sættes til 1 og øvre grænse til 4. Klik OK, og resultatet står direkte til aflæsning:

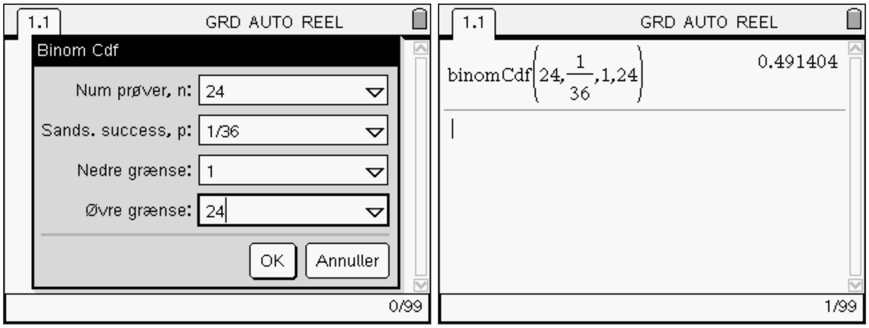




Lad Y betegne antallet af dobbelt 6'ere i 24 slag med to terninger. Så er Y binomialfordelt med parametrene $n = 24$ og $p = \frac{1}{36}$.

Bestem sandsynligheden for at få mindst én dobbelt 6'er i 24 kast med to terninger. Eller med andre ord, $P(Y \geq 1)$.

Gør som før:



At denne sandsynlighed er mindre end 0.5 lærte Chevalier de Mere på den hårde måde. Flere kilder hævder, at han blev så godt som ruineret på dette spil. Han forelagde problemet for en af datidens klogeste hoveder, Blaise Pascal (1623 - 1662), som naturligvis løste det og lagde grundstenen til moderne sandsynlighedsregning.

12 Statistik

Tip
Du finder en eksperimentel tilgang til statistik i Statistik med TI-Nspire CAS af Bjørn Felsager.

Deskriptiv statistik

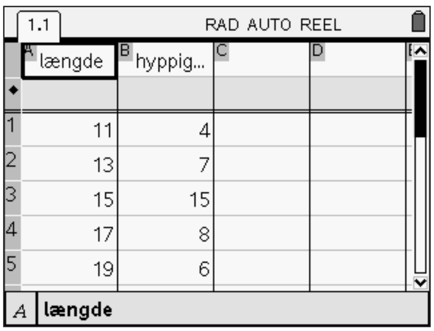
En virksomhed producerer små metalaksler, hvis længde varierer mellem 10 og 20 mm. Der udtages 40 aksler af produktionen, og deres længde måles. De 40 målinger er grupperet i intervaller

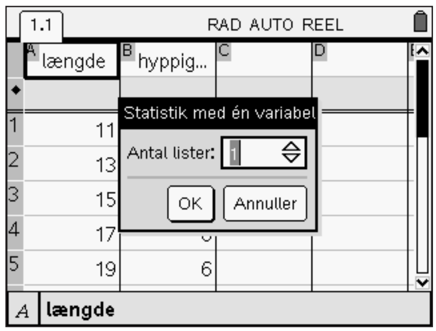
Længde	$]10,12]$	$]12,14]$	$]14,16]$	$]16,18]$	$]18,20]$
Hyppighed	4	7	15	8	6

Find middelværdi og spredning, og undersøg, om observationerne kan antages at være normalfordelte.

Åbn et nyt dokument, og indsæt et Lister og Regnearks værksted. Du kan ikke indtaste intervaller i en kolonne, så indtast i stedet *intervalmidtpunkterne* i kolonne A og hyppighederne i kolonne B. Navngiv kolonnerne som vist.

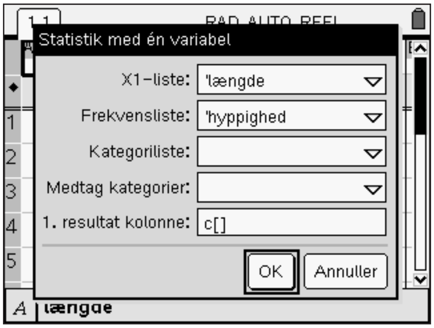
Vælg nu (menu) 4:Statistik ▸ 1:Stat-beregning ▸ 1:Statistik med én variabel.

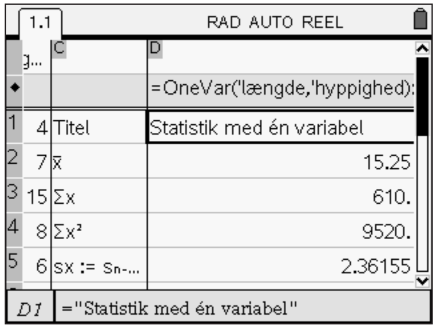




Først kommer et lille vindue frem, hvor du skal angive, hvor mange lister, der skal indgå i statistikken. Vælg her 1 — i modsat fald slås de to lister sammen.

Indstil som vist nedenfor, og statistikken er klar:

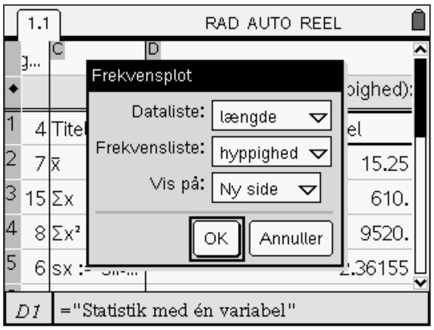


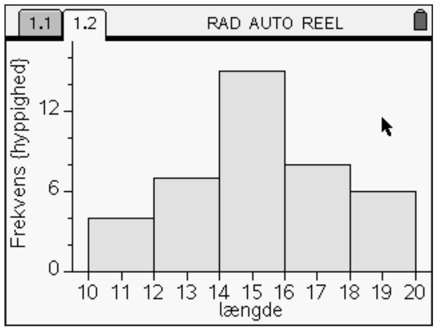


I listen kan du se middelværdien (15.25), og bladrer du ned i listen, kan du blandt meget andet finde spredningen samt kvartilsættet.

For at afbilde data i et histogram vælger du (menu) 3:Data ▸ 5:Frekvensplot. Indstil som vist på skærmbilledet til venstre:

Husk
Du kalder et objekts kontekst menu frem ved at klikke på det, og taste



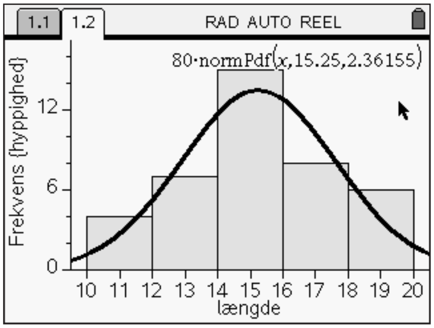


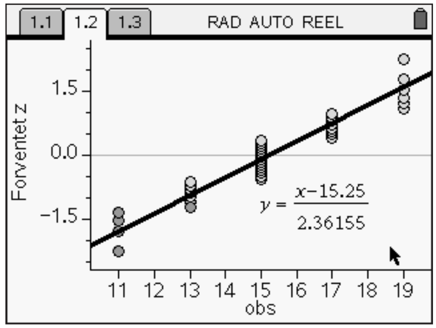
For at få den rette bredde på søjlerne, skal du kalde kontekstmenuen for søjlerne frem. Vælg her 3: Søjleindstillinger, og sæt bredden til 2 og starten til 10. Så får du et histogram som på skærmbilledet ovenfor.

Obs
NormPdf er fordelings-funktionen for normalfordelingen

Du skal nu plotte sandsynlighedsfordelingen for normalfordelingen sammen med histogrammet. Tast (menu) 4:Analyser ▸ 9:Vis normal PDF.

Af skærmbilledet kan du se, at det er funktionen *normPdf* med middelværdi 15.25 og spredning 2.36115, der er tegnet.





På det højre skærmbillede ovenfor er vist et normalfordelingsplot. Plottet ser lidt sært ud, men det skyldes, at observationerne i hvert interval er samlet i intervalmidtpunktet. Havde du haft de rå data (inden gruppering) til rådighed, ville du se punkterne ligge pænt omkring den rette linje.

Plottet er ikke helt simpelt at lave, da du ikke umiddelbart kan ændre visningsformatet for histogrammet til et normalfordelingsplot, men her er en opskrift:

Gå Lister og Regneark værkstedet. Inden du kan afbilde data, skal du ekspandere disse, så observationen 11 optræder 4 gange, observationen 13 optræder 7 gange, osv. Det gør du ved at indtaste formlen

=freqTable ▸ list(længde,hyppighed)

i formelfeltet i kolonne C (eller en anden tom kolonne). Navngiv denne kolonne *obs*.

Tip
Du kan indsætte en tom kolonne ved at placere markøren, hvor den tomme kolonne skal indsættes, og taste menu 2:Indsæt ▸ 3: Kolonne

Kommandoen *freqTable ▸ list* indsætter du fra Kataloget og variablerne *længde* og *hyppighed* indsætter du nemmest med sto▸ var.

Normalfordelingsplottet laver du ved at indsætte et nyt Data og Statistik værksted, knytte variablen *obs* til x-aksen og vælge menu 1:Plottype ▸ 4:Normalfordelingsplot.

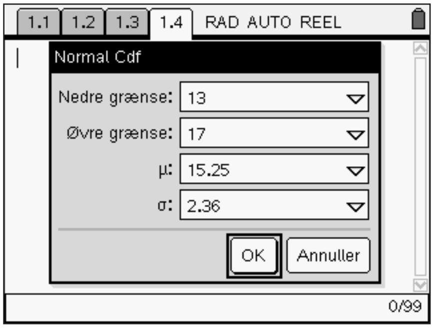
Obs
NormCdf er den kummulerede fordelingfunktion for normalfordelingen.

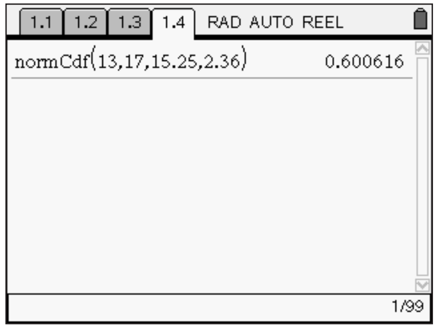
Antag, at længden af metalakslerne er normalfordelt med middelværdi $\mu = 15.25$ og spredning $\sigma = 2.36$.
Hvor mange procent af metalakslerne har en længde mellem 13mm og 17mm?

Indsæt et Grafregner værksted, og hent *NormalCdf* i kataloget. Udfyld som vist, og du finder, at ca. 60% af metalakslerne har en længde mellem 13mm og 17mm:

Obs
Sørg for, at feltet ☑ **Brug guide** er markeret

Tip
Du kan indsætte μ og σ fra listerne som hhv. stat.x og stat.sx

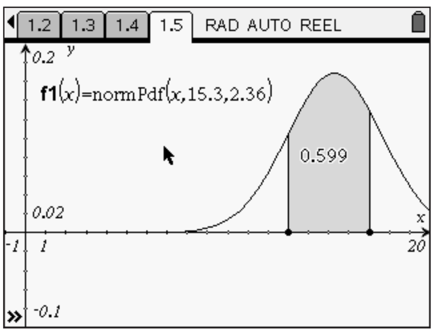


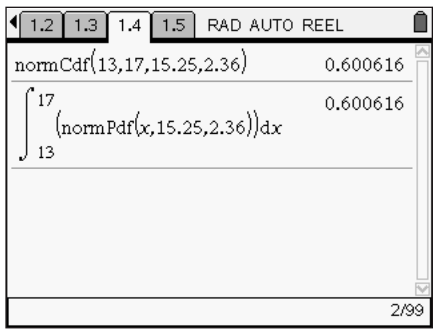


Du kan komme frem til dette resultat på mange måder. Husk, at det, der skal bestemmes, er arealet under normalfordelingen (*normPDF* med $\mu = 15.25$ og $\sigma = 2.36$) i intervallet [13,17].

Neden for ser du dette illustreret dels grafisk, og dels ved en beregning i Grafregner værkstedet:

Tip
Du kan også lave denne arealbestemmelse i Data og Statistik værkstedet med (menu) 4:Analyser ▸ 5: Skraver under funktion, men her kan du ikke indtaste grænserne 13 og 17.





Konfidensinterval og hypotesetest

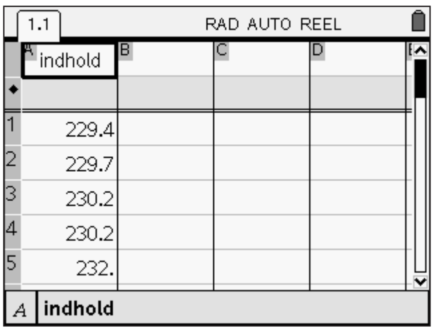
En kaffeautomat skal fylde 23 cl kaffe i et krus ved brygningen. Virksomheden, der producerer automaten, vil teste denne inden den sælges. Den mænge kaffe, automaten hælder i et krus, vides at være normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ = 1.5ml.
For at teste automaten har man ladet den brygge 20 krus kaffe, og målt indholdet:

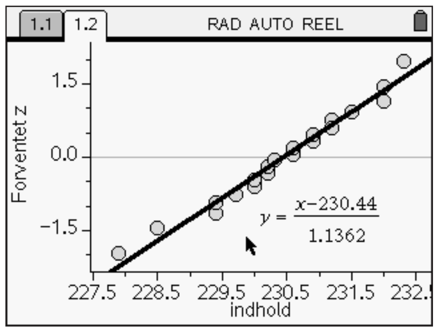
229.4	229.7	230.2	230.2	232.0	231.2	230.0	230.6	230.0	229.4
230.9	228.5	231.5	230.9	231.2	227.9	230.6	232.0	230.3	232.3

Find 90% konfidensintervallet for populationsmiddelværdien μ af den mænge kaffe, der serveres af automaten

Antyder ovenstående målinger, at populationsmiddelværdien μ er forskellig fra 230 ml?

Start med at indtaste måleresultaterne i en søjle i et Lister og Regneark værksted, og navngiv søjlen *indhold*, og tag lige et kig på et normalfordelingsplot i et Data og Statistik værksted:



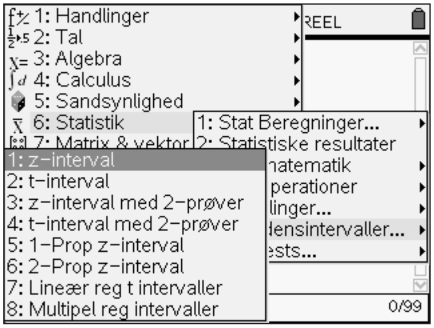


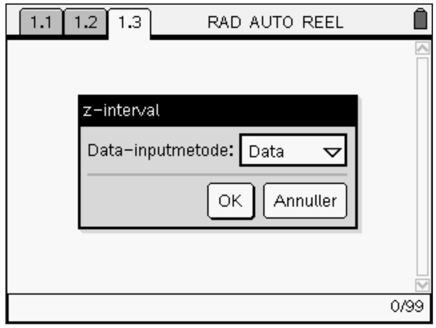
Obs
z-interval skal benyttes her, da der er tale om en normalfordeling med <u>kendt</u> varians.

Normalfordelingsplottet viser, at stikprøven på de 20 krus kaffe afspejler antagelsen om, at kaffeindholdet er normalfordelt.

Opret et Grafregner værksted, og vælg (menu) 6:Statistik ▸ 6:Konfidensintervaller... ▸ 1: z-interval, og vælg Data i næste skærmbillede:

Tip
I stedet for Data kan du vælge Statistik. Dette valg kræver, at du kender stikprøve middelværdien (x-bar)

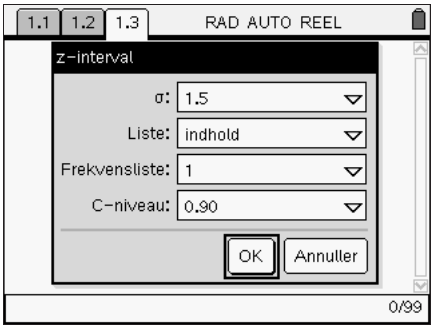


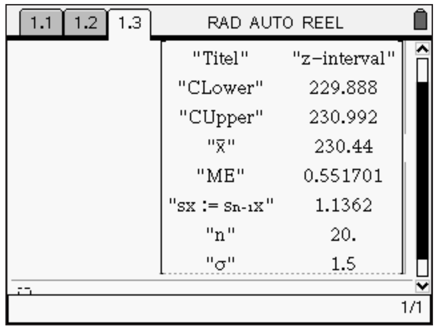


Fyld ud som vist, og afslut med OK:

Obs
Standardafvigelsen i stikprøven udregnes med formlen

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$





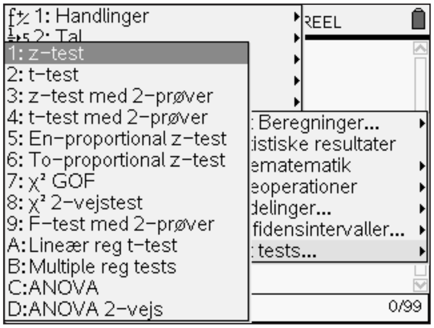
Af det højre skærmbillede ser du, at konfidensintervallet er $[229.888\,,\,230.992]$. Desuden fremgår, at stikprøvemiddelværdien er $\bar{x} = 230.44$ og at standardafvigelsen i stikprøven er $s_x = 1.1362$.

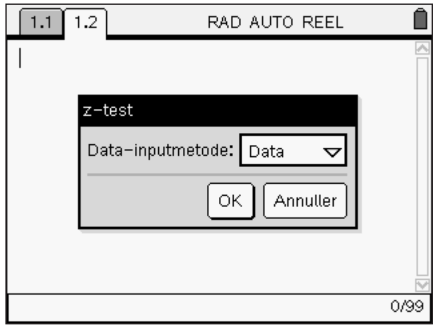
For at besvare det andet spørgsmål, skal du teste hypotesen H_0: $\mu = 230$ mod alternativet H_a: $\mu \neq 230$ på niveau 10%.

Da populationsmiddelværdien μ ligger i 90% konfidensintervallet $[229.888\,,\,230.992]$, du fandt ovenfor, kan du <u>ikke</u> kan forkaste hypotesen H_0. Du kan dermed konkludere, at der ikke er noget der indikerer, at populationsmiddelværdien μ er forskellig fra 230 ml.

Normalfordelingstest (σ kendt)

En anden mulighed for at udføre ovenstående test i normalfordelingen finder du i (menu) 6:Statistik ▸ 7:Stat tests... ▸ 1: z-test. Vælg Data i andet skærmbillede:



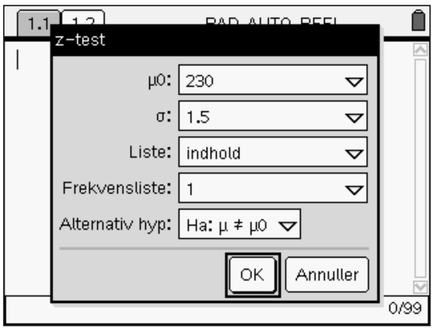


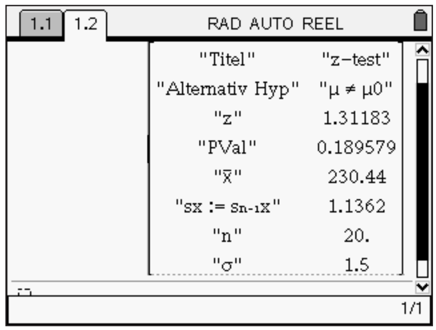
Obs
Teststørrelsen z udregnes således:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

hvor $\bar{x}$ er stikprøve middelværdien og n er stikprøve størrelsen.
z er normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1.

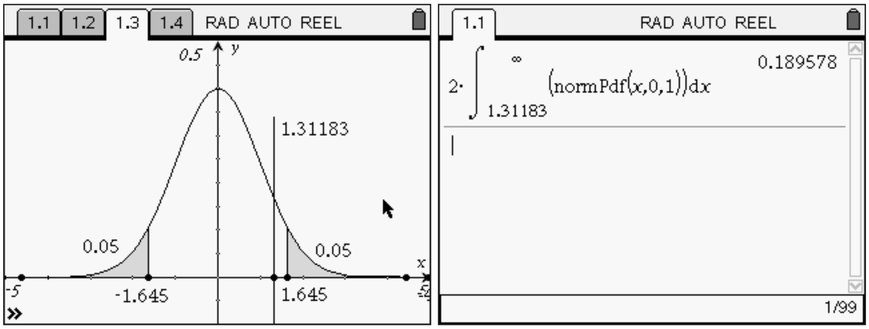
Fyld ud som vist, og afslut med OK:





De fleste værdier på det sidste skæmbillede kender du allerede. De to nye, z og *PVal*, bruges til at afgøre, om en hypotese skal forkastes eller ej.

Teststørrelsen z er nomalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1. Da vi ønsker at teste på niveau 10%, vil kritiske værder for z befinde sig i de to 5% - haler i normalfordelingen:



Af det venstre skærmbillede fremgår, at teststørrelsen z ligger i acceptområdet. Grænserne for de kritiske områder bestemmes som vist i skærmbilledet til højre.
Til højre er vist, hvad værdien PVal betyder: Hvis hypotesen forkastes, så er sandsynligheden for, at vi forkaster en sand hypotese ca. 18.96% (fejl af 1. art)

Hypotesen forkastes på niveau $\alpha = 10\%$, hvis

$$|z| \geq invnorm(1 - ½\alpha) = invnorm(0.95) = 1.645$$

eller (og det er det samme) hvis

$$PVal \leq \alpha = 0.1$$

Du kan således ikke forkaste hypotesen på det foreliggende grundlag.

Normalfordelingstest (σ ukendt)

En skole har undersøgt 25 elevers brug af skolens internet i en uge. Antallet af timer brugt på internettet i en uge blev registreret til:

5.0	4.4	5.7	5.6	5.5	5.2	5.0	4.8	3.6	4.1	4.6	4.9	4.0
6.7	5.5	5.4	6.7	5.8	5.4	4.8	5.9	5.1	3.8	4.1	6.7	

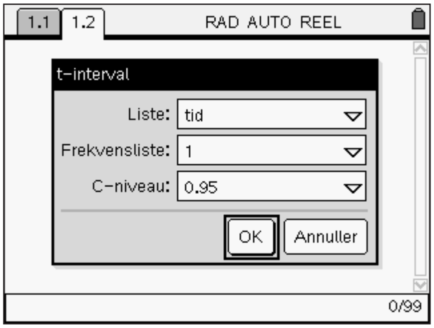
Antag, at den tid, skolens elever (populationen) bruger på internettet i en uge er normalfordelt.

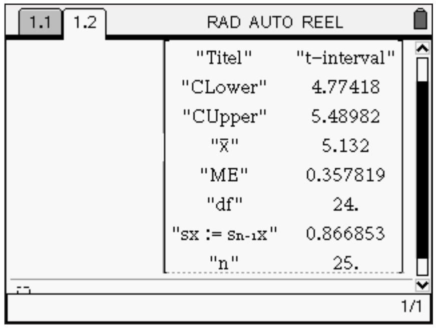
Find 95% konfidensintervallet for stikprøve middelværdien.

Er der indikation for — på niveau 5% — at skolens elever bruger mere end 5 timer på Internettet ?

Obs
Da populationen er normalfordelt med ukendt spredning, skal en *t*-test benyttes

Indtast data i et Lister og Regneark værksted — kald kolonnen *tid* — og beregn *t*-konfidensintervallet (præcis som du gjorde ved *z*-testen) i et Grafregner værksted:





Obs
Du kan ikke benytte konfidens-intervallet til denne test. Det skyldes, at testen her er en-sidet.

Her kan du se, at t-konfidensintervallet er $[4.77418, 5.48982]$.

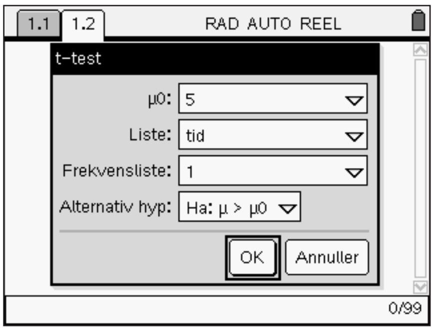
For at besvare det andet spørgsmål, skal du teste hypotesen H_0: $\mu = 5$ mod alternativet H_a: $\mu > 5$ på niveau 5%.

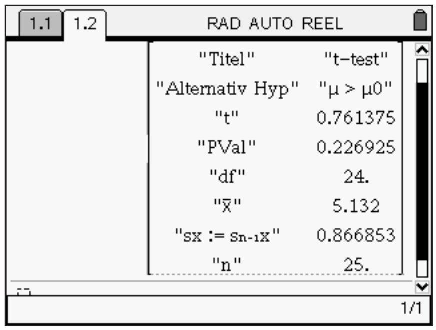
Lav en *t*-test: (menu) 6:Statistik ▸ 7:Stat tests... ▸ 2: t-test.Gå frem som ved z-testen, og indstil således:

Obs
Teststørrelsen *t* udregnes således:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{sx}{\sqrt{n}}}$$

hvor er stikprøve middelværdien, *sx* standardafvigelsen og *n* er stikprøve størrelsen.
t er t-fordelt med 24 frihedsgrader





Hypotesen forkastes på niveau $\alpha = 5\%$, hvis

$$t \geq invt(1 - \alpha , 24) = invt(0.95 , 24) = 1.71088$$

eller (hvad der er det samme) hvis

$$PVal \leq \alpha = 0.05$$

Obs
invt er den inverse t-fordeling. 24 er antallet af frihedsgrader (df).

Du kan således ikke forkaste hypotesen $\mu = 5$ på det foreliggende grundlag.

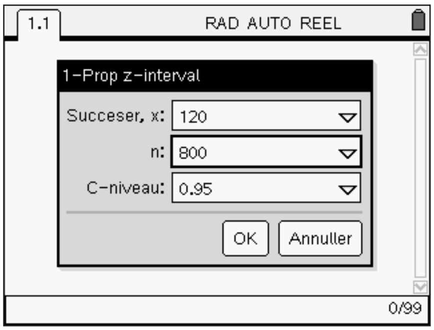
Opinionsundersøgelser

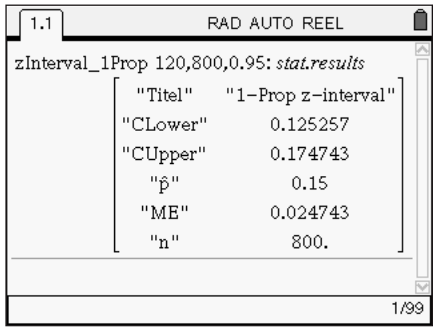
Ved sidste folketingsvalg fik Dansk Folkeparti 13.8% af stemmerne. I en opinionsundersøgelse spørger man 800 tilfældigt udvalgte danskere med stemmeret, hvor de vil sætte deres kryds, hvis der var valg i morgen. 120 af de adspurgte vil stemme på DF.

Giver dette resultat en indikation for, at DF har ændret vælgertilslutning ?

Med TI-Nspire CAS går den slags hypotesetest som en leg. Du kan fx starte med at finde konfidensintervallet:

I et Grafregner værksted vælger du menu 6:Statistik ▸ 6:Konfidensintervaller... ▸ 5:1-Prop z-interval, og udfylder som vist:





Disse resultater viser, at stikprøveprocentdelen er 15% og at konfidensintervallet er [0.125257,0.174743]. Dvs., at med med 95% sikkerhed, vil den sande procentdel for populationen vil ligge mellem 12.5% og 17.5% .

Hypotesen

H_0: DF har uændret vælgertilslutning

kan altså ikke forkastes på det foreliggende grundlag

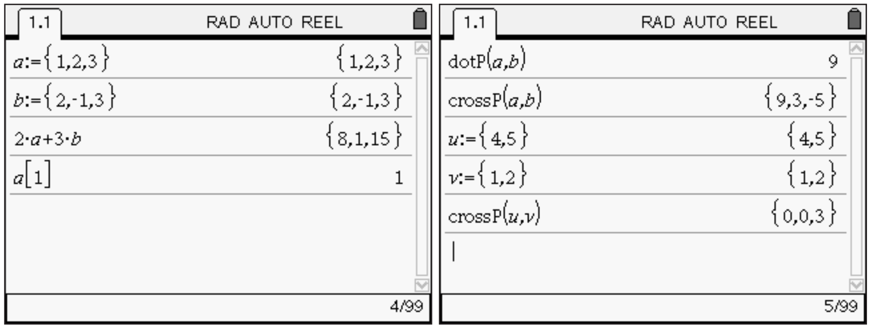
Du kan naturligvis også teste hypotesen direkte ved at vælge menu 6:Statistik ▸ 7:Stat test... ▸ 5:1-Prop z-test

13 Vektorregning

Vektorer som lister

En vektor laves nemmest som en liste på TI-Nspire CAS. I nedenstående skærmbillede ser du, hvordan du definerer vektorer og laver en simpel udregning med dem. Husk at listens elementer adskilles med komma, altså {1,2,3}:

Tip
Krydsproduktet er defineret i både 2 og 3 dimensioner. I 2 dimensioner er krydsproduktet en 3-dimensional vektor, der peger op ad z-aksen.



Tip
dotP og crossP kan findes i Kataloget eller indsættes via menu 7:Matrix & vektor ▸ C:Vektor ▸ 2:Krydsprodukt eller 3:Prikprodukt.

Som det ses, er det helt problemfrit at lægge vektorer sammen og gange dem med skalarer. Det er også ganske nemt at få adgang til koordinaterne i en vektor — fx er a[1] førstekoordinaten i a.
TI-Nspire CAS er udstyret med to funktioner til udregning af prikprodukt og krydsprodukt. Funktionerne hedder DotP og CrossP, hhv. Se det højre skærmbillede.

Det er stort set også, hvad TI-Nspire CAS indeholder til vektorregning — resten må du selv lave.

Baseret på de velkendte formler

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \qquad \text{og} \qquad \cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

kan du nemt definere en længde- og en vinkelfunktion:

Indsæt et nyt dokument og indsæt et Grafregner værksted. Start med at definere længden af en vektor med

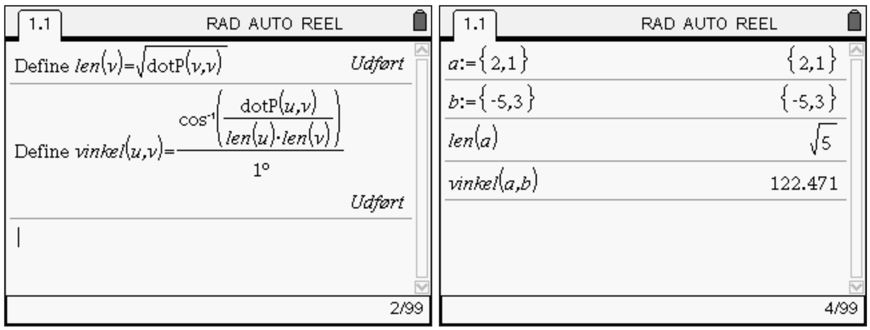
$$\text{Define } len(v) = \sqrt{v \cdot v}$$

Tip
Fidusen ved at dividere med 1° er, at du får resultatet ud i grader, selvom indstillingen RAD

og vinklen mellem to vektorer ved

$$\text{Define } vinkel(u,v) = \frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{dotP(u,v)}{len(u)\cdot len(v)}\right)}{1°}$$

Define skriver du nemmest med (menu) 1:Handlinger ▸ 1:Definer



I skærmbilledet er vist et lille eksempel på, hvordan det virker. Her bestemmes længden af en vektor og vinklen mellem to vektorer (vinkelberegningen er afsluttet med (ctrl)(enter)).

På samme måde kan du definere funktioner, der udfører andre standardberegninger i vektorregning, som fx projektion, afstanden fra punkt til linje osv. Problemet er blot, at disse funktioner kun lever i det dokument, hvor de er defineret.

Tip
Du kan naturligvis overføre biblioteksdokumentet fra en pc til din håndholdte - eller fra en anden håndholdt

For at få disse funktioner defineret en gang for alle, og så du kan få adgang til dem i Kataloget, skal der oprettes et biblioteksdokument, hvor funktionerne er oprettet som biblioteksobjekter. Hvordan alt dette laves, kan du læse sidst i dette kapitel.

I det følgende vil vi antage, at biblioteksdokumentet *vektor* er installeret på din håndholdte. På næste side kan du se en oversigt over, hvilke standardberegninger der er med i *vektor*.

TI-Nspire CAS funktion	**Formel**
Længden af en vektor v Define $len(v)=\sqrt{v\cdot v}$	$\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$
Vinklen mellem to vektorer u og v Define $vinkel(u,v)=\dfrac{\cos^{-1}\left(\dfrac{dotP(u,v)}{len(u)\cdot len(v)}\right)}{1°}$	$\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}\right)$
Projektion af en vektor u på en vektor v Define $proj(u,v)=\dfrac{dotP(u,v)}{dotP(v,v)}\cdot v$	$\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}\cdot\vec{v}$
Afstand fra et punkt P til et punkt Q Define $dist(P,Q)=len(Q-P)$	$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$
Afstand fra et punkt P til en plan (med ankerpunkt P0 og normalvektor n) Define $distp(P,P0,n)=\dfrac{abs(dotP(n,P-P0))}{len(n)}$	$\dfrac{\lvert\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$
Afstand fra et punkt P til linje *l* (med ankerpunkt P0 og retningsvektor r) Define $distl(P,P0,r)=\dfrac{len(crossP(r,P-P0))}{len(r)}$	$\dfrac{\lvert\vec{u}\times\overrightarrow{P_0P}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$
Afstand fra et linje *l* til en linje *m* (med ankerpunkter P0 og Q0, og retningsvektorer u og v) Define $distll(P0,u,Q0,v)=\dfrac{abs(dotP(crossP(u,v),Q0-P0))}{len(crossP(u,v))}$	$\dfrac{\lvert(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$
Areal af parallelogram udspændt af u og v Define $areal(u,v)=len(crossP(u,v))$	$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$

Eksempler på brug af vektorbiblioteket

I et koordinatsystem i rummet er der givet 3 vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestem et gradtal for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{c}$.

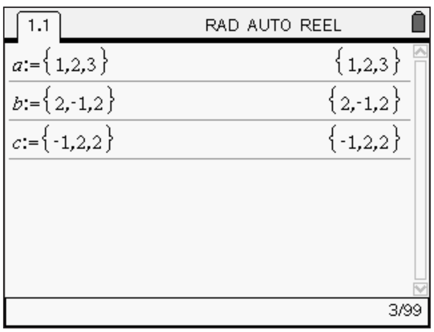
c) Bestem tallene s og t, således at vektoren

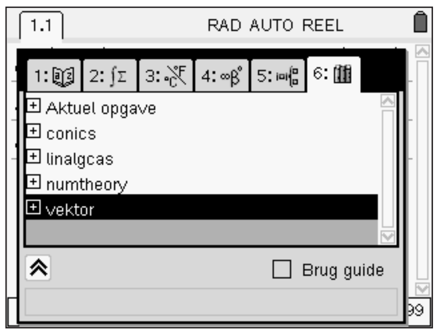
$$\vec{d} = \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

står vinkelret på både $\vec{b}$ og $\vec{c}$, og angiv koordinaterne for $\vec{d}$.

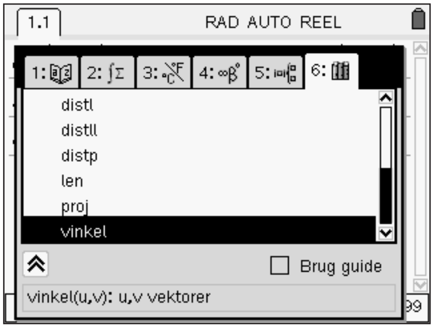
I dette eksempel antages, at du har installeret vektorbiblioteket i et omfang svarende til vejledningen i næste afsnit, og at dine biblioteker er opdaterede.

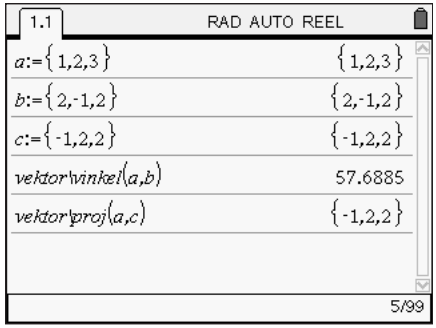
Definer først de tre vektorer. Funktionen *vinkel* indsætter du fra Kataloget: Tast 6, og en liste over dine biblioteksfiler vil komme frem. I listen finder du vektor (højre skærmbillede):





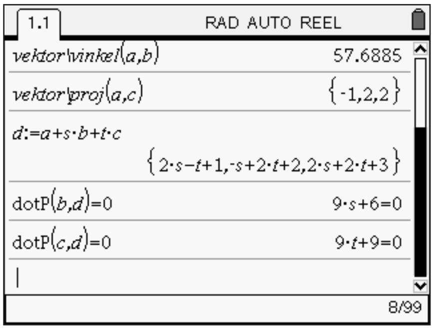
Tast ▸ for at åbne for listen af programmer i vektor. I listen bladrer du ned til vinkel, og taster Enter. TI-Nspire CAS vil da indsætte kommandoen vektor\vinkel( ) på markørens position:

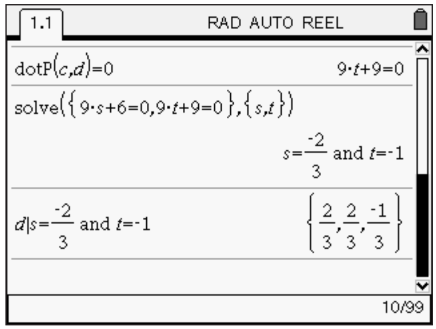




Hermed er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt. Tilsvarende er koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{c}$ bestemt.

Definer $\vec{d}$ som beskrevet i opgaven, og benyt skalarproduktet til at udtrykke, at $\vec{d}$ vinkelret på både $\vec{b}$ og $\vec{c}$:





I det højre skærmbillede er det fremkomne ligningssystem løst og koordinaterne for $\vec{d}$ er bestemt.

Læg mærke til, at formen på løsningen fra ligningssystemet er som skabt til at skulle substitueres i $\vec{d}$. Til dette formål er given-operatoren (|) benyttet.

I et koordinatsystem i rummet er givet et punkt $P(5,4,3)$. To linjer l og m er bestemt ved:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in R$$

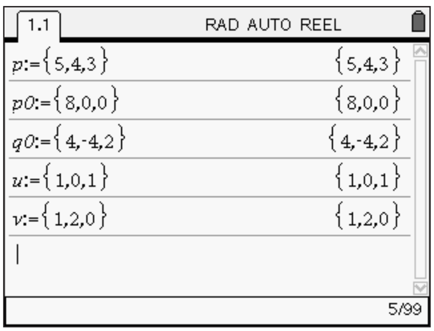
a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder P og l.

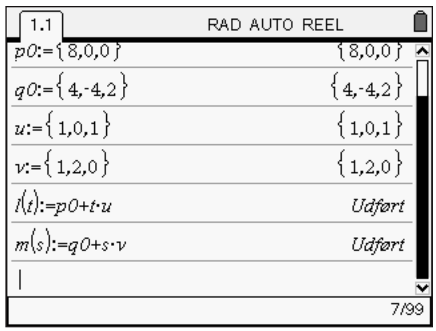
b) Find koordinatsættet til m's skæringspunkt med α.

c) Bestem et gradtal for den spidse vinkel, som m danner med α.

d) Bestem parameterfremstillingen for den linje, der går gennem P og skærer både l og m.

Først laves en række tildelinger, hvorefter de to parameterfremstillinger defineres som funktioner af t:





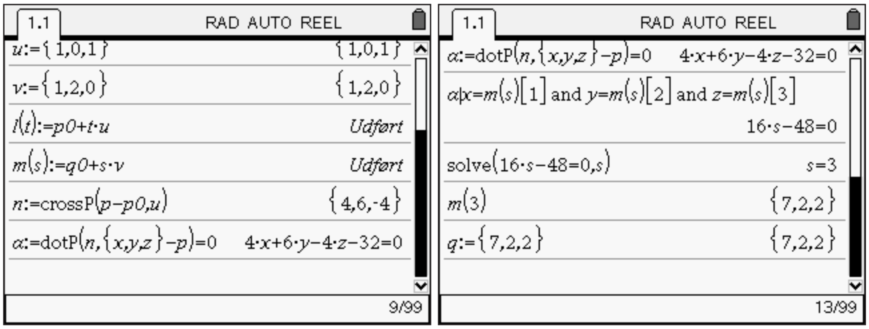
Ligning for den plan α, der indeholder P og l kan bestemmes således: Først finder du normalvektoren ved

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}$$

og ligningen for planen ved:

$$\alpha:\ \vec{n}\cdot\begin{pmatrix} x-5 \\ y-4 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$$

Det laver du således på TI-Nspire CAS:



For at finde koordinatsættet til *m*'s skæringspunkt med α, skal du indsætte parameterfremstillingen for *m* i planens ligning. Du får fat i første koordinaten i *m'*s parameterfremstilling ved at skrive m(s)[1] og tilsvarende for de øvrige koordinater.

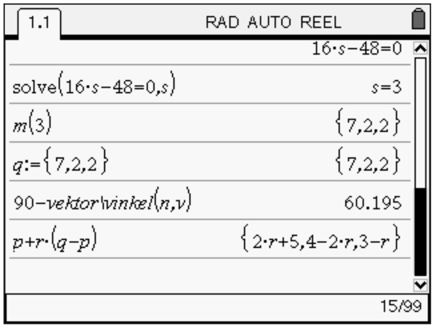
Gør således: Kopier planens ligning til indtastningslinjen (eller skriv blot α) og tilføj

|x=m(s)[1] and y=m(s)[2] and z=m(s)[3]

efter ligningen. Så vil du få parameterfremstillingen for *m* indsat i planens ligning. Det en triviel sag at løse den ligning, der kommer frem. Skæringspunktet mellem *m* og α er altså {7,2,2}. Dette punkt kaldes q (højre skærmbillede ovenfor).

Vinklen, som *m* danner med α, findes let med funktionen vinkel fra vektor-biblioteket.

Den linje, der går gennem *P* og skærer både *l* og *m*, må gå igennem *m'*s skæringspunkt med α — altså q. Dvs., du skal blot finde parameterfremstillingen for linjen gennem p og q. Se skærmbilledet nedenfor, hvor r er benyttet som parameter:



Bemærkning:
Man kunne lige så vel have benyttet matricer til vektorer — enten som rækkevektorer eller som søjlevektorer. Men der vindes ikke ret meget derved.

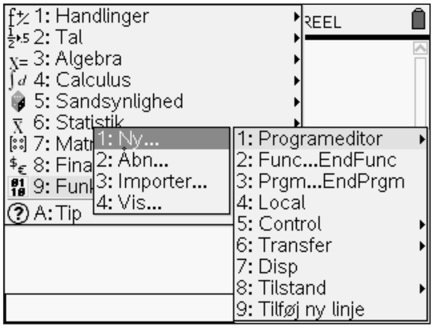
Rækkevektorer indtastes med kantede parenteser og komma som separator. Søjlevektorer indtastes også med kantede parenteser, men med semikolon som separator.
Addition og skalarmultiplikation fungerer som forventet, i kraft af at vektorerne her opfattes som matricer. Derimod fungerer multiplikation ikke, da spillereglerne for matrixmultiplikation ikke overholdes. Her er man altså også nødt til henvise til dotP for skalarprodukt og crossP for krydsprodukt.

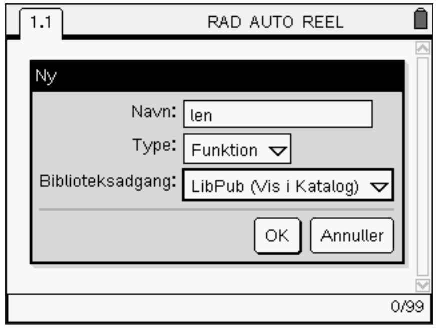
Gevinsten ved at benytte matricer er, at så har vi automatisk længden af en vektor til rådighed, nemlig Norm( ). Denne virker imidlertid kun på matricer — ikke på lister. Den norm, len( ), vi har defineret, virker på såvel lister som på matrix-vektorer. Det samme gælder i øvrigt for alle de regneoperationer, der er beskrevet i vektor-biblioteket.

Endelig findes kommandoen UnitV( ), der returnerer en enhedsvektor med samme retning som en given matrix-vektor. Skulle der opstå behov for denne i forbindelse med liste-vektorer, er det ingen sag at definere denne.

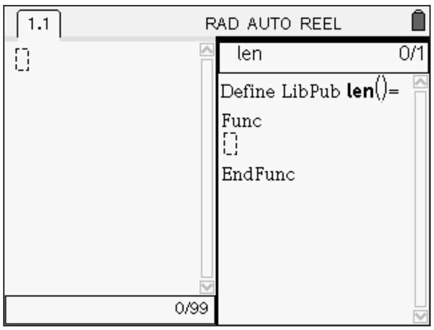
Opret et vektorbibliotek

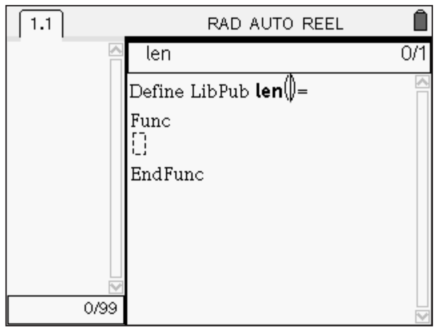
Opret et nyt dokument og tilføj en Grafregner værksted. Tryk (menu) 9:Funktioner & programmer ▸ 1:Programeditor ▸ 1:Ny





I Ny-dialogen skriver du navnet på den funktion du vil programmere — her *len*. Type og Biblioteksadgang indstiller du som vist. Tryk OK, og du får dit vindue delt i to: Grafregner værkstedet til venstre og den (aktive) programeditor til højre. Programeditoren er allerede udfyldt med start og slut på programmet.

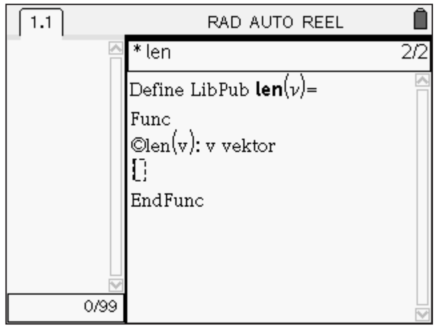




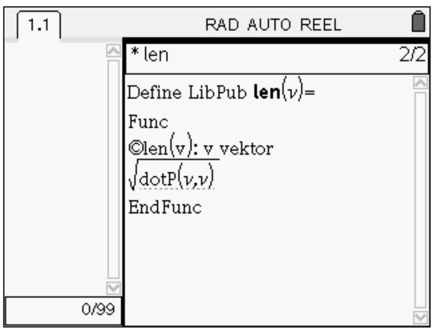
Ved at vælge 🔧 5:Sidelayout ▸ 1:Brugerdefineret opdeling kan du trække skillelinjen mellem de to vinduer, så du nemmere kan arbejde i programeditoren — ofte er dette dog ikke nødvendigt (heller ikke her). På skærmbilledet til højre er denne ændring foretaget.

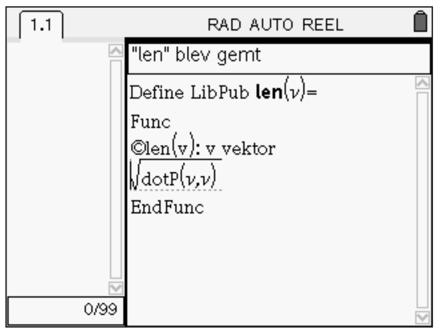
Følg nedenstående punkter for at lave programmet:

1) Indsæt et **v** i parameterlisten, og tast ▼.
2) Tryk menu 1:Handlinger ▶ 8:Indsæt kommentar. Der indsættes © som start på linjen for at markere, at denne linje er en kommentar. Hvad der står her er uden betydning for selve programmet, men det er en god ide at skrive syntaksen for funktionen her. Denne syntaks vil blive vist når du indsætter fra Katalog. Skriv fx len(v): v vektor — afslut med enter:



3) Indtast nu udtrykket, der bestemmer længden af v: $\sqrt{\text{dotP}(v,v)}$



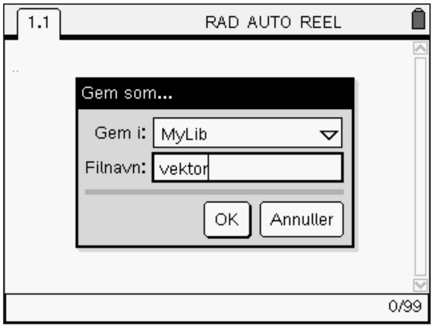


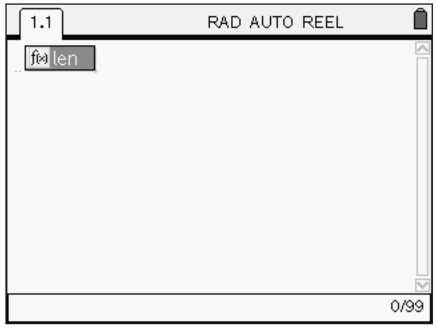
4) Programmet er nu færdigindtastet, men inden det kan gemmes skal programmet checkes for syntaksfejl. Vælg hertil menu 2:Kontroller syntaks og gem ▶ 1:Kontroller syntaks og gem. Er programmet i orden, vil du se meddelelsen *"len" blev gemt*, hvis ikke, så vil en dialog informere dig om fejlen, og du må tilbage og rette.

   Luk programeditoren med menu 1:Handlinger ▶ D:Luk.

5) Inden du indtaster flere programmer, er det klogt at gemme det dokument programmet er knyttet til. At du har gemt programmet len betyder ikke, at selve dokumentet er gemt.

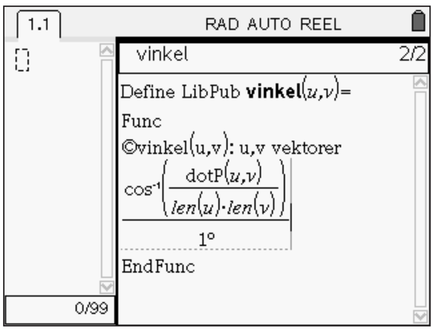
   Vælg 🔧 1:Filer ▸ 4:Gem som... Filen skal gemmes i mappen *MyLib*, som du vælger i listen. Som filnavn indtaster du *vektor*:

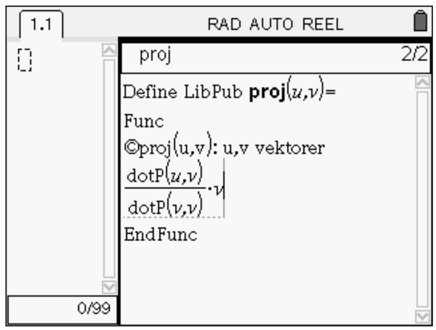


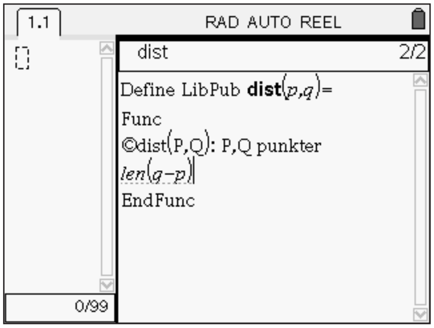


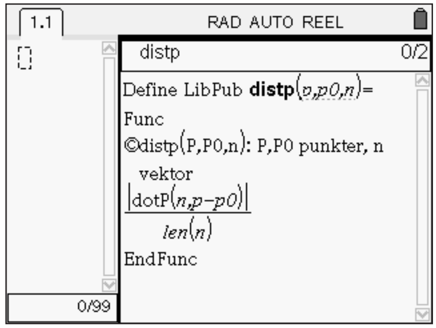
6) Dit dokument vektor består på nuværende tidspunkt af et tomt Grafregner værksted, men med adgang til funktionen len. Det kan du se ved at taste [sto→ var] (højre skærmbillede ovenfor).

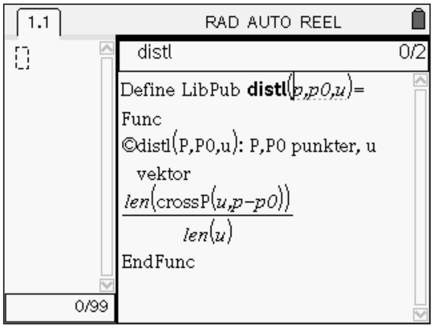
7) De øvrige funktioner indtastes tilsvarende. Nedenfor er blot vist de enkelte skærmbilleder med programmet indtastet

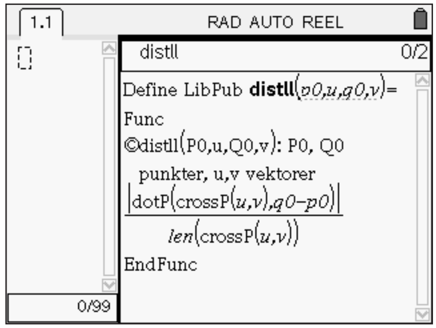


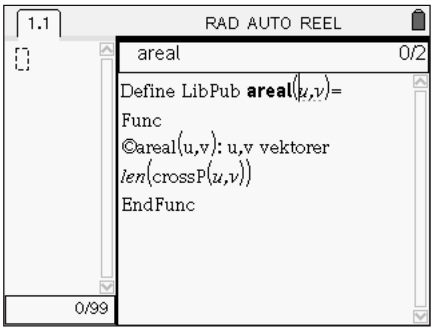


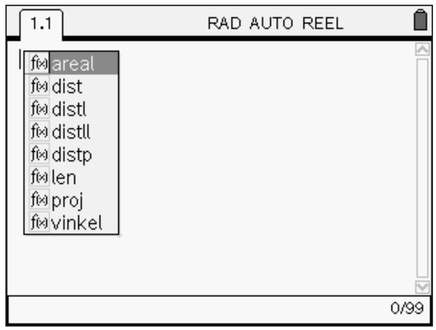










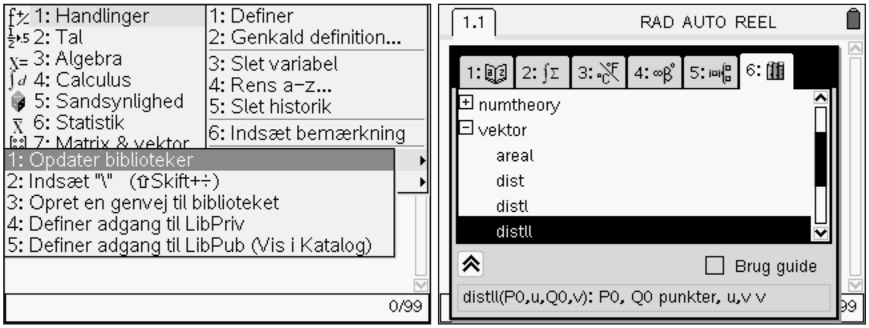


Check, at alle funktioner er på plads ved i Grafregner værkstedet at taste [sto→ var]. Du skulle gerne se en liste som på det højre skærmbillede ovenfor.

Gem dokumentet *vektor* med 1:Filer ▸ 4:Gem.

8) Inden du kan bruge funktionerne fra vektor-dokumentet i andre dokumenter skal du opdatere bibliotekerne.

Tryk (menu) 1:Handlinger ▶ 7:Bibliotek ▶ 1:Opdater biblioteker



9) Efter at bibliotekerne er opdateret opretter du et nyt dokument med et Grafregner værksted. Her trykker du (katalog) 6, og en liste over biblioteksfiler vil komme frem. I listen skulle du gerne finde *vektor* (højre skærmbillede). Du åbner for indholdet ved at taste ▶.

Du kan naturligvis udvide dit vektor-dokument med nye funktioner, som tilføjes efter de retningslinjer der er beskrevet ovenfor.

Skal det være rigtig fint, så kan du udstyre dit vektor-dokument med et Noter værksted, hvor du i detaljer beskriver, hvordan de enkelte funktioner virker. Du kan eventuelt søge inspiration i et af de biblioteksdokumenter, der allerede findes på din TI-Nspire CAS.

14 Differentialligninger

1. ordens differentialligninger

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 1. ordens differentialligning foregår på TI-Nspire CAS:

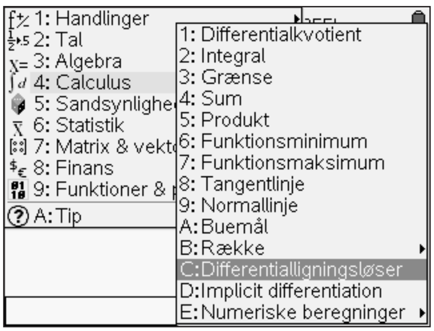
Småkager bages ved 225º. Når de tages ud af ovnen, stilles de til afkøling i et 20º varmt rum. Lader vi *y(t)* betegne småkagernes temperatur til tiden *t*, vil den hastighed, hvormed afkølingen sker, være bestemt ved differentialligningen:

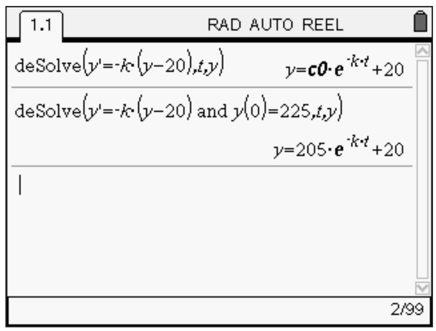
$$y' = -k \cdot (y - 20)$$

Løs differentialligningen og bestem konstanten *k* idet det oplyses, at temperaturen er faldet til 150º efter 1 minut.

Til symbolsk løsning af denne differentialligning skal du benytte værktøjet deSolve (der findes under (menu) 4:Calculus ▸ C:Differentialligningsløser).

Obs
Læg mærke til syntaksen i deSolve: Først indtastes ligningen, derefter den uafhængige variabel og til slut den variabel, der skal løses med hensyn til.

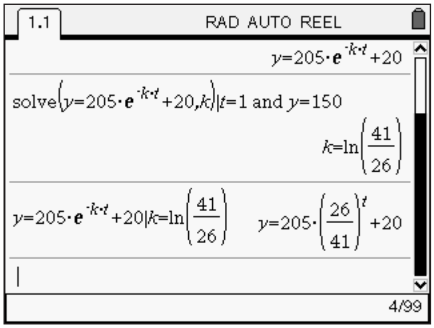




Obs
c0 skal tolkes som en arbitrær konstant. Du kan få værdier fra ***c0*** til ***c255***.

I det højre skærmbillede nedenfor er ligningen først løst uden bibetingelser af nogen art og dernæst er tilføjet bibetingelsen y(0) = 225.
Ved at tilføje bibetingelsen direkte i deSolve slipper du altså for selv at skulle bestemme den arbitrære konstant ***c0***, der optræder i løsningen uden bibetingelser.

Du mangler blot at bestemme k. Dette sker ved at indsætte $t = 1$ og $y = 150$ i ligningen $y = 205 \cdot e^{-k \cdot t} + 20$, og løse denne mht. k. Dette kan du klare i én indtastning ved brug af given-operatoren ⓘ. Brug også given-operatoren til at indsætte den fundne k-værdi i løsningen:



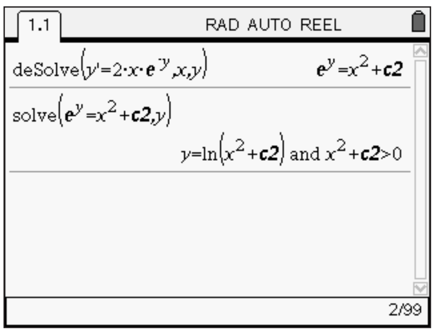
Så let går det dog langtfra altid. Ofte vil deSolve kun kun give løsningen y til differentialligningen implicit, hvorefter solve kan bruges til at isolere y — om alt går vel.

Løs differentialligningen

$$y' = 2x \cdot e^{-y}$$

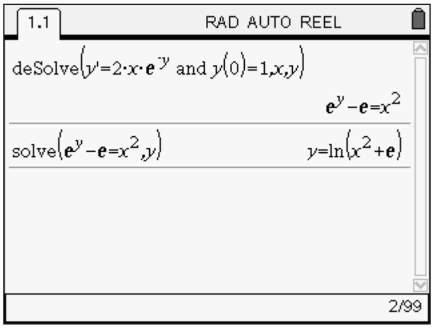
med bibetingelserne hhv. $y(0) = 1$ og $y(1) = -1$.

Som det ses af skærmbilledet nedenfor får du i dette tilfælde kun løsningen givet implicit som $e^y = x^2 + c$, hvor c er en konstant, og kun hvis du tvinger maskinen til det, regner den videre:

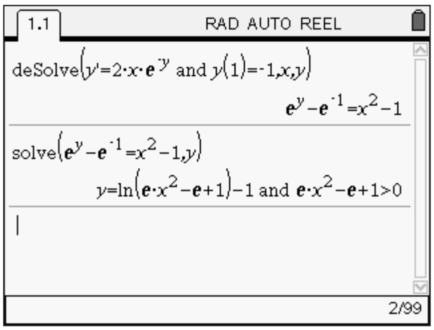


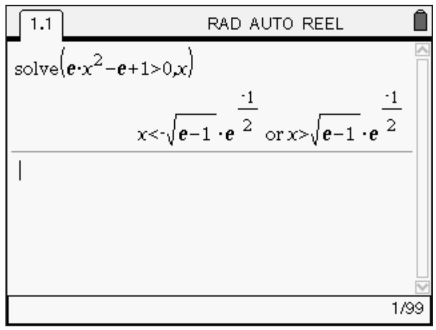
Det er fastlæggelsen af definitionsmængden for løsningerne, som netop fører til undersøgelse af uligheden $x^2 + c > 0$, der giver anledning problemerne.

Tilføj nu bibetingelsen $y(0) = 1$:



Næsten problemfrit. Dog får du også her kun givet løsningen implicit selvom uligheden $x^2 + e > 0$ altid er opfyldt.
Ændrer du bibetingelsen til $y(1) = -1$, er situationen noget anderledes





Her skal uligheden $e \cdot x^2 - e + 1 > 0$ være opfyldt. Denne ulighed er løst på skærmbilledet til højre.

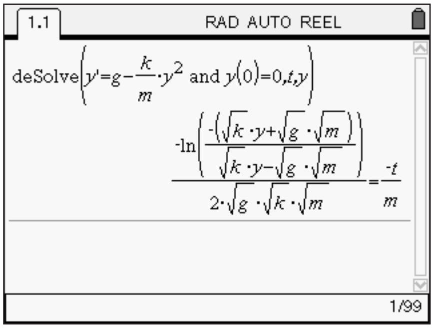
Dette viser, at definitionsmængden for løsningen er $Dm(y) =]\sqrt{e-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}}, \infty[$, da 1 jo ligger i dette interval.

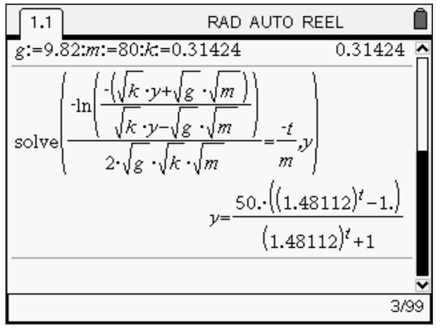
Løs differentialligningen

$$y' = g - \frac{k}{m} \cdot y^2$$

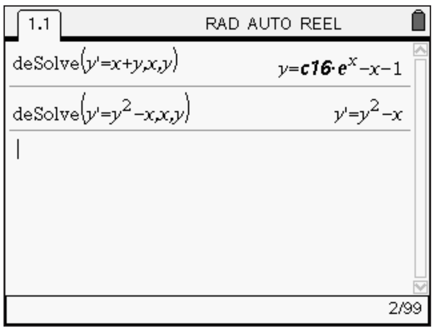
med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$, hvor $g = 9.82$, $m = 80$ og $k = 0.31424$.

Også her får du kun løsningen bestemt implicit. Du skal selv bestemme y med solve, men inden du gør dette, er det en god ide at tildele værdier til g, m og k:





TI-Nspire CAS kan løse ganske mange differentialligninger af 1. orden — selv en ikke helt simpel differentialligning som $y' = x + y$ går som en leg, men i mange tilfælde må maskinen også give op



Maskinen viser sin overgivelse ved at returnere den oprindelige ligning. Det betyder ikke, at der ingen løsninger er — der er masser, som du allerede har set. Selvom differentialligningen ser yderst simpel ud, så er det alligevel ikke muligt at udtrykke løsningerne vha. simple funktioner eller integraler af disse. Denne kendsgerning er ikke noget man blot har erfaret — det kan faktisk bevises!

2. ordens differentialligninger

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 2. ordens differentialligning foregår på TI-Nspire CAS:

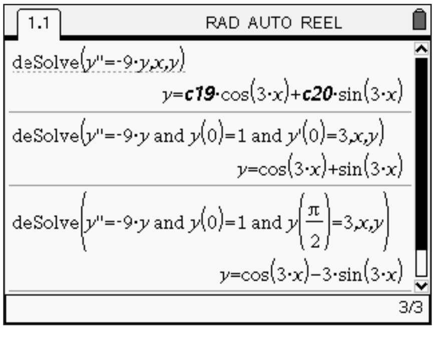
Løs differentialligningen

$$y'' = -9y$$

og bestem den løsning, der

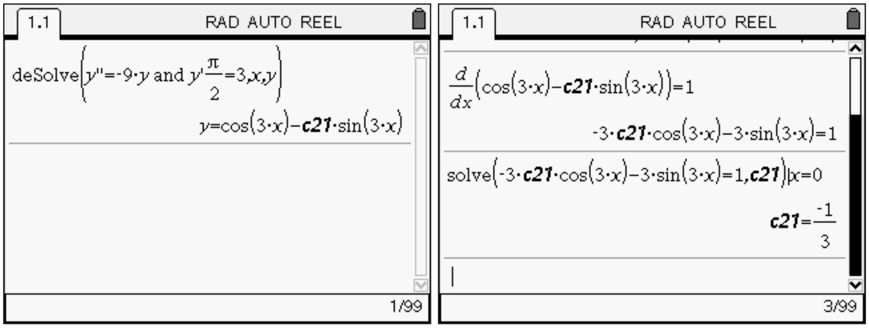
1) går gennem linjeelementet (0,1;3)
2) går gennem punkterne (0,1) og $(\frac{1}{2}\pi, 3)$
3) opfylder, at $y'(\frac{1}{2}\pi) = 3$ og $y'(0) = 1$

Løser du differentialligningen uden bibetingelser af nogen art, får du to arbitrære konstanter i løsningen, som du selv skal bestemme. Med bibetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 3$, og med randbetingelserne $y(0) = 1$ og $y(\frac{1}{2}\pi) = 3$, får du løsningen fuldstændig bestemt:



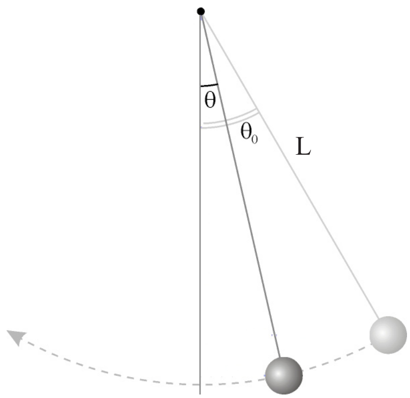
Så simpelt går det ikke i det tredje tilfælde. TI-Nspire CAS vil ikke acceptere to hældninger som som betingelse — du får en argumentfejl, så i første omgang må du nøjes med at tilføje den første.
Herefter må du differentiere løsningen *y*, og løse ligningen *y'*(0) = 1 med hensyn til den tilbageværende konstant (her ***c21***):

Obs
Det er nemmest at kopiere ***c21*** fra historikken til solve kommandoen



Eksempel: Det matematiske pendul

Et matematisk pendul består af et lod med massen *m* ophængt i en masseløs snor med længden L.



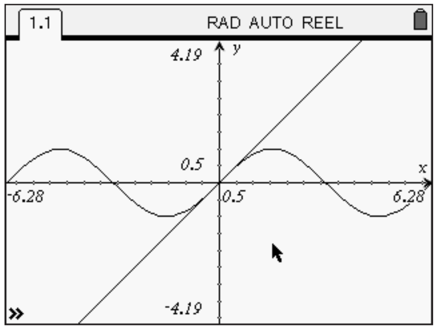
Loddet slippes fra hvile med et startudsving på θ_0. Man kan vise, at udslagsvinklen θ som funktion af tiden tilfredsstiller differentialligningen:

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot \sin(\theta)$$

med bibetingelserne $\theta(0) = \theta_0$ og $\theta'(0) = 0$.

Denne differentialligning kan ikke løses symbolsk, men for små vinkler kan man lave en god tilnærmelse:

På skærmbilledet nedenfor er indtegnet grafen for sin(x) sammen med dens tangent $y = x$ i punktet (0,0):



Da tangenten og grafen stort set er sammenfaldende tæt ved 0, vil sin(x) = x i denne omegn, hvor x måles i radianer. I praksis skal vinklen blot være mindre end ca. 15º.

Med denne tilnærmelse simplificeres differentialligningen til

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot \theta$$

med bibetingelserne $\theta(0) = \theta_0$ og $\theta'(0) = 0$.

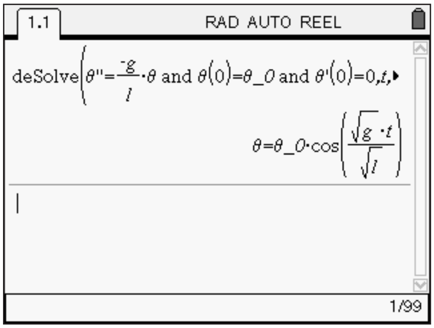
Denne er lige til at løse, omend der er overraskelser undervejs. Ved blot at taste ligningen ind med bibetingelser, får du en noget underlig løsningen. Det hænger sammen med, at TI-Nspire CAS ikke kan afgøre, om faktoren $-\frac{g}{L}$ er positiv eller negativ, og det er meget afgørende for løsningens udseende.

Dette kan du undgå ved eksplicit at gøre opmærksom på, at såvel g som L er positive tal ved at tilføje betingelsen

|g>0 and L>0

til deSolve. Hele kommandoen kommer til at se sådan ud:

$$\text{deSolve}\left(\theta'' = -\frac{g}{L}\cdot\theta \ \text{ and } \ \theta(0) = \theta_0 \ \text{ and } \ \theta'(0) = 0, t, \theta\right) \Big| \ g > 0 \ \text{ and } \ L > 0$$



Perioden i denne harmoniske svingning kan findes ved at løse ligningen

$$\frac{\sqrt{g}\cdot t}{\sqrt{L}} = 2\pi$$

hvorved du finder formlen for svingningstiden for et matematisk pendul (med små udsving):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$